一种在多三维协坐标系统间建立联系的方法

傅 彦 Laxmisha Rai 陈 镔 李毅超
(电子科技大学计算机科学与工程学院 成都610054)

摘 要 本文将建立在两个三维协坐标(Co-ordinate)间的一系列关系函数,用以对相关的转换参数进行计算。本文的目的就在于在两个三维协坐标系统间建立一种关系,以助于通过已知的其中一个协坐标系统的少量信息来获得另一个协坐标系统的相关参数。

关键词 三维协坐标,旋转矩阵,单值分解,回代

Establishing Relationship between 3D Co-ordinate Systems

FU Yan Laxmisha Rai CHEN Bin LI YI-Chao
(School of Computer Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054)

Abstract Here the method of establishing a relationship between 3D Co-ordinate system is proposed and set of equations is developed to calculate the transformation parameters. The main aim of this work is to establish a relationship between two 3D Co-ordinate systems and to find the parameters involved to obtain the any other co-ordinates in the second system.

Keywords 3D Co-ordinate, Rotation matrix, Singular Value Decomposition(SVD), Back substitution

在照相测量法和机器人学问题中,此类函数对于测定多个三维协坐标系统间关系是非常有用的。在这方面的应用中,通过已知的至少一个三维协坐标的信息来确定其他相关协坐标系统。这将有助于在某个整体系统中只有极少量点已知情况下确定其中任意两个点的距离。

1. 协坐标系统间的转换

在将一个协坐标系统向另一个协坐标系统转换过程中将有以下相关数学推导。变形的三维转换可以符号化为[1]:

$X_{After}=k\ M^T X_{Before}+X_0$

其中:$X_{After}=[X_A, Y_A, Z_A]^T$ 表示转换后得到的协坐标;

$X_{Before}=[X_B, Y_B, Z_B]^T$ 表示转换前的协坐标;

$X_0=[X_C, Y_C, Z_C]^T$ 表示从 X_B, Y_B, Z_B 到 X_A, Y_A, Z_A 进行变换时的初始向量;

K 是一个表征大小的系数。

在深入研究之前,首先只考虑绕 X_B 轴,Y_B 轴,Z_B 轴分别依次旋转 Ω、φ 和 θ 角度。

1.1 第一次旋转(Ω)

这个旋转将使 Y_B 轴和 Z_B 轴分别变换到位置 $Y_{A\Omega}$ 和 $Z_{A\Omega}$。这个过程可以用以下的旋转矩阵表示:

$$M_\Omega=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\Omega & \sin\Omega\\ 0 & -\sin\Omega & \cos\Omega\end{pmatrix}$$

本协坐标系统中的任意一点 P,在经过这一步旋转后将变为 $X_{A\Omega}, Y_{A\Omega}, Z_{A\Omega}$:

$X_{A\Omega}=X_B$

$Y_{A\Omega}=Y_B\cos\Omega+Z_B\sin\Omega$

$Z_{A\Omega}=-Y_B\sin\Omega+Z_B\cos\Omega$

1.2 第二次旋转(φ)

这个旋转将使 $X_{A\Omega}$ 轴和 $Z_{A\Omega}$ 轴分别变换到位置 $X_{A\Omega\varphi}$ 和 $Z_{A\Omega\varphi}$。

这个过程可以用以下的旋转矩阵表示:

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

在本协坐标系统中的该点 P,在经过上两步旋转后将变为 $X_{A\Omega\varphi}, Y_{A\Omega\varphi}, Z_{A\Omega\varphi}$:

$X_{A\Omega\varphi}=X_{A\Omega}\cos\varphi-Z_{A\Omega}\sin\varphi$

$Y_{A\Omega\varphi}=Y_{A\Omega}$

$Z_{A\Omega\varphi}=X_{A\Omega}\sin\varphi+Z_{A\Omega}\cos\varphi$

1.3 第三步旋转(θ)

这一步的旋转将使 $X_{A\Omega\varphi}$ 轴和 $Y_{A\Omega\varphi}$ 轴分别变换到位置 $X_{A\Omega\varphi\theta}$ 和 $Y_{A\Omega\varphi\theta}$。

本过程可以用以下的旋转矩阵表示:

$$M_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

经过上述步骤以后,P 点就得到了最后的结果,第三步的旋转系统同样可以表达为:

$X_{A\Omega\varphi\theta}=X_{A\Omega\varphi}\cos\theta+Y_{A\Omega\varphi}\sin\theta$

$Y_{A\Omega\varphi\theta}=-Y_{A\Omega\varphi}\cos\theta+X_{A\Omega\varphi}\cos\theta$

$Z_{A\Omega\varphi\theta}=Z_{A\Omega\varphi}$

而所有上述的旋转可以用一个旋转矩阵 M 表示:

$M=M_\Omega M_\varphi M_\theta$

考虑到相关的数学过程,即矩阵相乘的阶,M 最好写为:

