粗糙集的粗糙度*)

刘贵龙
(北京语言大学信息科学学院 北京100083)

摘 要 设 U 是全集，R 是 U 上的等价关系，(U,R) 是相应的近似空间，则粗相等关系 $\approx$ 是幂集 $P(U)$ 上的等价关系，其商集为 $P(U)/\approx$，而商集 $P(U)/\approx$ 是一个分配格，本文考虑两种特殊情况，使得在这两种特殊情况下粗糙度有类似于集合论的包容排斥原理，同时我们还把此结论推广到粗糙模糊集上。

关键词 粗糙模糊集，粗糙度，下近似，上近似

The Roughness Measures of the Rough Sets

LIU Gui-Long
(School of Information Sciences, Beijing Language & Culture University, Beijing100083)

Abstract Let U denote a finite and nonempty set called the universe, and $P(U)$ a power set of U. Suppose that R is an equivalence relation on U. We proved that if X or Y is the definable set, then between the roughness measures of sets X, Y, $X\cap Y$ and $X\cup Y$ have a similar inclusion-exclusion principle for rough sets. Consider the roughly equal relation which is an equivalence relation on $P(U)$, the equivalence relation partitions the $P(U)$ into disjoint subsets. The quotient set is denoted by $P(U)/\approx$. We obtain a similar inclusion-exclusion principle on $P(U)/\approx$. We also extend these results to rough fuzzy sets.

Keywords Rough fuzzy set, Roughness measures, Lower approximation, Upper approximation

粗糙集理论是一种新的处理模糊和不确定性知识的数学工具，其主要思想就是在分类能力不变的前提下，通过知识的约简，导出问题的决策或分类规则，它在机器学习、决策分析、模式识别及数据挖掘等领域获得成功的应用。粗糙集理论同时也是传统集合论的扩展，它建立在分类机制的基础之上，将知识理解为在某种等价关系下对特定空间的划分，利用上下近似的概念，将知识库中的各种等价类有效地结合起来，描述知识的不确定性。粗糙集理论在数据处理中的最大特点是无需提供除处理问题所需的数据以外的任何先验知识，因此对问题的不确定性的描述较为客观。

设 U 是由感兴趣的对象组成的有限集合，称为论域，R 是定义在 U 上的一个等价关系(或称为不可区分关系)，U/R 表示其相应的分类，$[x]$ 表示 x 所在的等价类，U 的子集 X 称为概念，对于每个概念 X 可定义上下近似如下：

$$\overline{R}X=\{x\mid x\in U,[x]\cap X\neq\varnothing\}$$

$$\underline{R}X=\{x\mid x\in U,[x]\subseteq X\}$$

即粗糙集采用上下近似来描述知识，将考虑问题的对象分为根据现有知识可以肯定属于某个概念 X 的知识集合 $\underline{R}X$、根据现有知识有可能属于但不能确定属于某个概念 X 的知识集合 $\overline{R}X$，这样就导致了边界 $BN(X)=\overline{R}X-\underline{R}X$ 的存在，而边界的大小需要用粗糙性进行描述，因此人们定义了几个指标来描述粗糙性，例如粗糙度 $\rho(X)=1-\dfrac{|\underline{R}X|}{|\overline{R}X|}$ 是一种重要的描述粗糙性的一种方法，粗糙度反映了知识的不完全程度。概念 $X, Y, X\cap Y$ 及 $X\cup Y$ 之间的粗糙度，经过简单计算我们有：

$$\begin{aligned}&\rho(X\cup Y)|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|=\rho(X\cup Y)|\overline{R}(X\cup Y)|\\&=|\overline{R}(X\cup Y)|-|\underline{R}(X\cup Y)|\leqslant|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|-|\underline{R}X\cup\underline{R}Y|\\&=|\overline{R}X|+|\overline{R}Y|-|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|-(|\underline{R}X|+|\underline{R}Y|-|\underline{R}X\cap\underline{R}Y|)\\&=(|\overline{R}X|-|\underline{R}X|)+(|\overline{R}Y|-|\underline{R}Y|)-(|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|)-|\underline{R}X\cap\underline{R}Y|)\\&\leqslant\rho(X)|\overline{R}X|+\rho(Y)|\overline{R}Y|-\rho(X\cap Y)|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|,\end{aligned}$$

