

# 基于格图像的康托集分维与泛逻辑运算<sup>\*</sup>)

陈志成<sup>1</sup> 何华灿<sup>1</sup> 毛明毅<sup>1</sup> 刘 峰<sup>2</sup>

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安710072)<sup>1</sup> (西北工业大学声学工程研究所 西安710072)<sup>2</sup>

**摘 要** 对康托集的研究一直是分形领域的经典而又热点的课题。本文尝试用一种新的模式——“格图像”来研究康托集的分形特性,给出了康托集的格图像构造与分形维数计算方法,计算表明:康托集的自相似分维是格图像分维的特例,格图像分维是自相似分维的扩展。文章首次在分形领域引入泛逻辑的概念,给出了基于格图像的康托集的泛逻辑“与、或、非”运算模型,它不仅考虑了集合的代数测度大小,而且考虑了在参考格中的几何位置关系,这给分形图像的研究提供了一种新的思路,同时也拓展了泛逻辑学的应用领域。

**关键词** 康托集,分形对象,分形维数,自相似,格图像,泛逻辑

## The Fractal Dimension and Universal Logical Operation of Cantor-Set Based on Grid Image

CHEN Zhi-Cheng<sup>1</sup> HE Hua-Can<sup>1</sup> MAO Ming-Yi<sup>1</sup> LIU Feng<sup>2</sup>

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)<sup>1</sup>

(Institute of Acoustics Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)<sup>2</sup>

**Abstract** The study of cantor-set is classical but heated subject in fractal field. This paper tries to study the fractal characteristic of cantor-set by a new model called “grid image”, gives the method of construction of grid image and calculation of fractal dimension. The results show that the self-similar dimension is the specialty of grid image dimension, and the grid image dimension is the extended case of self-similar dimension. The paper imports the conception of universal logic firstly, gives the operation models of “NOT”, “AND”, and “OR” based on grid image. They take into account not only the values of algebraic measure but also the relationship of geometric location. This work provides a new thought—way for studying fractal image, and enlarges the applied fields of universal logic.

**Keywords** Cantor-set, Fractal object, Fractal dimension, Self-similar, Grid image, Universal logic

## 1 引言

随着非线性科学的快速发展,混沌学、分形论、小波理论、时空自组织系统一直是研究重点。普通几何学研究对象,一般都具有整数的维数。比如,零维的点、一维的线、二维的面、三维的立体、乃至四维的时空。而在分形理论中,空间具有不一定是整数的维数,而可以是一个分数维数,这是几何学的新突破,引起了数学家和自然科学家的极大关注<sup>[1~4]</sup>。目前,分形理论已经在数学拓扑、物理相变、地质结构、分子作用、生命系统、材料微观结构、计算机图像处理、纺织图案、艺术美学等众多领域得到良好应用<sup>[5,6]</sup>。经典的分形有康托集、雪花分形、分形地毯等,对它们的研究一直是分形领域的经典而又热点的课题。康托尔最早构造了三分康托集,其分维可以由豪斯道夫维数和相似比求得。

由于分形与混沌系统有其独特的规律性,不仅数学家、动力学者在致力于寻求这些规律,包括材料学家、物理学家、计算机科学工作者都在积极探索。在何华灿教授提出的泛逻辑学原理<sup>[7]</sup>中指出,建立分形逻辑与混沌逻辑可以帮助探求其中的规律,应该说这并不是一件容易的事情,然而与此相关的工作已经开始,并取得阶段性成效。本文在提出“格图像”的相关概念后,尝试利用格图像来研究康托集的分形特性,编写程序<sup>[8]</sup>计算分析了基于不同参考格的康托集的分形维数。并在此基础上引入了泛逻辑运算,给出了基于格图像的泛逻辑“与或非”运算模型。

