

# 一个单向耦合的混沌时延神经元系统的滞同步<sup>\*</sup>)

彭军<sup>1</sup> 张伟<sup>2</sup> 廖晓峰<sup>3</sup> 李学明<sup>3</sup> 刘勇国<sup>4</sup>

(重庆工业高等专科学校计算机系 重庆400050)<sup>1</sup>

(重庆教育学院计算机与现代教育技术系 重庆400067)<sup>2</sup>

(重庆大学计算机科学与工程学院 重庆400044)<sup>3</sup> (上海交通大学计算机科学与工程系 上海200030)<sup>4</sup>

**摘要** 本文研究了一个单向耦合的混沌时延神经元系统的滞同步问题。利用 Krasovskii-Lyapunov 稳定性理论,分析了同步的渐近稳定性,并给出了判定耦合系统滞同步的一个充分条件。数值实验仿真结果表明,该系统具有满意的滞同步效果,证实了结论的正确性。

**关键词** 混沌,时延神经元,滞同步,渐近稳定性

## Lag Synchronization of a Unidirectionally Coupled Chaotic Time-delayed Neuron System

PENG Jun<sup>1</sup> ZHANG Wei<sup>2</sup> LIAO Xiao-Feng<sup>3</sup> LI Xue-Ming<sup>3</sup> LIU Yong-Guo<sup>4</sup>

(Department of Computer Science, Chongqing Polytechnic College, Chongqing 400050)<sup>1</sup>

(Department of Computer & Modern Education Technology, Chongqing Education College, Chongqing 400067)<sup>2</sup>

(Department of Computer Science and Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044)<sup>3</sup>

(Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)<sup>4</sup>

**Abstract** In this paper, lag synchronization of a unidirectionally coupled identical chaotic time-delayed neuron system is investigated. The asymptotic stability of the synchronization is analyzed by employing the Krasovskii-Lyapunov theory, and a sufficient condition of lag synchronization of the coupled system is proposed. The result of computer stimulate indicates that the coupled system possesses ideal lag synchronization effect, and the result is consistent with the theoretical analysis.

**Keywords** Chaos, Time-delayed neuron, Lag synchronization, Asymptotic stability

## 1 引言

1990年,美国海军实验室研究人员 Pecora 和 Carroll 首次利用驱动-响应法实现了两个混沌的自同步<sup>[1~3]</sup>,这一突破性的进展,极大地激发了各国学者对混沌同步的研究热情,特别是耦合系统的混沌同步在激光动力学、电子电路、化学和生物系统中得到了广泛深入的研究,混沌同步在保密通信、非线性系统性能优化、大脑行为建模以及模式识别等领域有着极为重要的应用<sup>[6]</sup>。

最近 Taherion<sup>[4]</sup>、Rosenblum<sup>[5]</sup>以及 Shahverdiev<sup>[6]</sup>等研究了带时延系统的滞同步问题,在电子、生理学及光通信等领域中均验证了滞同步现象的存在。一般地,设有如下单向耦合时延系统

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + m_1 F[x(t - \tau_1)] \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + m_2 F[y(t - \tau_1)] + m_3 F[x(t - \tau_2)] \quad (2)$$

其中  $m_1, m_2$  和  $m_3$  均为常数,满足  $m_1 = m_2 + m_3, a > 0$ 。式(1)为驱动系统,式(2)为响应系统。若对于  $\tau_2 > \tau_1$ ,存在稳定流形  $y(t) = x[t - (\tau_2 - \tau_1)]$ ,则称系统(1)与系统(2)达到滞同步。

我们曾在文[7]中研究了一个带时延的神经元系统的耦合同步问题,本文进一步研究该系统的滞同步问题。首先针对文[8]中的时延神经元方程,给出了单向耦合的时延神经元系统模型的充分条件,计算机数值仿真实验的结果验证了结

论的正确性。

## 2 单向耦合时延神经元系统模型

研究如下带时延的单个神经元方程<sup>[8]</sup>:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + af[x(t) - bx(t - \tau) + c], t > 0 \quad (3)$$

其中  $\tau$  为时延,  $a$  和  $b$  为常数,  $f(x)$  取如下函数<sup>[8]</sup>

$$f(x) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i [\tanh(x + k_i) - \tanh(x - k_i)] \quad (4)$$

其中  $\alpha_i$  和  $k_i$  为常数,分别取值  $\alpha_1 = 2, k_1 = 1, \alpha_2 = -1.5$  和  $k_2 = 4/3$ 。

