直觉模糊逻辑的语义算子研究*)

雷英杰[1,2] 王宝树[1]
(西安电子科技大学计算机学院 西安 710071)[1] (空军工程大学计算机工程系 陕西三原 713800)[2]

摘 要 首先引用 Atanassov 直觉模糊集的基本概念和运算。在阐明直觉模糊集的集中、扩张、归一化算子之后，新定义了强化算子。通过考察 Atanassov 直觉模糊集与 Zadeh 模糊集之间的关系，给出了直觉模糊语言、结构化直觉模糊语言和直觉模糊语义的数学描述，重点对基于直觉模糊集和直觉模糊关系的模糊语言的语义算子，如语气算子、模糊化算子、判定化算子及连接与否定算子等进行了研究，并举例阐明其应用，使直觉模糊逻辑的语义算子得到进一步的拓广。

关键词 模糊集合，直觉模糊集合，模糊关系，语义算子，直觉模糊逻辑

On the Semantic Operators for Intuitionistic Fuzzy Logic

LEI Ying-Jie[1,2] WANG Bao-Shu[1]
(School of Computer Science and Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)[1]
(Department of Computer Engineering, Air Force Engineering University, Sanyuan Shanxi 713800)[2]

Abstract The fundamental notions and operations on Atanassov Intuitionistic Fuzzy Sets are first introduced. With the operators of Concentration, Dilation and Normalization described, an operator of Intensification is proposed. By observing and studying on the relationship between Atanassov IFSs and Zadeh Fuzzy Sets theories, a mathematic description of Intuitionistic Fuzzy Language and Structured IFL and IF semantics is exposed with the emphasis on investigating semantic operators of mood, fuzzication, determinant, joint and negation over vague linguistics based on IFSs and intuitionistic fuzzy relations, and their applications are illustrated with examples, which develops more semantic operators on the intuitionistic fuzzy logic as an extension.

Keywords Fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy relations, Semantic operators, Fuzzy logic

Zadeh 的模糊集理论是对经典集合的有效扩充[1]，在处理不精确、不确定性知识方面，形成了较完整的理论、技术与方法，在诸如模糊关系运算、模糊逻辑推理、模糊决策、模糊分类、模糊模式识别、模糊控制、模糊优化等研究领域，已渐趋成熟。Atanassov 提出的直觉模糊集合(Intuitionistic Fuzzy Sets)[2~5]，是对 Zadeh 模糊集理论最有影响的一种扩充和发展。直觉模糊集增加了一个新的属性参数——非隶属度函数，能够更加细腻地描述和刻画客观世界的模糊性本质，因而引起众多学者的关注。本文在考察了 Atanassov 直觉模糊集(IFS)与 Zadeh 模糊集之间关系的基础上，给出一组基于直觉模糊集和直觉模糊关系的模糊语言的语义算子，从而使直觉模糊逻辑的语义算子得到进一步的拓广。

1 引言

Atanassov 对直觉模糊集给出如下定义。

定义 1(直觉模糊集[2]) 设 X 是一个给定论域，则 X 上的一个直觉模糊集 A 为：

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\gamma_A(x)\rangle \mid x\in X\}$$

其中 $\mu_A(x): X\to[0,1]$ 和 $\gamma_A(x): X\to[0,1]$ 分别代表 A 的隶属函数 $\mu_A(A)$ 和非隶属函数 $\gamma_A(x)$，且对于 A 上的所有 $x\in X$，$0\leqslant\mu_A(x)+\gamma_A(x)\leqslant1$ 成立。

直觉模糊集 A 可以简记作 $A=\langle x,\mu_A,\gamma_A\rangle$。显然，每一个一般模糊子集对应于下列直觉模糊子集 $A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$。

对于 X 中的每一个直觉模糊子集，我们称 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\gamma_A(x)$ 为 A 中 x 的直觉指数(Intuitionistic Index)，它是 x 对 A 的犹豫程度(Hesitancy degree)的一种测度。显然，对于每一个 $x\in X$，$0\leqslant\pi_A(x)\leqslant1$。对于 X 中的每一个一般模糊子集 A，$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-[1-\mu_A(x)]=0, \forall x\in X$。