## 2 自相似康托集

### 2.1 康托集的定义

康托尔构造了如图1的集合:选取一个欧氏长度为 $L_0$ 的直线段。将该线段三等分,去掉中间一段,剩下两段。将剩下的两段分别再三等分,各去掉中间一段,剩下四段。将这样的操作继续下去,直至无穷,则得到一个离散点集。点数趋于无穷多,而欧氏长度趋于零。经无限次操作,达到极限时所得到的离散点集称之为康托集。去掉中间三分之一的康托集称为三分康托集,当 $A$ 趋于无穷时的极限,是一个不可数的无穷集<sup>[3]</sup>。

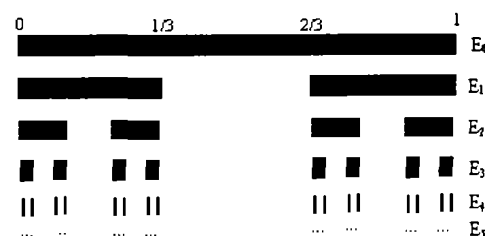


图1 三分康托集

为便于叙述,本文称“ $M$ 分 $N$ 康托集”表示对单位长度进行 $M$ 等分,去掉其中的 $M-N$ 段,保留 $N$ 段,如此进行无限次操作得到的集合。三分二康托集即指通常的三分康托集。

<sup>\*</sup>) 本文受国家自然科学基金项目资助(编号:60273087)。陈志成 博士生,主要研究领域为分形与混沌中的泛逻辑,因特网操作系统。何华灿 教授,博士生导师,主要研究方向为人工智能基础及其应用,泛逻辑学与不确定性推理。毛明毅 博士生,主要研究方向为面向对象的泛逻辑学原理。刘 峰 博士生,主要研究方向为现代信号处理与应用。

## 2.2 自相似分维

理论上的康托集是严格的自相似的,可以由豪斯道夫维来求其分形维数,也可以直接用相似比来求其分维,二者相同。其自相似分维为:

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)} \quad (*)$$

其中,  $r$  为线段的测度,这里即为相似比,  $N$  为用  $r$  量得的线段条数。例如:三分二康托集的  $D = \frac{\ln(2)}{\ln(1/(1/3))} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$ 。而五分三康托集的  $D = \frac{\ln(3)}{\ln(1/(1/5))} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0.6826$ 。

## 3 康托集与格图像

在经典的康托集分维计算中,生成元  $E_0$  都取单位长度为1的线段,其测度  $r$  都取为相似比,为  $E_0$  的几分之一,这种测度的取法及其分维的计算方法在理论数学上无疑具有重要意义。然而,在实际问题中,由于并没有严格的自相似分形,而且分维  $D$  严格依赖于测度  $r$  的选取,因此其应用并不广泛。本文尝试利用一种新的模式——“格图像”来研究康托集的分形特性。

### 3.1 参考格与格测度

**定义1(参考格)** 给定  $N$  个并排的方格,把区间  $[0, L]$  上的经典康托集映射到这  $N$  个方格中,然后再对这  $N$  个方格进行取舍操作,则称这  $N$  个方格为此康托集的参考格,这里的“映射”是区间的延拓或收缩,即把区间  $[0, L]$  进行  $N$  等分,但每个子区间定义为单位格,其大小为  $1 \times 1$ ,因此参考格可以看成是一个  $N \times 1$  的图像。例如:对  $[0, 1]$  上的三分康托集,延拓到  $N=27$  的并排方格中,则第1—9个方格相当于区间  $[0, 1/3]$ ,第10—18个方格相当于区间  $[1/3, 2/3]$ ,第19—27个方格相当于区间  $[2/3, 1]$ 。

目前,对于不是严格自相似的分形图像,其测度的选取主要根据经验决定,笔者在分形系统的泛逻辑运算研究课题中,提出了参考空间中的分形图像测度求解算法,结合本文的内容简要说明三个原则:

(1)确定参考空间,必须把待研究的分形对象纳入某一确定维数  $D_0$  的参考空间中进行考察。在本文中,则需把康托集纳入确定的参考格中进行研究。

(2)设对  $H \times W$  的图像求分维,根据  $H, W$  大小选定最小尺度与最大尺度,其间有  $n$  个尺度,利用程序从  $n$  个尺度中选择  $m(m \geq 2)$  个尺度组成尺度序列  $L$ ,这会有  $C_m^n$  个序列,在假设整个图像全部有图案的条件下,求出对应于各个序列的分形维数。