即我们有

$$\rho(X\cup Y)|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|\leqslant\rho(X)|\overline{R}X|+\rho(Y)|\overline{R}Y|-\rho(X\cap Y)|\overline{R}X\cap\overline{R}Y| \quad (1)$$

1 问题的提出

式(1)反映了两个子集 X, Y 及其相关的子集的粗糙度之间的关系，一般说来式(1)中的不等号不能改为等号，这可由下例看出：

例 设有一个近似空间 (U,R)，U 被分成以下四类 $\{x_1\}$，$\{x_2\}$，$\{x_3,x_4,x_5,x_6\}$ 及 $\{x_7\}$，$X=\{x_1,x_2,x_3\}$，而 $Y=\{x_1,x_4,x_7\}$，则 $\rho(X\cup Y)|\overline{R}(X\cup Y)|=4$，$\rho(X)|\overline{R}X|=4$，$\rho(Y)|\overline{R}Y|=4$，$\rho(X\cap Y)|\overline{R}(X\cap Y)|=0$，于是仅有

$$\rho(X\cup Y)|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|<\rho(X)|\overline{R}X+\rho(Y)|\overline{R}Y|-\rho(X\cap Y)|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|$$

我们自然地要问在什么条件下式(1)的不等号可以改为等号，即何时有：

$$\rho(X\cup Y)|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|=\rho(X)|\overline{R}X|+\rho(Y)|\overline{R}Y|-\rho(X\cap Y)|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|$$

本文我们给出一些特殊情况，在这些特殊情况下，上述等式成立。

*)教育部科学技术重点项目(01043)资助。**刘贵龙** 博士，教授，研究方向为代数学，计算机应用。

2 特殊情况下的粗糙度

我们主要研究两种情况下的粗糙度,对于这两种情况式(1)中的不等号可以改为等号,首先考虑第一种情况,即当 X,Y 之中有一为可定义集时式(1)中的不等号可以改为等号。

命题1 设(U,R)是近似空间,$X,Y\in P(U)$,则(1)$\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)=\underline{R}X\cup\underline{R}Y$;(2)$\overline{R}(\overline{R}X\cap Y)=\overline{R}X\cap\overline{R}Y$。

证:(1)设 $x\in\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)$,则$[x]\subseteq\underline{R}X\cup Y$,故 $x\in\underline{R}X$ 或 $x\in Y$,若 $x\in\underline{R}X$ 则 $x\in\underline{R}X\cup\underline{R}Y$;若 $x\notin\underline{R}X$,则$[x]\cap\underline{R}X=\varnothing$,由$[x]\subseteq\underline{R}X\cup Y$ 有$[x]\subseteq Y$,这时有 $x\in\underline{R}X\cup\underline{R}Y$,故 $\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)\subseteq\underline{R}X\cup\underline{R}Y$;反之,由上下近似的单调性有 $\underline{R}Y\subseteq\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)$,我们再证 $\underline{R}X\subseteq\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)$,为此设 $x\in\underline{R}X$,则$[x]\subseteq\underline{R}X$,于是$[x]\subseteq\underline{R}X\cup Y$,即 $x\in\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)$,这样 $\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)\supseteq\underline{R}X\cup\underline{R}Y$,因此 $\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)=\underline{R}X\cup\underline{R}Y$,即(1)得证,(2)的证明类似。

设 X 为 U 的子集,如果 $\overline{R}X=X=\underline{R}X$,则 X 称为可定义集,若 X 或 Y 是可定义集,则我们有:

定理1 若 X 或 Y 是可定义的,则

$$\rho(X\cup Y)|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|=\rho(X)|\overline{R}X|+\rho(Y)|\overline{R}Y|-\rho(X\cap Y)|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|。$$