定义 2(直觉模糊集运算[2~4]) 设 A 和 B 是给定论域 X 上的直觉模糊子集，则

(1) $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in X, [\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)\geqslant\gamma_B(x)]$

(2) $A\subset B\Leftrightarrow\forall x\in X, [\mu_A(x)<\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)>\gamma_B(x)]$

(3) $A=B\Leftrightarrow\forall x\in X, [\mu_A(x)=\mu_B(x)\wedge\gamma_A(x)=\gamma_B(x)]$

(4) $A^c=\{\langle x,\gamma_A(x),\mu_A(x)\rangle \mid x\in X\}$

(5) $A\cap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

(6) $A\cup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

(7) $A+B=\{\langle x,\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\gamma_A(x)\cdot\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

(8) $A\cdot B=\{\langle x,\mu_A(x)\cdot\mu_B(x),\gamma_A(x)+\gamma_B(x)-\gamma_A(x)\cdot\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

(9) $\Box A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle \mid \forall x\in X\}$

*)基金项目：国家教育部高等学校骨干教师资助计划项目(GG-810-90039-1003)，国防科技预研基金(00J6.6.1DZ0103)。雷英杰 博士，教授，研究方向：智能信息处理与智能系统、智能决策等。王宝树 教授，博士生导师，研究方向：智能信息处理与模式识别、智能控制等。

(10) $\Diamond A=\{\langle x,1-\gamma_A(x),\gamma_A(x)\rangle \mid \forall\ x\in X\}$

2 直觉模糊集操作算子

在基于直觉模糊集理论的知识处理中，需要定义的直觉模糊集操作算子有集中算子、扩张算子、标准化算子、强化算子[5]。同基于 Zadeh 模糊集理论的知识处理技术一样，集中算子被粗略地认为类似于语言上的 Very，扩张算子被认为大致类似于语言上的 More or Less。

定义 3(集中算子) 设 A 是给定论域 U 上的直觉模糊子集，则对 A 的集中(Concentration)运算记作 CON(A)，且由下式定义

$$\mathrm{CON}(A)=\{\langle x,\mu_{\mathrm{CON}(A)}(x),\gamma_{\mathrm{CON}(A)}(x)\rangle \mid x\in U\}$$

式中 $\mu_{\mathrm{CON}(A)}(x)=[\mu_A(x)]^2,\gamma_{\mathrm{CON}(A)}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^2$。

定义 4(扩张算子) 设 A 是给定论域 U 上的直觉模糊子集，则对 A 的扩张(Dilation)运算记作 DIL(A)，且由下式定义

$$\mathrm{DIL}(A)=\{\langle x,\mu_{\mathrm{DIL}(A)},\gamma_{\mathrm{DIL}(A)}(x)\rangle \mid x\in U\}$$

式中 $\mu_{\mathrm{DIL}(A)}(x)=[\mu_A(x)]^{1/2},\gamma_{\mathrm{DIL}(A)}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^{1/2}$。

命题 1 设 A 是给定论域 U 上的直觉模糊子集，则

(a) $\mathrm{CON}(A)\subseteq A\subseteq \mathrm{DIL}(A)$

(b) 若 $\pi_A(x)=0$，则 $\pi_{\mathrm{CON}(A)}(x)=0$

(c) 若 $\pi_A(x)=0$，则 $\pi_{\mathrm{DIK}(A)}(x)=0$

(d) $\Box\mathrm{CON}(A)=\mathrm{CON}(\Box A)$

(e) $\Diamond\mathrm{CON}(A)=\mathrm{CON}(\Diamond A)$

(f) $\Box\mathrm{DIL}(A)=\mathrm{DIL}(\Box A)$

(g) $\Diamond\mathrm{DIL}(A)=\mathrm{DIL}(\Diamond A)$

定义 5(标准化算子) 设 A 是给定论域 U 上的直觉模糊子集，则对 A 的标准化(Normalization)运算记作 NORM(A)，且由下式定义

$$\mathrm{NORM}(A)=\{\langle x,\mu_{\mathrm{NORM}(A)}(x),\gamma_{\mathrm{NORM}(A)}(x)\rangle \mid x\in U\}$$