(3)选取参考格的尺度序列,应满足:(a)由所选尺度序列求得的分维等于或十分接近于  $D_0$ ;(b)所选尺度序列中的元素个数应该大于等于2,在满足(a)的前提下,应取包含元素个数较多且各个元素较为分散的尺度序列作为参考格的尺度序列。

**定义2(格测度)** 由上述三个原则选出的参考格的尺度序列,称为参考格的格测度。如要计算映射于其中的康托集的分形维数,就应该用此格测度去进行测量。格测度具有两条重要的性质:

(1)格测度中的各个元素是参考格  $N$  的因子,即能整除  $N$ ,最小的是1,最大的是  $N$ 。

(2)用格测度求取康托集的分维时,对康托集的分级只需要  $K_0$  步,  $K_0$  为满足公式  $(1/r)^K \geq N$  的最小  $K$  值,其中  $r$  为相似比。可以证明,当  $K$  取更大时,基于参考格的康托集的格维数不会发生变化。

**定义3(临界级数)** 上述的  $K_0$  值,称为基于  $N$  格的相似比为  $r$  的康托集的临界级数。

### 3.2 格图像的定义与生成

把参考格空间看成为  $N \times 1$  的图像  $G_0$ ,进行若干步康托集的等分与取舍操作,每一步都得到一个新的图像  $G_K$ 。例如:对三分康托集的图像  $G_0$ ,三等分后去掉中间的9个方格,保留两端的方格而得到  $G_1$ ,对两端的9格再三等分,然后再去掉其中的3格而得到  $G_2$ ,依次继续下去。根据格测度的性质,当  $N=27$  时,进行三级取舍之后得到图像  $G_3$ 。

**定义4(格图像)** 在格数为  $N$  的参考格中,对康托集进行等分取舍时,对去掉的方格涂上白色(表示无图案,程序中用0表示),对保留的方格涂上黑色(表示有图案,程序中用1表示),称进行临界级数  $K_0$  次操作之后得到的图像  $G_{K_0}$  为此康托集的格图像。根据格维数的计算方法,当  $N$  不是相似比的整数倍时,只要某方格中有部分区间需要保留,则该方格应涂上黑色。

格图像可以由程序自动生成,三分康托集的格图像生成程序如下所示,其中采用递归算法。同理,可以生成其它康托集。如取参考格  $N=27$  时,其格图像为:

1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1

```
void Reconstruct3f2(double qj1, double qj2, int no)
{
    double L = (qj2 - qj1) / 3;
    double st1 = qj1 + L, st2 = qj2 + 2 * L;
    int sd1 = (int)(st1), sd2 = (int)(st2);
    if (st1 - (double)(sd1) > 0) sd1 += 1;
    //Valued '1' to all the elements of array g[] before.
    //Valuing '0' to the part that was given up here.
    for (int i = sd1; i < sd2; i++) g[i] = 0;
    for (int i = 0; i < no; i++) printf("%d", g[i]);
    if (L > 1.0) {
        //The recursive call.
        Reconstruct3f2(qj1, st1, no);
        Reconstruct3f2(st2, qj2, no);
    }
}
```

### 3.3 基于格图像的康托集分维计算

基于格图像的康托集分维计算,分为以下四步:

(1)确定参考格与格测度,格测度是一个尺度序列  $\{L_i\}$ ;

(2)根据相似比构造格图像;

(3)求基于格测度中各尺度的有效图案盒子数,得到盒子序列  $\{N_i\}$ ;

(4)对  $\{L_i\}, \{N_i\}$  序列进行线性回归,所拟和直线的斜率即为分形维数。

## 4 康托集的格图像分维计算

本文程序可以计算任何基于格图像的“ $M$  分  $N$  康托集”的分维。图2(a)表示了三分二康托集的格图像分维的变化情况,图2(b)表示了九分五康托集(相似比为  $1/9$ , 九等分后,去掉偶数段,保留奇数段)的格图像分维的变化情况。