证:只需注意到当 X 或 Y 是可定义集时,由命题1有

$$\begin{aligned}(1)\rho(X\cup Y)|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|&=|\overline{R}(X\cup Y)|-|\underline{R}(X\cup Y)|\\&=|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|-|\underline{R}X\cup\underline{R}Y|\\&=|\overline{R}X|+|\overline{R}Y|-|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|-(|\underline{R}X|+|\underline{R}Y|-|\underline{R}X\cap\underline{R}Y|)\\&=|\overline{R}X|-|\underline{R}X|+|\overline{R}Y|-|\underline{R}Y|-(|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|-|\underline{R}X\cap\underline{R}Y|)\\&=\rho(X)|\overline{R}X+\rho(Y)|\overline{R}Y|-\rho(X\cap Y)|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|\end{aligned}$$

现在我们来考虑第二种情况,即把粗糙度的相关等式推广到由粗相等确定的等价类上。

设 U,R 的意义如上,(U,R)是相应的近似空间,设 $X,Y\in P(U)$,若 $\overline{R}X=\overline{R}Y$ 且 $\underline{R}X=\underline{R}Y$,则我们称 X 与 Y 粗相等,记作 $X\approx Y$,显然$\approx$是 $P(U)$上的等价关系,因而确定 $P(U)$的一个分类,记 X 所在的等价类为$\langle X_1,X_2\rangle$(这里 $\underline{R}X=X_1$,$\overline{R}X=X_2$),即

$$\langle X_1,X_2\rangle=\{X|X\subseteq U,\underline{R}X=X_1,\overline{R}X=X_2\}=[X]$$

所有等价类$\langle X_1,X_2\rangle$的集合记为 $P(U)/\approx$,这样上述定义的粗糙度实际上可以定义在 $P(U)/\approx$上(是 $P(U)/\approx$上的一个模糊集合),如果 $X\in\langle X_1,X_2\rangle$,即$[X]=\langle X_1,X_2\rangle$,为方便我们有时也把粗糙度 $\rho(X)=1-\dfrac{|\underline{R}X|}{|\overline{R}X|}$写成 $\rho[X]=1-\dfrac{|\underline{R}X|}{|\overline{R}X|}=1-\dfrac{|X_1|}{|X_2|}$的形式,文[4]指出按照

$\langle X_1,X_2\rangle\wedge\langle Y_1,Y_2\rangle=\langle X_1\cap Y_1,X_2\cap Y_2\rangle$或

$[X]\wedge[Y]=\langle X_1\cap Y_1,X_2\cap Y_2\rangle$;

$\langle X_1,X_2\rangle\vee\langle Y_1,Y_2\rangle=\langle X_1\cup Y_1,X_2\cup Y_2\rangle$或

$[X]\vee[Y]=\langle X_1\cup Y_1,X_2\cup Y_2\rangle$;

及$\sim\langle X_1,X_2\rangle=\langle\sim X_2,\sim X_1\rangle$,或$\sim[X]=[\sim X]$,这里$\sim$表示集合的补运算。

$P(U)/\approx$构成一个分配格[4],在分配格 $P(U)/\approx$中,等价类$[X]$,$[Y]$,$[X]\wedge[Y]$及$[X]\vee[Y]$上的粗糙度有下列关系:

定理2 设$[X]=\langle X_1,X_2\rangle$,$[Y]=\langle Y_1,Y_2\rangle\in P(U)/\approx$,则

$$\rho([X]\vee[Y])|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|=\rho([X])|\overline{R}X|+\rho([Y])|\overline{R}Y|-\rho([X]\wedge[Y])|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|。$$

证:由于$\langle X_1\cup Y_1,X_2\cup Y_2\rangle\neq\varnothing$及$\langle X_1\cap Y_1,X_2\cap Y_2\rangle\neq\varnothing$,故 $\rho([X]\vee[Y])$及 $\rho([X]\wedge[Y])$均有意义,且

$$\begin{aligned}\rho([X]\vee[Y])|\overline{R}X\cup\overline{R}Y|&=|X_2\cup Y_2|-|X_1\cup Y_1|\\&=(|X_2|-|X_1|)+(|Y_2|-|Y_1|)-(|X_2\cap Y_2|-|X_1\cap Y_1|)\\&=\rho([X])|\overline{R}X|+\rho([Y])|\overline{R}Y|-\rho([X]\wedge[Y])|\overline{R}X\cap\overline{R}Y|\end{aligned}$$

