

# 基于证据理论的三支决策模型

陈玉金 李续武 邢瑞康

(空军工程大学防空反导学院 西安 710051)

**摘 要** 三支决策模型和证据理论在概念、信息处理方式上存在着互通互补之处。首先,将证据理论基本概念引入到三支决策中,分析其延迟信任区间可能包含的可变语义,分别构建了基于证据理论的确定和可变三支决策模型。然后,通过调节信任系数取值,结合贝叶斯风险分析形成了乐观策略、悲观策略及其相应的决策规则,以满足特定语义环境下的应用需求。最后,通过对防空作战态势评估的风险分析说明了模型的具体应用过程。

**关键词** 三支决策模型,决策粗糙集,证据理论,贝叶斯风险决策,信任函数

中图分类号 TP181 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.06.043

## Three-way Decisions Model Based on Evidence Theory

CHEN Yu-jin LI Xu-wu XING Rui-kang

(Air and Missile Defense College, Air-force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract** There are similarities in concept and method of information processing between three-way decisions model and evidence theory. First, the evidence theory was introduced into the three-way decisions model and its trust delay interval including variable semantics was analyzed. Second, the certainty three-way decisions model based on evidence theory and the deformable one were established. By adjusting the coefficient of trust values, the strategies based on optimism and pessimism semantics were described and the decision rules were derived by combining with the Bayes risk decision, which are able to meet the application requirements of specific cases in reality. Finally, an example of situation evaluation was given to illuminate applications of the proposed model.

**Keywords** Three-way decision model, Decision-theoretic rough sets, Evidence theory, Bayes risk decision, Belief function

## 1 引言

三支决策模型<sup>[1-2]</sup>是由决策粗糙集模型<sup>[3]</sup>发展而来的,是一种包含风险语义的决策模型。为解决信息系统在不完备、不精确时难以简单接受或拒绝的问题, YAO 等<sup>[4-5]</sup>在传统二支决策(接受/拒绝)的基础上,引入了延迟决策这一概念。延迟决策的引入不仅使其成为了在信息难以决定接受或者拒绝时可以选择的第三种决策结果,也更符合人们对事物的认知模式<sup>[1]</sup>。

近年来,三支决策在特定语义环境下的扩展模型已成为国内外学者研究的重点。文献[6]联系三支决策的基本要素,系统地阐述了三支决策空间和三支决策。为了拓展模糊语义环境下的风险决策,文献[7]、文献[8]和文献[9-10]分别将精确值代价函数替换为三角模糊数、区间值、直觉模糊集等模糊概念,并建立了相应的基于模糊语义的三支决策模型。文献[11]以隶属描述和非隶属描述作为状态空间,建立了直

觉模糊集的两描述、三描述、一般描述三支决策模型。文献[12]引入概率图,通过教学评估实例阐述了三支决策模型的实际应用过程。文献[13]引入效用函数,建立了基于效用的三支决策,将决策者的主观能动性(风险态度)量化到模型中。

虽然上述探索对三支决策的发展起到了一定的推动作用,但在表达人们对风险认知的态度时,模型相对僵化固定,不够细腻灵活。因此,建立一种能够真实、细腻地反映决策者风险态度的模型是十分必要的。证据理论<sup>[14-15]</sup>是一套能够细腻地将命题不确定性问题转化为集合不确定性问题的数学理论。文献[14]说明了证据理论和三支模型在分类相关概念(边界域和延迟信任区间)以及处理不确定性信息的方式上存在相似相通之处。文献[16]将代价函数替换为信任函数来建立三支决策模型,得到了良好的效果。可见,两者的结合可以在处理不确定、不完备信息时形成更符合人们自身风险态度的决策,使模型更符合特定的应用需求。基于此,本文将证据

到稿日期:2017-04-16 返修日期:2017-08-25 本文受国家自然科学基金(61503407)资助。

陈玉金(1992—),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理,E-mail:ivan@mail.dlut.edu.cn;李续武(1959—),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理等,E-mail: fbb19940103@163.com(通信作者);邢瑞康(1994—),男,硕士生,主要研究方向为计算机网络安全。

理论引入到经典三支决策模型中,建立了基于证据理论的三支决策模型,充分考虑了决策者面对风险损失时的情况,结合贝叶斯风险分析形成了包含相应语义的决策规则。最后通过实例验证了模型的有效性。