由图2(a)可知,在原运算中,当  $N=81, 243, 729$  时的格图像分维最低,为  $0.6309$ ,这与由公式  $(*)$  计算的结果相同。可以证明:当参考格  $N$  是相似比倒数  $(1/r)$  的完全次方时,所求得的分维与直接由公式  $(*)$  求得的自相似分维相同,当  $N$  不是其完全次方时,基于格图像的分维大于自相似分维。

由图2(a)及(b)可知:当  $N$  逐渐变大时,格图像分维的总趋势是降低的,越来越靠近自相似分维,当  $N=10000000$  时,三分二康托集的格图像分维  $D=0.6457$ ,九分五康托集的格图像分维  $D=0.7465$ ,可以证明,当  $N \rightarrow$  无穷大时,格图像分维的极限就是自相似分维。

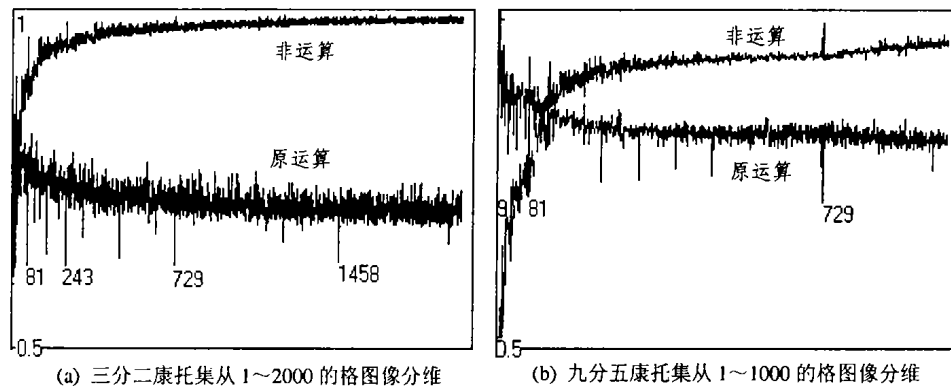


图2

计算与分析表明:经典的自相似分维是本文的格图像分维的特例,而格图像分维则可视为是经典自相似分维的扩展。

## 5 康托集的泛逻辑运算

### 5.1 基于泛逻辑的分形逻辑概要

泛逻辑学提出了所有逻辑的统一模型<sup>[7]</sup>,并首次在分形与混沌领域引入逻辑的概念,提出了“分形逻辑”,这里给出分形逻辑的统一表达式:

$$Q = F(OP_{(h,k)}(F^{-1}(P_1), F^{-1}(P_2), \dots, F^{-1}(P_n)))$$

其中,  $P_i$  为分形对象的分维向量,包括参考空间、分形对象的位置矢量、分维值大小等;每个分形对象唯一对应一个分形图像,函数  $F^{-1}(P)$  表示根据分维向量  $P$  构造出对应的分形图像,  $OP$  表示对相关分形图像的逻辑操作,它相当于“命题连接词”,其范围包括但远远超过“与或非、蕴涵”等经典逻辑连接词,  $OP$  操作不仅考虑分形图像的代数测度大小,还要考虑各分形图像之间的几何位置关系,经过  $OP$  操作之后得到一个新的分形图像(对象),函数  $F(x)$  则表示对此新分形图像求分维,从而得到分形逻辑真值  $Q$  向量,  $h, k$  分别为泛逻辑中的广义相关性系数和误差系数。

在本文中经简化后,其具体语义为:分形图形即指格图像,分维向量包括参考格  $N$ 、康托集类型、分维值大小等。如:  $N=27$  时的三分康托集  $S_c$ , 其分维为 0.6309, 可以表示为分维向量:  $P[27, S_c, 0.6309]$ 。