$M=M_\theta M_\varphi M_\Omega$

$$M^T=\begin{pmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13}\\ S_{21} & S_{22} & S_{23}\\ S_{31} & S_{32} & S_{33}\end{pmatrix}$$

其中:$S_{11}=\cos\varphi\cos\theta$;$S_{12}=-\cos\varphi\sin\theta$;$S_{13}=\sin\varphi$;$S_{21}=\cos\Omega\sin\theta+\sin\Omega.\sin\varphi.\cos\theta$;$S_{22}=\cos\Omega\cos\theta-\sin\Omega.\sin\varphi.\sin\theta$;$S_{23}=-\sin\Omega.\cos\varphi$;$S_{31}=\sin\Omega\sin\theta-\cos\Omega.\sin\varphi.\cos\theta$;$S_{32}=$

$\sin\Omega \cos\theta+\cos\Omega \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$；$S_{33}=\cos\Omega \cdot \cos\varphi$。

令 $K_1=\sin\Omega$，$K_2=\sin\varphi$，$K_3=\sin\theta$，$K_4=\cos\Omega$，$K_5=\cos\varphi$，$K_6=\cos\theta$

则 M^T 变为：

$$M^T=\begin{pmatrix} K_5K_6 & -K_3K_5 & K_2 \\ K_3K_4+K_1K_2K_6 & K_4K_6-K_1K_2K_3 & -K_1K_5 \\ K_1K_3-K_2K_4K_6 & K_1K_6+K_2K_3K_4 & K_4K_5 \end{pmatrix}$$

以上转换方法即可以将一个协坐标系统转换到另一协坐标系统。因此，此时就可以利用上述矩阵建立起两个协坐标系统间的关系。在两个系统中都知道了至少三个点的前提下，就可以决定此系统中的所有任意点。这个方法可以由以下形式的方程来表示，这些方程是通过替换前述三个变换 X_C，Y_C 和 Z_C 中的参数和向量而得到。

如下所示：

$$X_{A1}=(X_{B1}-X_C)(K_5K_6)+(Y_{B1}-Y_C)(-K_3K_5)+(Z_{B1}-Z_C)(K_2)$$
$$Y_{A1}=(X_{B1}-X_C)(K_3K_4+K_1K_2K_6)+(Y_{B1}-Y_C)(K_4K_6-K_1K_2K_3)+(Z_{B1}-Z_C)(-K_1K_5)$$
$$Z_{A1}=(X_{B1}-X_C)(K_1K_3-K_2K_3K_6)+(Y_{B1}-Y_C)(K_1K_6+K_2K_3K_4)+(Z_{B1}-Z_C)(K_4K_5)$$
$$X_{A2}=(X_{B2}-X_C)(K_5K_6)+(Y_{B2}-Y_C)(-K_3K_5)+(Z_{B2}-Z_C)(K_2)$$
$$Y_{A2}=(X_{B2}X_C)(K_3K_4+K_1K_2K_6)+(Y_{B2}-Y_C)(K_4K_6-K_1K_2K_3)+(Z_{B2}-Z_C)(-K_1K_5)$$
$$Z_{A2}=(X_{B2}-X_C)(K_1K_3-K_2K_3K_6)+(Y_{B2}-Y_C)(K_1K_6+K_2K_3K_4)+(Z_{B2}-Z_C)(K_4K_5)$$
$$X_{A3}=(X_{B3}-X_C)(K_5K_6)+(Y_{B3}-Y_C)(-K_3K_5)+(Z_{B3}-Z_C)(K_2)$$
$$Y_{A3}=(X_{B3}-X_C)(K_3K_4+K_1K_2K_6)+(Y_{B3}-Y_C)(K_4K_6-K_1K_2K_3)+(Z_{B3}-Z_C)(-K_1K_5)$$
$$Z_{A3}=(X_{B3}-X_C)(K_1K_3-K_2K_3K_6)+(Y_{B3}-Y_C)(K_1K_6+K_2K_3K_4)+(Z_{B3}-Z_C)(K_4K_5)$$

最终的方程集合是：

$$X_{A1}=(X_{B1}-X_C)C_1+(Y_{B1}-Y_C)C_2+(Z_{B1}-Z_C)C_3$$
$$Y_{A1}=(X_{B1}-X_C)C_4+(Y_{B1}-Y_C)C_5+(Z_{B1}-Z_C)C_6$$
$$Z_{A1}=(X_{B1}-X_C)C_7+(Y_{B1}-Y_C)C_8+(Z_{B1}-Z_C)C_9$$
$$X_{A2}=(X_{B2}-X_C)C_1+(Y_{B2}-Y_C)C_2+(Z_{B2}-Z_C)C_3$$
$$Y_{A2}=(X_{B2}-X_C)C_4+(Y_{B2}-Y_C)C_5+(Z_{B2}-Z_C)C_6$$
$$Z_{A2}=(X_{B2}-X_C)C_7+(Y_{B2}-Y_C)C_8+(Z_{B2}-Z_C)C_9$$
$$X_{A3}=(X_{B3}-X_C)C_1+(Y_{B3}-Y_C)C_2+(Z_{B3}-Z_C)C_3$$
$$Y_{A3}=(X_{B3}-X_C)C_4+(Y_{B3}-Y_C)C_5+(Z_{B3}-Z_C)C_6$$
$$Z_{A3}=(X_{B3}-X_C)C_7+(Y_{B3}-Y_C)C_8+(Z_{B3}-Z_C)C_9$$