## 2 基本知识

### 2.1 经典三支决策模型

设信息系统为一个二元组  $\langle U, AT \rangle$ , 其中论域  $U$  是所有对象的有限非空集合,  $AT$  是所有属性的有限非空集合。根据贝叶斯风险决策过程, 构造状态空间  $\Theta = \{X, \sim X\}$  来表示对象  $x$  是否属于集合  $X$ , 构造决策动作集  $A = \{a_P, a_B, a_N\}$  来表示对一个对象  $x$  进行分类决策时采取的行动。  $a_P, a_B, a_N$  分别表示对象确定属于、可能属于、确定不属于集合  $X$  的行动。不同状态下对应的不同行动的代价函数如表 1 所列。

表 1 不同行动下的风险代价函数  
Table 1 Cost function in different actions

	$X$	$\sim X$
$a_P$	$\lambda_{PP}$	$\lambda_{PN}$
$a_B$	$\lambda_{BP}$	$\lambda_{BN}$
$a_N$	$\lambda_{NP}$	$\lambda_{NN}$

表 1 中, 当一个对象  $x$  属于集合  $X$  时, 采取  $a_P, a_B, a_N$  决策时所需的代价分别记为  $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$ ; 当一个对象  $x$  不属于集合  $X$  时, 采取  $a_P, a_B, a_N$  决策时所需的代价分别记为  $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$ 。  $P(X|[x])$  表示对象  $x$  所在的等价类属于集合  $X$  的条件概率。对于特定对象  $x$ , 采取一个决策行动时的期望代价  $R(a_i|[x])$  如下:

$$\begin{aligned}
 R(a_P|[x]) &= \lambda_{PP}P(X|[x]) + \lambda_{PN}(P(\sim X|[x])) \\
 R(a_B|[x]) &= \lambda_{BP}P(X|[x]) + \lambda_{BN}(P(\sim X|[x])) \\
 R(a_N|[x]) &= \lambda_{NP}P(X|[x]) + \lambda_{NN}(P(\sim X|[x]))
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

那么, 根据贝叶斯风险决策过程, 给出最小代价决策规则如下:

(P) 如果  $R(a_P|[x]) \leq R(a_B|[x])$  且  $R(a_P|[x]) \leq R(a_N|[x])$  成立, 那么  $x \in POS(X)$ 。

(B) 如果  $R(a_B|[x]) \leq R(a_P|[x])$  且  $R(a_B|[x]) \leq R(a_N|[x])$  成立, 那么  $x \in BND(X)$ 。

(N) 如果  $R(a_N|[x]) \leq R(a_P|[x])$  且  $R(a_N|[x]) \leq R(a_B|[x])$  成立, 那么  $x \in NEG(X)$ 。

考虑到  $P(X|[x]) + P(\sim X|[x]) = 1$  和  $\lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$ ,  $\lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$ , 将最小代价决策规则简化为:

(P) 如果  $P(X|[x]) \geq \alpha$  且  $P(X|[x]) \geq \gamma$  成立, 那么  $x \in POS(X)$ 。

(B) 如果  $P(X|[x]) \leq \alpha$  且  $P(X|[x]) \geq \beta$  成立, 那么  $x \in BND(X)$ 。

(N) 如果  $P(X|[x]) \leq \beta$  且  $P(X|[x]) \leq \gamma$  成立, 那么  $x \in NEG(X)$ 。

其中,  $\alpha = \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})}$ ,  $\beta = \frac{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{BN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{BP})}$ ,  $\gamma = \frac{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN})}{(\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})}$ 。

### 2.2 证据理论

设识别框架为一个有限的完备集合  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ , 其包含当前需要解决的问题的所有可能样本, 样本间两两互斥。识别框架  $\Theta$  的样本个数为  $n$ , 那么其相应幂集  $2^\Theta$  的元素个数为  $2^n$ , 表示识别框架下所有命题的集合。

定义 1 设识别框架  $\Theta$  中, 对于命题  $A \subseteq \Theta$ , 定义基本信任分配函数  $m(A)$  为一个  $2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  的映射, 且满足:

$$\begin{cases} m(\emptyset) = 0 \\ \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1 \end{cases}
 \tag{2}$$

其中,  $m(A)$  反映了对命题  $A \subseteq \Theta$  的支持度的大小, 其可以由决策者凭借经验给出, 也可以通过样本的实际构造得到。