### 5.2 基于格图像的康托集的泛逻辑运算

结合本文内容,取泛逻辑中的  $k=0.5, h=1.0$ , 并在逻辑公式中略写  $k, h$ , 则其与或非运算公式为:

$$\text{非运算: } \text{NOT}(P) = \sim P = F(\sim_{OP}(F^{-1}(P)))$$

$$\text{与运算: } \text{AND}(P, Q) = F((F^{-1}(P) \wedge_{OP}(F^{-1}(Q)))$$

$$\text{或运算: } \text{OR}(P, Q) = F((F^{-1}(P) \vee_{OP}(F^{-1}(Q)))$$

**定义5(泛原运算)** 康托集的泛原运算是指求在确定参考格中,基于一定相似比的、以确定取舍方式构造的格图像的分维向量,这里的格图像称为“原格图像”。对于某确定的参考格和康托集取舍方式,其真值分维向量可以只写分维值一个分量,而略写其它确知的分量。

**定义6(泛非运算)** 康托集的泛非运算有如下几步:(1)求由原运算分维向量对应的原图像;(2)在参考格中,把原图像中的黑格变为白格,把白格变为黑格,程序中则把1,0取反,称如此得到的新的格图像为“补格图像”; (3)求格补图像的分维向量,即为泛非运算的真值向量。

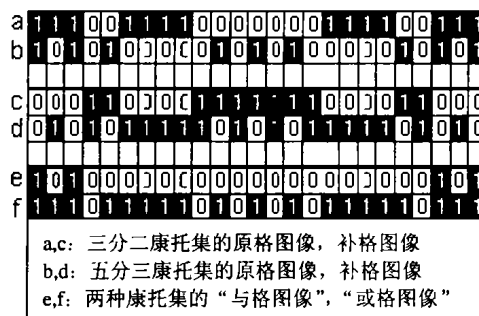
**定义7(泛与运算)** 康托集的泛与运算有如下几步:(1)要求两个原运算的参考格是相同的,求由两个原运算分维向量对应的原图像;(2)在同一参考格中,对两个原图像中的方格进行与运算,从左至右依次扫描,如对应方格均为黑格,则运算结果为黑格,否则为白格,程序中均为1时则取1,否则取

0, 称如此得到的新的格图像为“与格图像”; (3)求格与图像的分维向量,即为泛与运算的真值向量。

**定义8(泛或运算)** 康托集的泛或运算有如下几步:(1)要求两个原运算的参考格是相同的,求由两个原运算分维向量对应的原图像;(2)在同一参考格中,对两个原图像中的方格进行或运算,从左至右依次扫描,如对应两个方格中只要有一个为黑格,则运算结果为黑格,否则为白格,程序中其中一个为1时则取1,否则取0,称如此得到的新的格图像为“或格图像”; (3)求格或图像的分维向量,即为泛或运算的真值向量。

“泛原(非、与、或)运算”亦可成为“泛原(非、与、或)格运算”,简称为“原(非、与、或)运算”;“原(非、与、或)格图像”简称为“原(非、与、或)图像”。

### 5.3 泛逻辑运算范例

图3  $N=25$  时两类康托集的泛逻辑运算

**例1** 取参考格  $N=25$ ,  $P$  为三分二康托集, 用  $S_P$  表示,  $Q$  为五分三康托集(相似比为1/5, 五等分后, 去掉第二、四段, 保留第一、三、五段), 用  $S_Q$  表示,  $R$  表示二者的原(非、与、或)运算结果, 其相关格图像如图3所示, 其中:

$$\text{原运算: } R(P) = F(P) = [25, S_P, 0.8199];$$

$$R(Q) = F(Q) = [25, S_Q, 0.6826];$$

$$\begin{aligned} \text{非运算: } R(\sim P) &= \text{NOT}(P) = F(G - (F^{-1}(P))) \\ &= [25, S_P, 0.7449]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\sim Q) &= \text{NOT}(Q) = F(G - (F^{-1}(Q))) \\ &= [25, S_Q, 0.8614]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{与运算: } R(P \wedge Q) &= \text{AND}(P, Q) = F((F^{-1}(P) \wedge_{OP}(F^{-1}(Q))) \\ &= [25, \{S_P, S_Q\}, 0.4306]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或运算: } R(P \vee Q) &= \text{OR}(P, Q) = F((F^{-1}(P) \vee_{OP}(F^{-1}(Q))) \\ &= [25, \{S_P, S_Q\}, 0.9147]; \end{aligned}$$