定理2说明,在分配格 $P(U)/\approx$上,我们有类似于集合论的包容排斥原理,事实上,从数学上来说,两者本质上是相同的。

3 粗糙模糊集的粗糙度

M. Banerjee[1]等把粗糙度的概念推广到近似空间的粗糙模糊集上,定义模糊集 X 的上下近似[1]为 $\overline{R}X,\underline{R}X\in F(U)$:

$$(\overline{R}X)(x)=\bigvee_{y\in[x]}X(y),(\underline{R}X)(x)=\bigwedge_{y\in[x]}X(y)$$

这里符号$\vee$,$\wedge$分别表示取大、取小。M. Banerjee[1]等定义了模糊集 X 在近似空间(U,R)上关于参数 $\alpha,\beta(0<\beta\leqslant\alpha\leqslant 1)$的粗糙度为:

$$\rho_X^{\alpha,\beta}=1-\frac{|(\underline{R}X)_\alpha|}{|(\overline{R}X)_\beta|};$$

(规定当$(\overline{R}X)_\beta=\varnothing$时,$\rho_X^{\alpha,\beta}=0$)

我们指出对于粗糙模糊集的粗糙度,上节的全部结论成立,但我们仅给出其结论,略去证明,实际上,证明过程也大致类似,通过我们给出的命题大致可以看出证明的轮廓。

命题2 设(U,R)是近似空间,$X\in F(U)$,则:(1)$\forall\lambda\in[0,1]$有$(\overline{R}X)_\lambda=\overline{R}X_\lambda$;(2)$\forall\lambda\in[0,1]$有$(\underline{R}X)_\lambda=\underline{R}X_\lambda$,这里 X_λ 表示模糊集 X 的截集。

命题3 设 X、Y 均为 U 上的模糊集合,则 $X=Y$ 当且仅当对任意的实数 $\lambda,0\leqslant\lambda\leqslant 1$,有 $X_\lambda=Y_\lambda$。

证:由模糊集的分解定理,$X=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda X_\lambda=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda Y_\lambda=Y$。

由命题2、3,我们可以把命题1的结论推广到粗糙模糊集上,即有

命题4 设(U,R)是近似空间,$X,Y\in F(U)$,则(1)$\underline{R}(\underline{R}X\cup Y)=\underline{R}X\cup\underline{R}Y$;(2)$\overline{R}(\overline{R}X\cap Y)=\overline{R}X\cap\overline{R}Y$。

定理3 设 $X,Y\in F(U)$,若 X 或 Y 是可定义的,$\alpha,\beta(0<\beta\leqslant\alpha\leqslant 1)$为实数,则 $\rho_{X\cup Y}^{\alpha,\beta}|(\overline{R}X)_\beta\cup(\overline{R}Y)_\beta|=\rho_X^{\alpha,\beta}|(\overline{R}X)_\beta|+\rho_Y^{\alpha,\beta}|(\overline{R}Y)_\beta|-\rho_{X\cap Y}^{\alpha,\beta}|(\overline{R}X)_\beta\cap(\overline{R}Y)_\beta|$。

此外,与经典集合上的粗糙集一样,也可以对 U 上的模糊集 X 与 Y 定义粗相等的概念,X 与 Y 粗相等的事实记为 $X\approx Y$,模糊集的粗相等也是一个等价关系,因而确定 $F(U)$的一个分类,相应的商集(或称商空间)记为 $F(U)/\approx$,模糊集 X 所在的等价类仍记为$[X]$,有时为了方便,记 X 所在的等价类为$\langle X_1,X_2\rangle$(这里 $\underline{R}X=X_1$,$\overline{R}X=X_2$),即$\langle X_1,X_2\rangle=\{X|X\in F(U),\underline{R}X=X_1,\overline{R}X=X_2\}=[X]$,这样上述定义的粗糙度实际上可以定义在 $F(U)/\approx$上(即 $\rho_X^{\alpha,\beta}$ 是 $F(U)/\approx$上的一个模糊集合),如果 $X\in\langle X_1,X_2\rangle$,即$[X]=\langle X_1,X_2\rangle$,这时我们也把粗糙度 $\rho_X^{\alpha,\beta}=1-\dfrac{|(\underline{R}X)_\alpha|}{|(\overline{R}X)_\beta|}$写成:$\rho_{[X]}^{\alpha,\beta}=1-\dfrac{|(\underline{R}X)_\alpha|}{|(\overline{R}X)_\beta|}=1-\dfrac{|(X_1)_\alpha|}{|(X_2)_\beta|}$的形式。按照