式中 $\mu_{\mathrm{NORM}(A)}(x)=\dfrac{\mu_A(x)}{\mathrm{Sup}(\mu_A(x))}$，

$$\gamma_{\mathrm{NORM}(A)}(x)=\frac{\gamma_A(x)-\mathrm{Inf}(\gamma_A(x))}{1-\mathrm{Inf}(\gamma_A(x))}。$$

这里 $\mathrm{Sup}(\mu_A(x))$ 为 $\mu_A(x)$ 的上确界，给出 $\mu_A(x)$ 的最大值。如果 $\max\ \mu_A(x)<1$，则所有的隶属度都会增加。如果 $\max\ \mu_A(x)=1$，则隶属度不变。$\mathrm{Inf}(\gamma_A(x))$ 为 $\gamma_A(x)$ 的下确界，给出 $\gamma_A(x)$ 的最小值。如果 $\min\ \gamma_A(x)>0$，则所有的非隶属度都会增加。如果 $\min\ \gamma_A(x)=0$，则非隶属度不变。标准化算子也叫作归一化算子，其作用是将隶属度函数和非隶属度函数归一化。

命题 2 设 A 是给定论域 U 上的直觉模糊子集，则

(a) 若 $\pi_A(x)=0$，则 $\pi_{\mathrm{NORM}(A)}(x)=0$

(b) $\Box\mathrm{NORM}(A)=\mathrm{NORM}(\Box A)$

(c) $\Diamond\mathrm{NORM}(A)=\mathrm{NORM}(\Diamond A)$

定义 6(强化算子) 设 A 是给定论域 U 上的直觉模糊子集，则对 A 的强化(Intensification)运算记作 INT(A)，且由下式定义

$$\mathrm{INT}(A)=\{\langle x,\mu_{\mathrm{INT}(A)}(x),\gamma_{\mathrm{INT}(A)}(x)\rangle \mid x\in U\}$$

式中 $\mu_{\mathrm{INT}(A)}(x)=\begin{cases}2[\mu_A(x)]^2 & 0\leqslant\mu_A(x)\leqslant 0.5\\ 1-2[1-\mu_A(x)]^2 & 0.5<\mu_A(x)\leqslant 1\end{cases}$

$$\gamma_{\mathrm{INT}(A)}(x)=\begin{cases}1-2[1-\gamma_A(x)]^2 & 0\leqslant\gamma_A(x)\leqslant 0.5\\ 2[\gamma_A(x)]^2 & 0.5<\gamma_A(x)\leqslant 1\end{cases}$$

强化算子的作用类似于增加图像的对比度。强化运算增大了 $\mu_A(x)$ 和 $\gamma_A(x)$ 那些交叉点以内的隶属度，减小了那些交叉点以外的隶属度。在电子学上，这两个交叉点恰好定义了信号的带宽，强化运算放大了带宽内的信号，减小了带宽外的“噪声”。因此，强化运算提高了交叉点内外的隶属度和非隶属度的对比。

3 直觉模糊语言语义算子

语言的字符串与其意义之间的对应关系称为语义。语义的一个重要问题是要规定一组语义规则，以它作为算法，通过各原子词间的已知涵义，计算出合成词的涵义。1971 年，Zadeh 提出模糊语义定量理论，之后又定义了“语言变量”的概念，使得一些以实数集为论域的词汇及一些具有程度性质的词汇有了定量的语义描述。类似地，在这里我们给出基于直觉模糊语义的“语言变量”的一组算子的数学描述，将处理范围进一步从 Zadeh 模糊集扩大到直觉模糊集。