此时方程的混沌特性如如图1所示。我们注意到,图1(a)实际上是稳定的周期解,固定  $a$ ,增大  $b$ ,系统的解不断发生分叉,并表现出混沌特性,如图1(c)和(d)所示。下面利用方程(3)建立一个单向耦合的时延神经元系统模型(不妨取  $c = 0$ )。

$$\frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a_1 f[x(t) - bx(t - \tau_1)] \quad (5)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a_2 f[y(t) - by(t - \tau_1)] + a_3 f[x(t - \tau_1) - bx(t - \tau_2)] \quad (6)$$

其中  $a_1$  和  $a_2$  为反馈系数,  $a_3$  为耦合系数,  $\tau_2 > \tau_1$ 。

<sup>\*</sup> 基金项目:国家自然科学基金(60271019);教育部博士点专项基金(20020611007);重庆市科委应用基础研究项目基金(7370);重庆工业高等专科学校科研基金。彭军 副教授,博士,研究方向为网络安全,混沌保密通信。张伟 副教授,博士,研究方向为网络安全,远程教育。廖晓峰 教授,博士后,博士生导师,研究方向为神经网络,信号处理,混沌保密通信。

### 3 滞同步理论研究

如果存在稳定流形  $y(t) = x[t - (\tau_2 - \tau_1)]$ , 则称系统(5)与系统(6)达到滞同步。为此考察差分  $\Delta = x[t - (\tau_2 - t_1)] - y(t)$ , 且设  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2$ 。如果  $a_1 = a_2 + a_3$ , 则有

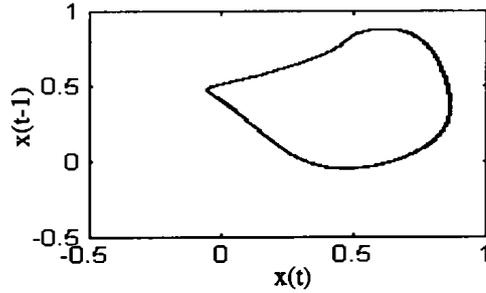
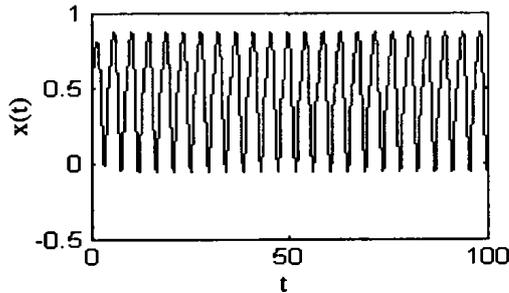
$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= -\Delta + a_2 \{f[x(t-1) - bx(t-2)] - f[y(t) - by(t-1)]\} \\ &= -\Delta + a_2 f'(\xi)(\Delta - b\Delta_1) \\ &= -[1 - a_2 f'(\xi)]\Delta - a_2 b f'(\xi)\Delta_1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\Delta_1$  表示  $\Delta(t-1)$ ,  $\xi$  为介于  $x(t-1) - bx(t-2)$  和  $y(t) - by(t-1)$  之间的一个数。

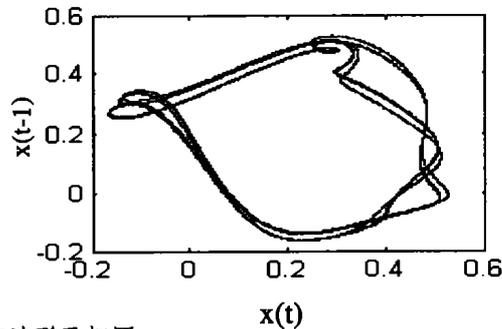
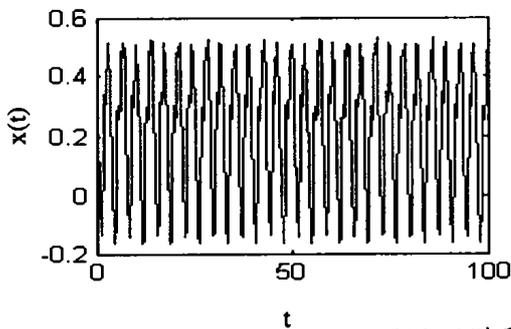
显然  $\Delta = 0$  为式(7)的一个平凡解, 若该解稳定, 则系统(5)与系统(6)就可以实现稳定的滞同步。为此研究如下形式方程

$$\frac{d\Delta}{dt} = -r(t)\Delta + s(t)\Delta, \quad (8)$$

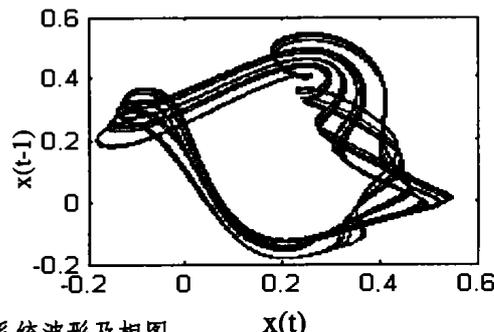
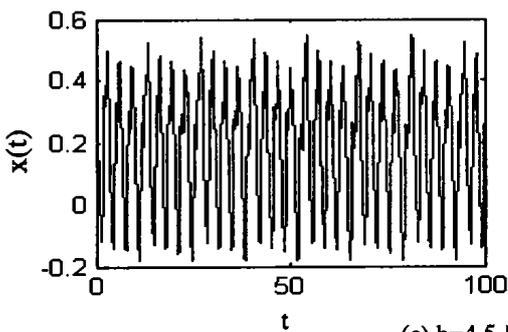
的原点稳定性, 我们利用 Krasovskii-Lyapunov 稳定性理论来研究。