其中：$C_1=K_5K_6$，$C_2=-K_3K_5$，$C_3=K_2$；$C_4=K_3K_4+K_1K_2K_6$；$C_5=K_4K_6-K_1K_2K_6$；$C_6=-K_1K_5$；$C_7=K_1K_3-K_2K_4K_6$；$C_8=K_1K_6+K_2K_3K_4$；$C_9=K_4K_5$。

用以从一个协坐标系统转换到另一个协坐标系统用到的最终参数为：

C_1，C_2，C_3，C_4，C_5，C_6，C_7，C_8，C_9，X_C，Y_C，Z_C

以上方程用到单值分解(singular Value Decomposition，SVD)和回代(back substitution[4])法。单值分解法(SVD)可以有助于对某一给定矩阵的问题进行诊断和提供相应解答。而且，任一 $m\times n$ 矩阵($m>=n$)都可以写作 $m\times n$ 的正交矩阵 U，$n\times n$ 有着非负元素的对角矩阵，以及 $n\times n$ 正交矩阵的转置。

在有回代的单值分解方法中，转换参数首先被设置为0，并且将结果和期望结果相比较。

这个过程不断将新的值集代入进行，直到结果和期望结果相匹配。

2. 一个典型的测量过程中获得的结果

转换之前的协坐标：

3738.567710	2477.67299	133.157941
4446.351355	2734.034259	−400.465783
4099.653905	3085.748699	−1259.239468

转换后的协坐标：

910.993	−2315.65	34.897000
1213.43	−3007.23	179.581
380.843	−1536.02	1131.59

转换参数为：

$C_1=0.9263$，　$C_2=-0.935068$，
$C_3=0.21259$，　$C_4=-1.80296$，
$C_5=1.552617$，　$C_6=-0.349405$，
$C_7=-0.520200328$，　$C_8=0.881826$，
$C_9=-0.53737066$
$X_C=700.0296$，$Y_C=320.61397$，$Z_C=-400.0926$

参 考 文 献

1 Analytical Photogrammetry. Second Edition, Sanjib K Ghosh, Pergamon Publishers
2 Photogrammetry. Third Edition, Francis, H Moffitt and Edward. M. Mikhail, Harper and Row Publishers, Newyork
3 Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, William H Press, et al. 1993
4 http://www.techsoftpl.com/matrix/doc/matdcmp.htm
5 http://www.library.cornell.edu/nr/nr_index.cg

(上接第139页)

绝对时间差在2秒以内。因此，SCG 比 Apriori 具有更高的挖掘效率。

结论 候选序列的生成是序列挖掘算法中基本而且重要的问题。本文研究了将待挖掘的序列数据库转换为图结构的方法，并以此为基础研究了频繁序列与图的完全子图的关系，证明了一个序列成为频繁序列的必要条件是该序列对应于图中的一个完全子图。利用这个性质，文中给出了一个基于完全图的候选序列的生成算法。除了证明该算法的正确性，文中还将该算法与 Apriori 算法中候选序列的生成过程进行了比较分析。虽然 Apriori 算法生成的候选序列较 SCG 生成的候选序列少，但是 Apriori 在生成候选序列时所进行的剪枝操作较 SCG 多且复杂。在 T25I10D10k 和 T25I20D100k 数据集进上进行的挖掘实验表明 SCG 的挖掘效率比 Apriori 的挖掘效率更高。

本文虽然从数据实验中得到了 SCG 的挖掘效率较高，但是由于挖掘过程与数据集相关性较大，要得到更一般的结论还需要对 Apriori 算法进行更细致的复杂性分析，这是值得进行进一步研究的问题。

参 考 文 献

1 Han J, Pei J, Yin Y. Mining frequent patterns without candidate generation. SIGMOD'00
2 Zaki M. SPADE: An efficient algorithm for mining frequent sequences. Machine Learning, 2001, 40: 31～60
3 Agrawal R, Srikant R. Mining sequential patterns. ICDE'95
4 Srikant R, Agrawal R. Mining quantitative association rules in large relational tables. SIGMOD'96
5 Agrawal R, Srikant R. Fast algorithms for mining association rules. VLDB'94
6 Han J, Kamber M. 数据挖掘——概念与技术. 北京：高等教育出版社，2001