由例1的计算结果可知:二者的与运算比两原运算的结果都小, 而或运算比二者都大, 这体现了分维值与格图像位置的相关性。

**例2** 上述  $P$  仍为三分康托集,  $Q$  改为九分五康托集, 取参考格  $N=81$ ,  $N$  是3的完全四次方, 也是9的完全平方, 此时:

原运算:  $R(P)=F(P)=[81, S_P, 0.6309]$ ;

$R(Q)=F(Q)=[81, S_Q, 0.7325]$ ;

非运算:  $R(\sim P)=\text{NOT}(P)=F(G-(F^{-1}(P)))$   
 $=[81, S_P, 0.9599]$ ;

$R(\sim Q)=\text{NOT}(Q)=F(G-(F^{-1}(Q)))$   
 $=[81, S_Q, 0.9328]$ ;

与运算:  $R(P \wedge Q)=\text{AND}(P, Q)=F((F^{-1}(P) \wedge_{OP}(F^{-1}(Q)))$   
 $=[81, \{S_P, S_Q\}, 0.6309]$ ;

或运算:  $R(P \vee Q)=\text{OR}(P, Q)=F((F^{-1}(P) \vee_{OP}(F^{-1}(Q)))$   
 $=[81, \{S_P, S_Q\}, 0.7325]$ ;

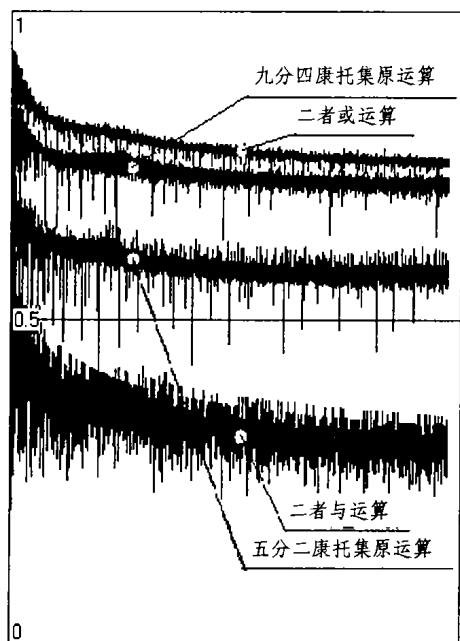


图4 两康托集从1~3000的格图像与或运算

例2的计算结果表明:与运算的分维值正好是两个原运算分维值的最小值,或运算的分维值则是两个原运算分维值的最大值。分析表明,当一个相似比是另一个相似比的完全次方时,且取舍关系保持一致时(如都去掉偶数段,保留奇数段),则二者的与或运算分维值分别是原运算中的最大与最小值。由此可知,“最大最小”的逻辑公式是本文的特例。

图2(a), (b)分别反映了三分二、九分五康托集的原运算与非运算之间的关系,对图2进行局部放大可知:原运算与非运算曲线的凹凸部分正好相反,如果原运算的分维值较大时,其非运算的分维值较小,反之亦反,这符合逻辑非运算的一般形式。当参考格  $N$  很大,其格图像分维越接近其自相似分维时,其非运算的分维值则越接近于1.0。在图4中,反映了五分二康托集与九分四康托集之间的与或运算,可见,二者的与运算曲线比两原运算曲线都低,或运算曲线比两原运算曲线都高,这与泛逻辑中的命题和连接词之间的广义相关性相一致。

## 6 分析与讨论

前面分析得知:格图像分维可以看成参考格  $N$  的函数,自相似分维是当参考格  $N$  是相似比倒数  $(1/r)$  的完全次方时的特例,当  $N$  不是其完全次方时,格图像分维大于自相似分维。从动力学的角度来分析,自相似分维可以看成是连续参考格区间上的“分维陷阱”,进一步研究表明:这种陷阱也是格图像之上的一种混沌吸引子。