$\langle X_1,X_2\rangle\wedge\langle Y_1,Y_2\rangle=\langle X_1\cap Y_1,X_2\cap Y_2\rangle$或$[X]\wedge[Y]=$

(下转第153页)

预先确定的活动可以详细描述,甚至描述到原子活动,工作方式难以确定的活动只有活动名称出现在过程模型中,该活动所包含的子活动及子活动之间的关系(控制流程)需要过程例化时动态确定,即实现过程模型的动态细化,但该活动的语义在较高的抽象层次上是明确的,活动需要的输入及活动能产生的输出也是确定的,以保证该活动的后续活动的描述,保证整个过程模型的控制流程的正确性和完整性。

图6所示的软件单元A的设计、编码、测试活动的描述过程中,若希望单元A采用可重用构件,但描述过程模型时还暂不能确定是否能有可用的构件,这一不确定因素导致了软件单元A的编码和测试活动存在不确定因素,这两项活动的进一步详细描述(如其中包含的子活动及子活动之间的执行顺序关系),只能根据单元A的具体实现方式(即使用可重用构件还是按软件设计进行编码)动态确定。图6中"软件单元A设计"活动建模时可以细化,编码和测试活动需动态细化,但编码和测试活动所需要的输入和能产生的输出建模时是可以确定的,以便于对"测试"后的活动建模,生成完整的过程模型。

→ 软件单元A设计 → 软件单元A编码 → 软件单元A测试 →

图6　软件过程

3.2　基于过程模式动态例化过程模型

过程模型的动态例化主要包括两个方面的工作,一是过程模中的过程实体(活动、角色、资源、产品)的动态例化,二是过程模型中的过程实体关系的动态例化,涉及到实体关系的动态修改和动态细化。

过程实体的动态例化包括活动起止时间的调整、角色实例(即实施者)的重新分配、资源的重新分配等。

过程实体关系的动态例化,需根据软件过程执行的实时态势,局部修改过程实体关系和细化大粒度描述的活动,主要包括3种类型的实时动态处理:

①对在过程建模时具有不确定的动态行为而无法详细描述的活动进行详细描述;

②对过程模型中不适合当前态势的过程实体关系进行局部调整后形成过程实例,并据此修改过程模型,这种处理适合于过程模型不完善的情况;

③对过程模型中不适合当前态势的过程实体关系进行局部调整后形成过程实例,但不修改过程模型,这种处理适合于具体软件项目过程流程的临时修改。

由本文3.1节的论述可知,基于过程模式进行以上3种类型的实时动态处理可以提高过程例化适应动态变化(包括可预见和不可预见变化)的能力,从而减少适应动态变化的响应时间,提高响应效率。

总结　由于软件过程的复杂性和不确定性,软件过程的实施过程中必须应对和处理多种可预见或不可预见的变化,过程实施不可能完全按照过程模型描述的步骤严格执行,过程模型和过程实施系统必须具有一定的动态适应能力。