一种直觉模糊语言 IFL 定义为一个四元组：

$$IFL=(U,T,E,N)$$

其中：U 是语言主体的全体对象，即论域；T 是语言成分的直觉模糊集合；E 是构成语言成分的字符集中的字符所构成的所有字符序列的集合，故 T 是 E 上的直觉模糊子集；N 是 E 对 U 的直觉模糊关系。

一种结构化直觉模糊语言 $SIFL$ 定义为一个五元组：

$$SIFL=(U,T,E,S_T,S_N)$$

其中：U 是论域；T 是语言成分的直觉模糊集合；E 是对 T 的嵌入集合；S_T 是 $SIFL$ 的语法规则所组成的集合，它为计算 T 的隶属度 μ_T 和非隶属度 γ_T 提供算法；S_N 是 $SIFL$ 的语义规则所组成的集合，它为计算命名关系 N 的隶属度 μ_N 和非隶属度 γ_N 提供算法。

下面给出直觉模糊语义的数学描述。所谓 T 中术语 x 的语义是 U 上的直觉模糊子集 $M(x)$，这时 U 中的元素 y 隶属于 $M(x)$ 的隶属度和非隶属度由下式给出

$$\mu_{M(x)}(y)=\mu_N(x,y),\gamma_{M(x)}(y)=\gamma_N(x,y)$$

例 1 设论域 $U=[0,100]$ 是年龄集合，T 为术语年纪，$E=\{$年轻，年老，中年$\}$，N 为 E 到 U 上的直觉模糊命名关系，则直觉模糊子集 M(年轻)可定义如下：

$$M(\text{年轻})=\{\langle y,\mu_{\text{年轻}}(y),\gamma_{\text{年轻}}(y)\rangle \mid y\in U\}$$

且有 $\mu_{M(\text{年轻})}(y)=\mu_N(\text{年轻},y)=\mu_{\text{年轻}}(y)$ 和 $\gamma_{M(\text{年轻})}(y)=\gamma_N(\text{年轻},y)=\gamma_{\text{年轻}}(y)$，

其中 $\mu_{\text{年轻}}(y)=\begin{cases}1 & y<25\\ \left[1+\left(\dfrac{y-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & y\geqslant 25\end{cases}$，

$$\gamma_{\text{年轻}(y)}=\begin{cases}0 & y<28\\ 1-\left[1+\left(\dfrac{y-28}{5}\right)^2\right]^{-1} & y\geqslant 28\end{cases}$$

同样可以求出老年的语义 M(老年)和中年的语义 M(中年)。

3.1 语气算子 IH_λ

设：$IH_\lambda: IFS(U)\rightarrow IFS(U)$

$$A\mapsto IH_\lambda A$$

$$\mu_{IH_\lambda A}(x)=[\mu_A(x)]^\lambda,\gamma_{IH_\lambda A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^\lambda,x\in U$$

称 IH_λ 为直觉模糊集 $IFS(U)$ 的语气算子，当 $\lambda>1$ 时 IH_λ 为集中化类算子，当 $\lambda<1$ 时 IH_λ 为扩张化类算子，特别地有：

$\lambda=4$，$\mu_{\text{极}A}(x)=\mu_{IH_4 A}(x)=[\mu_A(x)]^4$，

$\gamma_{\text{极}A}(x)=\gamma_{IH_4 A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^4$

$\lambda=2$，$\mu_{\text{很}A}(x)=\mu_{IH_2 A}(x)=[\mu_A(x)]^2$，

$\gamma_{\text{很}A}(x)=\gamma_{IH_2 A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^2$

$\lambda=1.25, \mu_{\text{相当}A}(x)=\mu_{IH_{1.25}A}(x)=[\mu_A(x)]^{1.25}$,

$\gamma_{\text{相当}A}(x)=\gamma_{IH_{1.25}A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^{1.25}$

$\lambda=0.75, \mu_{\text{比较}A}(x)=\mu_{IH_{0.75}A}(x)=[\mu_A(x)]^{0.75}$,

$\gamma_{\text{比较}A}(x)=\gamma_{IH_{0.75}A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^{0.75}$