定义 2 设识别框架  $\Theta$  中, 对于命题  $A \subseteq \Theta$ , 定义信任函数  $bel(A)$ , 似然函数  $pl(A)$  均为  $2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  的映射, 且满足:

$$\begin{aligned}
 bel(A) &= \sum_{B \subseteq A} m(B) \\
 pl(A) &= \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

其中,  $bel(A)$  反映了证据对命题  $A$  为真的信任程度,  $pl(A)$  反映了证据对命题  $A$  非假的信任程度, 显然有以下 3 点成立: 1)  $bel(\bar{A}) + pl(A) = 1$ ; 2)  $0 < bel(\bar{A}) + bel(A) \leq 1$ ; 3)  $bel(A) \leq pl(A)$ 。那么, 可以认为  $bel(A)$  和  $pl(A)$  分别为对  $A$  的信任程度的下限和上限, 而  $pl(A) - bel(A)$  表示对  $A$  的延迟信任程度, 如图 1 所示。

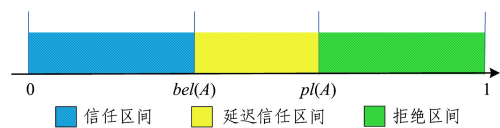


图 1 信息信任程度的不确定性表示  
Fig. 1 Uncertainty of information trust degree

## 3 基于证据理论的三支决策模型

参照经典三支决策模型, 构造状态空间  $\Theta = \{X, \sim X\}$  表示证据  $x$  是否信任命题  $X$ , 决策动作集  $A = \{a_P, a_B, a_N\}$  表示对一个证据  $x$  进行分类决策时采取的行动。  $a_P, a_B, a_N$  分别表示证据  $x$  信任、延迟信任、拒绝命题  $X$  的行动。基于此, 建立代价矩阵, 如表 2 所列。

表 2 不同行动下的代价函数  
Table 2 Cost function in different actions

	$X$	$\sim X$
$a_P$	$\hat{\lambda}_{PP}$	$\hat{\lambda}_{PN}$
$a_B$	$\hat{\lambda}_{BP}$	$\hat{\lambda}_{BN}$
$a_N$	$\hat{\lambda}_{NP}$	$\hat{\lambda}_{NN}$

表 2 中, 当一个证据  $x$  信任命题  $X$  时, 采取  $a_P, a_B, a_N$  决策时所需的代价分别记为  $\hat{\lambda}_{PP}, \hat{\lambda}_{BP}, \hat{\lambda}_{NP}$ ; 当一个证据  $x$  不信任命题  $X$  时, 采取  $a_P, a_B, a_N$  决策时所需的代价分别记为  $\hat{\lambda}_{PN}, \hat{\lambda}_{BN}, \hat{\lambda}_{NN}$ 。  $BEL(x, X, A)$  表示证据  $x$  在属性子集  $A$  下对命题  $X$  的信任程度。对于特定对象  $x$ , 采取一个决策行动时的信任支持度如下:

$$\begin{aligned} \hat{R}(a_P|[x]) &= \hat{\lambda}_{PP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{PN}BEL(x, \sim X, A) \\ \hat{R}(a_B|[x]) &= \hat{\lambda}_{BP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{BN}BEL(x, \sim X, A) \\ \hat{R}(a_N|[x]) &= \hat{\lambda}_{NP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{NN}BEL(x, \sim X, A) \end{aligned} \quad (4)$$

那么,根据贝叶斯风险决策过程,给出最小代价决策规则如下:

(P')如果  $\hat{R}(a_P|[x]) \leq \hat{R}(a_B|[x])$  且  $\hat{R}(a_P|[x]) \leq \hat{R}(a_N|[x])$  成立,那么  $x \in POS(X)$ ,即证据  $x$  信任命题  $X$ 。

(B')如果  $\hat{R}(a_B|[x]) \leq \hat{R}(a_P|[x])$  且  $\hat{R}(a_B|[x]) \leq \hat{R}(a_N|[x])$  成立,那么  $x \in BND(X)$ ,即证据  $x$  延迟信任命题  $X$ 。

(N')如果  $\hat{R}(a_N|[x]) \leq \hat{R}(a_P|[x])$  且  $\hat{R}(a_N|[x]) \leq \hat{R}(a_B|[x])$  成立,那么  $x \in NEG(X)$ ,即证据  $x$  拒绝命题  $X$ 。

客观上,证据理论在决策过程中存在延迟信任区间,这种延迟决策导致决策结果存在可变语义。现实情况中,某些特定应用需求需要明确的决策结果,不需要可变语义;而另一些应用需求需要可变语义的存在以提供多样化的结果,供决策者参考。