基于过程模式的过程建模和基于过程模式的过程实施系统具有本质的适应动态变化的能力,如何基于过程模式进一步提高过程实施系统的动态适应能力是非常值得研究的课题。

参 考 文 献

1 Golden W, Powell P. Towards a Definition of Flexibility in Search of the Holy Grail. The International Journal of Management Science, 2000, 28(4)
2 朱三元,钱乐秋,宿为民. 软件过程技术概论. 第一版. 北京:科学出版社,2002
3 梁义芝,王延章,赵晓哲,缪旭东. 软件领域中的模式研究. 计算机科学,2003,30(3)
4 Ribó JM, Franch X. Building Expressive and Flexible Process Models Using a UML-Based Approach. In: Ambriola V, ed. EWSPT 2001, LNCS 2077. Germany: Springer-Verlab Berlin Heidelberg, 2001. 152~172
5 Dickson K W, Li Ch, Karlapalem K. A meta modeling approach to workflow management system supporting exception handling. Information System, 1999, 24(2)
6 Reichert M, Dadam P. A framwork for dynamic changes in workflow management systems. In: Proc. of DESA'97, 1997. 42~48
7 Reichert M, Dadam P. ADEPEflex-Supporting dynamic changes of workflow without loosing control. Journal of Intelligent Information Systems, 1998, 11(2)
8 Liu C, Orlowska M E, Li H. Automating handover in dynamic workflow environments. In: Pernici B, Thanos C, eds. Advanced Information Systems Engineering. New York: Springer, 1998. 159~172
9 Kammer PJ. Techniques for supporting dynamic and adaptive workflow. Computer Supported Cooperative Work, 2000, 9(3-4)
10 梁义芝,王延章,刘云飞,缪旭东. 基于过程模式的软件过程框架. 计算机科学,2003,30(8)
11 梁义芝,王延章,刘云飞,缪旭东. 基于过程模式的软件过程建模. 计算机科学,已录用

(上接第141页)

$\langle X_1 \cap Y_1, X_2 \cap Y_2 \rangle$;

$\langle X_1, X_2 \rangle \vee \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2 \rangle$ 或 $[X] \vee [Y] = \langle X_1 \cup Y_1, X_2 \cup Y_2 \rangle$;

及 $\sim\langle X_1, X_2 \rangle = \langle \sim X_2, \sim X_1 \rangle$,或 $\sim[X] = [\sim X]$,这里 $\sim$ 表示集合的补运算。$F(U)/\approx$ 构成一个有界分配格,在分配格 $F(U)/\approx$ 中,等价类 $[X]$,$[Y]$,$[X] \wedge [Y]$ 及 $[X] \vee [Y]$ 上的粗糙度仍有下列关系:

定理4　设 $[X] = \langle X_1, X_2 \rangle$,$[Y] = \langle Y_1, Y_2 \rangle \in F(U)/\approx$,则有:

$$\rho^{\alpha,\beta}_{[X]\vee[Y]} |(\overline{R}X)_\beta \cup (\overline{R}Y)_\beta| = \rho^{\alpha,\beta}_{[X]} |(\overline{R}X)_\beta| + \rho^{\alpha,\beta}_{[Y]} |(\overline{R}Y)_\beta| - \rho^{\alpha,\beta}_{[X]\wedge[Y]} |(\overline{R}X)_\beta \cap (\overline{R}Y)_\beta|。$$

结束语　本文我们给出了粗糙度的两个类似于普通集合的包容排斥原理,实际上是不同集合的粗糙度之间的一种联系,我们证明了在分配格 P(U)/≈ 及 F(U)/≈ 中,等价类 [X],[Y],[X]∧[Y] 及 [X]∨[Y] 上的粗糙度有相似的等式。这个等式反映了粗糙度之间的内在联系,利用这个等式可以从一个集合的粗糙度来计算另一个集合的粗糙度。由于粗糙度反映了知识的不完全性程度,即透过我们给出的等式可以从一个知识的不完全性程度来推断另一个知识的不完全性程度,为探讨数据挖掘的数学本质提供一种方法。

参 考 文 献

1 Banerjee M, Pal S K. Roughness of a fuzzy set. Information Sciences, 1996, 93: 235~246
2 Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the rough sets. Information Sciences, 1998, 109(1-4): 21~47
3 Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators, axiomatic rough set theory. In: Ziarko W P, ed. Rough sets, Fuzzy sets and Knowledge Discovery. London, Springer-Verlag, 1994. 256~260
4 Yao Y Y, Wong S K M, Lin T Y. A review of rough set models, Rough set and data mining, Analysis for imprecise data. In: T.Y.Lin, N.Cercone, eds. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997. 47~75
5 张文修,等. 粗糙集理论与方法. 科学出版社,2001
6 李洪兴,汪培庄. 模糊数学. 国防工业出版社,1994