$\lambda=0.5, \mu_{\text{略}A}(x)=\mu_{IH_{0.5}A}(x)=[\mu_A(x)]^{0.5}$,

$\gamma_{\text{略}A}(x)=\gamma_{IH_{0.5}A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^{0.5}$

$\lambda=0.25, \mu_{\text{微}A}(x)=\mu_{IH_{0.25}A}(x)=[\mu_A(x)]^{0.25}$,

$\gamma_{\text{微}A}(x)=\gamma_{IH_{0.25}A}(x)=1-[1-\gamma_A(x)]^{0.25}$

“略 A”和“微 A”也可以说成是“有点 A”和“略有点 A”。

由语气算子和适当的原子词可以组合成许多合成词。

例 2 语言变量“年轻”的语义已在例 1 中表示，利用上述直觉模糊语气算子可以求出“很年轻”、“有点年轻”等的语义：

$\mu_{\text{很年轻}}(x)=\mu_{IH_2\text{年轻}}(x)=[\mu_{\text{年轻}}(x)]^2$,

$\gamma_{\text{很年轻}}(x)=\gamma_{IH_2\text{年轻}}(x)=1-[1-\gamma_{\text{年轻}}(x)]^2$

$\mu_{\text{有点年轻}}(x)=\mu_{IH_{0.5}\text{年轻}}(x)=[\mu_{\text{年轻}}(x)]^{0.5}$,

$\gamma_{\text{有点年轻}}(x)=\gamma_{IH_{0.5}\text{年轻}}(x)=1-[1-\gamma_{\text{年轻}}(x)]^{0.5}$

3.2 模糊化算子

设：$IF: IFS(U)\to IFS(U)$

$A \mapsto IFA$

$\mu_{IFA}(y)=\bigvee_{t\in U}(\mu_A(t)\wedge\mu_E(t,y))$,

$\gamma_{IFA}(y)=\bigwedge_{t\in U}(\gamma_A(t)\vee\gamma_E(t,y)), y\in U$

式中 E 是 U 上的直觉模糊相似关系，当 U 为实数集 R 时，常取：

$$\mu_E(t,y)=\begin{cases} e^{-(t-y)^2} & |t-y|<\delta \\ 0 & |t-y|\geqslant\delta \end{cases},$$

$$\gamma_E(t,y)=\begin{cases} 0 & |t-y|<\delta \\ 1-e^{-(t-y)^2} & |t-y|\geqslant\delta \end{cases}$$

其中 δ 为参数，称 IF 为直觉模糊集 $IFS(U)$ 的模糊化算子。直觉模糊化算子 IF 对应于自然语言“大概”、“近似”、“似乎”、“大约”等修饰词，使词义模糊化。

特别当 A 为经典集时，经直觉模糊化算子 IF 作用后得到一个直觉模糊集 $IF\ A$。

例 3 数字 6 的语义对应于一个经典集：

$$\mu_{M(6)}(y)=\begin{cases} 1 & y=6 \\ 0 & y\neq 6 \end{cases}$$

于是：

$$\mu_{M(\text{大约}6)}(y)=\mu_{M(IF6)}(y)=\bigvee_{t\in R}(\mu_{M(6)}(t)\wedge\mu_E(t,y)) =\begin{cases} \mu_E(6,y)=e^{-(6-y)^2} & |y-6|<\delta \\ 0 & |y-6|\geqslant\delta \end{cases}$$

$$\gamma_{M(\text{大约}6)}(6)=\gamma_{M(IF6)}(y)=\bigwedge_{t\in R}(\gamma_{M(6)}(t)\vee\gamma_E(t,y)) =\begin{cases} 0 & |y-6|<\delta \\ \mu_E(6,y)=1-e^{-(6-y)^2} & |y-6|\geqslant\delta \end{cases}$$