康托集构造时的取舍方式与格图像分维密切相关。在经典的逻辑系统中,命题的真值都转化在  $[0, 1]$  之间,这种做法只考虑了集合的测度大小,而忽略了其在参考空间中的几何

位置。泛逻辑原理认为,实际问题中的位置关系可能极大地影响二者的逻辑运算结果。如果两个格图像的分维都较大,但是如果其中的黑格在位置上是相互错开的,而在相同位置均为黑格的格数较少,则其分维不但可能是二者的最小值,而且有可能比最小值还小得多。

由于自相似分维只能适用于理想的严格自相似分形对象,在求包括豪斯道夫维在内的数学集合的测度时需要其极限,而实际问题中往往并非严格的自相似,而且求极限仅是理论上的存在,实际中往往不可操作。然而,如果利用格图像来分析这些问题,可以对不同类型的集合构造格图像,一个典型的问题是多重分形,当不同区间的相似比不同时,无需繁琐地求其谱维数,而是可以在一个适当的参考格中来构造其格图像,然后直接用通用的算法求其分维。因此,格图像的研究目的之一在于统一各类测度的分维。

由于分形与混沌系统中存在着众多内在规律,仅仅依靠数学手段来研究分形与混沌的时代已经过去,而更多的是在各个具体的应用领域中得到发展,而对其内在规律性的研究离不开逻辑推理,本文研究分形对象的格图像,目的在于为其建立泛逻辑系统奠定基础。

本文的格图像可以扩展到二维、三维、以至任何实数维  $R$  空间,此时其泛逻辑真值向量中的分维值属于  $[0, R]$ 。本文提到的逻辑表达方式可以扩展为面向对象的逻辑系统。对于计算机图像处理的理论与方法的发展将有重要作用。

**小结** 本文在计算机分形领域的理论与方法上尝试进行创新性研究,在文字叙述上力求平实易懂,避免了繁琐的数学与逻辑公式。基于本文的内容小结如下:

提出了“格图像”及其相关的格测度、临界级数等概念。计算分析表明:经典的自相似分维是格图像分维的在特定参考格中的特例,而格图像分维则可视为是经典自相似分维的扩展。

给出了基于格图像的康托集泛逻辑运算模型。其间最重要的是在逻辑推理中不仅考虑集合的代数测度大小,而且考虑其间的几何位置关系,把经典的逻辑真值表达式扩展成真值向量,把经典的逻辑值的运算发展成相关对象的逻辑图像的运算,这召唤着一种新的逻辑推理模式——“面向对象的逻辑推理”的产生。

看似简单的分形康托集是经典而又复杂的,基于康托集的研究而发展了多重分形、多种测度。本文工作力求寻找其中的内在逻辑规律,其长期目标在于建立与完善“分形逻辑”,并将其发展成为一种能够探求分形事物内在规律的工具逻辑。

**致谢** 本文工作受国家自然科学基金项目资助(编号:60273087),相关工作得到教研室许多老师的有益建议与热忱帮助,在此一并表示感谢。

## 参考文献

- 1 Kaye B H. A Random Walk Through Fractal Dimension, translated version. Shenyang, Northeastern University Press, 1994. 10~269
- 2 Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. London, Cambridge University Press, 1985. 1~43
- 3 林鸿溢,李映雪. 分形论——奇异性探索. 北京理工大学出版社, 1994. 24~312
- 4 谢和平,薛秀谦. 分形应用中的数学基础与方法. 北京:科学出版社, 1998. 12~96
- 5 王东生,曹磊. 混沌、分形及其应用. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1995. 65~120
- 6 刘华杰. 分形艺术. 长沙:湖南科学技术出版社, 1998. 24~158
- 7 何华灿,王华,刘永怀,等. 泛逻辑学原理. 北京:科学出版社, 2001. 1~256
- 8 Cohoon A P, Jack W, Davidson C++. Program Design, 3rd edition. Beijing, Tsinghua University Press, 2002. 32~98