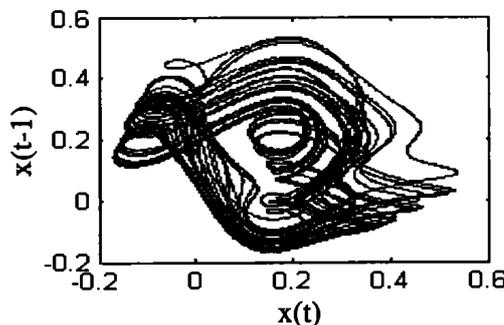
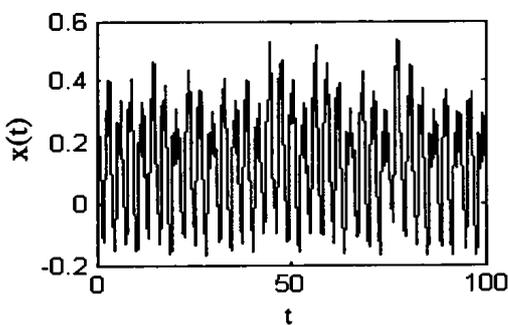
(a)  $b=2$  时系统波形及相图



(b)  $b=4$  时系统波形及相图



(c)  $b=4.5$  时系统波形及相图



(d)  $b=6$  时系统波形及相图

图1 初值为0.5,  $a=3$ ,  $b$  取不同值时, 系统的波形及相图

取正定可微函数

$$V(t) = \frac{1}{2}\Delta^2 + \mu \int_t^{\infty} \Delta^2(t+\theta) d\theta, \mu > 0 \quad (9)$$

对  $V(t)$  求导数得

$$\frac{dV(t)}{dt} = -[\sqrt{\mu} \Delta - \frac{s(t)}{2\sqrt{\mu}} \Delta]^2 + \Delta^2 [\frac{s^2(t)}{4\mu} - r(t) + \mu] \quad (10)$$

于是当  $r(t) > |s(t)|$  时,  $dV(t)/dt$  正定, 式(8)的原点渐近稳

定。

于是我们有如下定理：

**定理** 当  $b=6, 0 < a_2 < 0.278$  时, 系统(5)与系统(6)存在稳定的滞同步。

证明: 由上面的推导我们知道, 当  $r(t) > |s(t)|$  时, 式(8)的原点渐近稳定。对应式(7),

$$r(t) = 1 - a_2 f'(\xi), s(t) = -a_2 b f'(\xi) \quad (11)$$

由  $r(t) > |s(t)|$ , 得到

$$1 - a_2 f'(\xi) - |a_2 b f'(\xi)| > 0 \quad (12)$$

若  $a_2 > 0, b > 0$ , 则

$$a_2 < \frac{1}{f'(\xi) + b|f'(\xi)|} \quad (13)$$

而由式(4)

$$f'(x) = \sum_{i=1}^2 a_i [\tanh^2(x - k_i) - \tanh^2(x + k_i)] \quad (14)$$

不妨设

$$g(x, b) = \frac{1}{f'(x) + b|f'(x)|} \quad (15)$$

经数值计算, 函数  $g(x, b)$  存在最小值 0.2185。因此当  $b=6, 0 < a_2 < 0.2185$  时, 有  $r(t) > |s(t)|$  成立, 从而式(8)的原点渐近稳定, 此时系统(5)与系统(6)达到滞同步。

该定理提供了判定系统存在滞同步的一个充分条件。对于区间  $1.5 \leq b \leq 15$ , 由数值计算还可以得到函数  $g(x, b)$  关于参数  $b$  的最小值曲线, 如图2所示, 从而也就得到参数  $a_2$  的取值范围。