3.3 判定化算子 IP_α

设：$IP_\alpha: IFS(U)\to IFS(U)$

$A \mapsto IP_\alpha A$

$\mu_{IP_\alpha}A(y)=d_\alpha(\mu_A(y)), \gamma_{IP_\alpha}A(y)=d_\alpha(1-\gamma_A(y)), y\in U$

这里 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 且 d_α 是定义在[0,1]上如下形式的函数：

$$d_\alpha(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x\leqslant\alpha \\ \frac{1}{2} & \alpha<x\leqslant 1-\alpha \\ 1 & 1-\alpha<x\leqslant 1 \end{cases}$$

则称 IP_α 为直觉模糊判定化算子。这里 d_α 的意义在于，它给出了一个判定标准：当 $\mu_A(y)\leqslant\alpha\wedge\gamma_A(y)>1-\alpha$ 时，判定 y 不偏向于 A；当 $\mu_A(y)>1-\alpha\wedge\gamma_A(y)\leqslant\alpha$ 时，判定 y 偏向于 A；当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$IP_{1/2}$ 称为“偏向”，此时：

$$d_{\frac{1}{2}}(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}<x\leqslant 1 \end{cases}$$

例 4 前面的例 1 中定义了“年轻”的语义，则合成词“偏向年轻”即 $IP_{1/2}$“年轻”的语义为：

$$\mu_{M(\text{偏向年轻})}(y)=\begin{cases} 1 & y\leqslant 30 \\ 0 & y>30 \end{cases}$$

$$\gamma_{M(\text{偏向年轻})}(y)=\begin{cases} 0 & y\leqslant 33 \\ 1 & y>33 \end{cases}$$

3.3 连接与否定算子

连接词为“and”和“or”，由它们连接两个词而组合成一个新的合成词，分别表示求交运算“∩”和求并运算“∪”。“A and B” 和“A or B”的语义有下两式求出：

A and $B=A\wedge B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\gamma_A(x)\vee\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in U\}$

A or $B=A\vee B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\gamma_A(x)\wedge\gamma_B(x)\rangle \mid \forall x\in U\}$

否定词为“not”，not A 为直觉模糊子集 A 的求补运算，根据定义 2(4)，

not $A=\overline{A}=A^c=\{\langle x,\gamma_A(x),\mu_A(x)\rangle \mid x\in U\}$

结论 Zadeh 模糊集理论及应用，特别是在知识处理中的应用虽然也在进一步发展但已趋成熟[7]，而 Atanassov 直觉模糊集理论用于知识处理领域，尚正在发展之中，且其数学描述较之 Zadeh 模糊集理论更加符合客观世界模糊对象的本质，因而形成新的研究热点。从已经发表的文献来看，国内仅少数学者对直觉模糊开展研究，且多局限于纯数学范畴，在知识处理领域的研究尚处于起步阶段。

本文给出一组基于直觉模糊集和直觉模糊关系的模糊语言的语义算子，并举例阐明其应用，使直觉模糊逻辑的语义算子得到进一步的拓广，深化了直觉模糊集理论在知识处理领域中的应用研究。

参考文献

1 Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8 (3): 338~353

2 Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1): 87~96

3 Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33 (1): 37~46

4 Atanassov K. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61 (1): 137~142

5 De S K, Biswas R, Roy A R. Some operations on intuitionistic fuzzy sets. fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114 (3): 477~484

6 Atanassov K T, Janusz K, Eulalia S, et al. On Separability of Intuitionistic Fuzzy Sets. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2003, 2715: 285~292

7 何新贵. 模糊知识处理的理论与技术(第 2 版)[M]. 北京：国防工业出版社，1999

8 Vaughan P. Chu spaces as a semantic bridge between linear logic and mathematics. Theoretical Computer Science, 2003, 294 (3): 439~471

9 Surabhi S. Fuzzy mathematical programming applied to multi-level programming problems. Computers and Operations Research, 2003, 30 (9): 1259~1268

10 李晓萍，王贵君. 直觉模糊群与它的同态像. 模糊系统与数学，2000, 14 (1): 45~50