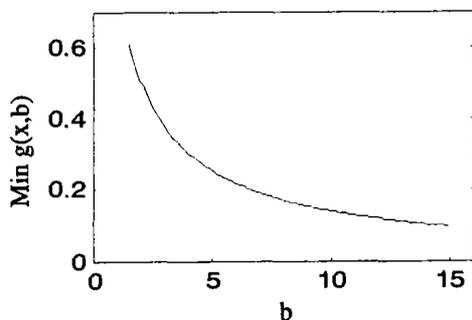


图2 函数  $g(x, b)$  关于参数  $b$  的最小值曲线

#### 4 滞同步数值实验

针对在第3节中得到的滞同步定理, 我们对其进行数值实验验证。采用四阶 Runge-Kutta 数值积分法来求解方程。参数  $a_1 = 3, b = 6$ , 此时系统(5)处于混沌状态。参数  $a_2 = 0.1 < 0.2185, a_3 = a_1 - a_2 = 2.9$ 。系统(5)的初值取为  $x_0 = -0.1$ , 系统(6)的初值取为  $y_0 = 0.3$ , 对两个系统都运行了10000步(积分步长为0.005), 对应的状态曲线如图3和图4所示, 而图5为误

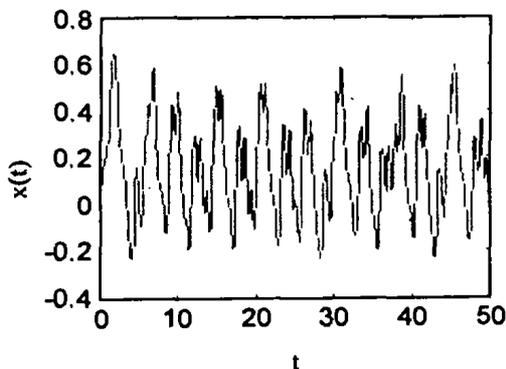


图3 系统(5)状态曲线  $x(t)$

差  $e = y(t) - x(t-1)$  的曲线图。从图5可看出, 在经过很短的

时间后, 误差衰减到零, 也就是说系统(5)和(6)之间存在稳定的流形  $y(t) = x(t-1)$ , 实现了滞同步。实验结果表明, 本文给出的滞同步定理是正确的。

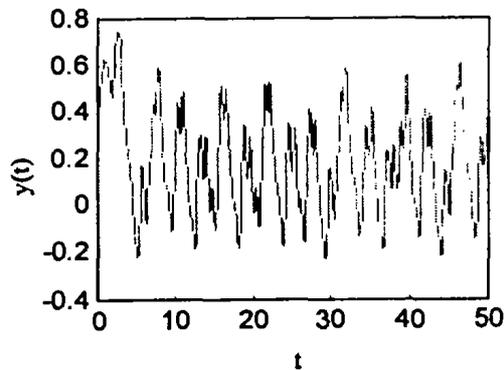


图4 系统(6)状态曲线  $y(t)$

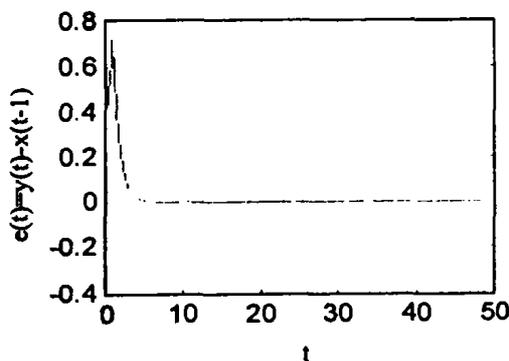


图5 误差曲线  $e(t) = y(t) - x(t-1)$

**结论** 本文研究了一个单向耦合的混沌时延神经系统的滞同步问题, 分析了同步的渐近稳定性, 并给出了判定滞同步的一个充分条件。数值实验的结果证实了结论的正确性, 只要系统参数在指定范围内取值, 并且驱动系统和响应系统可以取不同的初值, 两个系统都可以实现满意的滞同步。本文进一步的工作可研究利用该模型的滞同步实现信息的保密通信, 我们将另文报道。

#### 参考文献

- 1 Pecora M, Carroll L. Synchronization in chaotic systems. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821~823
- 2 Pecora M, Carroll L. Driving systems with chaotic signals. Phys. Rev. A, 1991, 44(4): 2374~2383
- 3 Carroll L, Pecora M. Synchronizing chaotic circuits. IEEE Trans. on CAS, 1991, 38(4): 453~456
- 4 Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 4193~4196
- 5 Taherion S, Lai Y C. Experimental observation of lag synchronization in coupled chaotic systems. Int. J. Bifurcation and chaos, 2000, 10: 2587~2594
- 6 Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A. Lag synchronization in time-delayed systems. Phys. Lett. A, 2002, 292(6): 320~324
- 7 彭军, 廖晓峰, 吴中福. 一个延时混沌神经系统的耦合同步. 电子与信息学报, 2003, 25(1): 123~127
- 8 Liao X F, Wong K W, Leung C S, Wu Z F. Hopf bifurcation and chaos in a single delayed neuron equation with non-monotonic activation function. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12(8): 1535~1547