### 3.1 基于证据理论的确定的三支决策模型

令  $bel(x, X, A), pl(x, X, A)$  分别表示证据  $x$  在属性子集  $A$  下对命题  $X$  的信任函数和似然函数。当  $pl(x, X, A) - bel(x, X, A) = 0$  时,不存在延迟信任区间。基于此,建立基于证据理论的确定的三支决策模型。令  $I = \langle U, AT \rangle$  为一个信息系统,其中论域  $U$  是所有对象的有限非空集合,  $AT = C \cup \{d\}$  是所有属性的有限非空集合,其中  $C$  为条件属性集,  $d$  为决策属性。定义证据  $x$  对命题  $X$  的信任程度为:

$$BEL(x, X, A) = bel(x, X, A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (5)$$

其中,  $A \subseteq C$  表示满足定义的属性集合,  $m(B)$  表示证据  $x$  在属性子集  $B$  下的支持度。

显然,以下假设是成立的:1)  $BEL(x, X, A) + BEL(x, \sim X, A) = 1$ ; 2)  $\hat{\lambda}_{PP} \leq \hat{\lambda}_{BP} < \hat{\lambda}_{NP}, \hat{\lambda}_{NN} \leq \hat{\lambda}_{BN} < \hat{\lambda}_{PN}$ 。那么,最小代价决策规则(P')可以转化为:

$$\begin{aligned} \hat{R}(a_P|[x]) &\leq \hat{R}(a_B|[x]) \\ \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{PP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{PN}BEL(x, \sim X, A) &\leq \hat{\lambda}_{BP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{BN}BEL(x, \sim X, A) \\ \Leftrightarrow (\hat{\lambda}_{PP} - \hat{\lambda}_{BP} + \hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{PN})BEL(x, X, A) &\leq \hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{PN} \\ \Leftrightarrow BEL(x, X, A) &\geq \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN}) + (\hat{\lambda}_{BP} - \hat{\lambda}_{PP})} \\ \hat{R}(a_P|[x]) &\leq \hat{R}(a_N|[x]) \\ \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{PP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{PN}BEL(x, \sim X, A) &\leq \hat{\lambda}_{NP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{NN}BEL(x, \sim X, A) \\ \Leftrightarrow (\hat{\lambda}_{PP} - \hat{\lambda}_{NP} + \hat{\lambda}_{NN} - \hat{\lambda}_{PN})BEL(x, X, A) &\leq \hat{\lambda}_{NN} - \hat{\lambda}_{PN} \\ \Leftrightarrow BEL(x, X, A) &\geq \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{PP})} \end{aligned}$$

最小代价决策规则(B')和(N')也可以进行类似的简化,

最小代价决策规则转化如下:

(P<sub>1</sub>)如果  $BEL(x, X, A) \geq \alpha_1$  且  $BEL(x, X, A) \geq \gamma_1$  成立,那么  $x \in POS(X)$ ,即证据  $x$  信任命题  $X$ 。

(B<sub>1</sub>)如果  $BEL(x, X, A) \leq \alpha_1$  且  $BEL(x, X, A) \geq \beta_1$  成立,那么  $x \in BND(X)$ ,即证据  $x$  延迟信任命题  $X$ 。

(N<sub>1</sub>)如果  $BEL(x, X, A) \leq \beta_1$  且  $BEL(x, X, A) \leq \gamma_1$  成立,那么  $x \in NEG(X)$ ,即证据  $x$  拒绝命题  $X$ 。

其中,  $\alpha_1 = \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN}) + (\hat{\lambda}_{BP} - \hat{\lambda}_{PP})}, \beta_1 =$

$$\frac{(\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{BP})}, \gamma_1 = \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{PP})}。$$

如果决策者需要保留一个明确的边界域,则假设  $\alpha_1 > \beta_1$ ,

即  $\frac{\hat{\lambda}_{BP} - \hat{\lambda}_{PP}}{\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN}} < \frac{\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{BP}}{\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN}}$ , 此时,  $0 \leq \beta_1 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1 \leq 1$ 。那么,最小代价决策规则可进一步简化为:

(P<sub>1</sub>)如果  $BEL(x, X, A) \geq \alpha_1$  成立,那么  $x \in POS(X)$ ,即证据  $x$  信任命题  $X$ 。

(B<sub>1</sub>)如果  $\beta_1 < BEL(x, X, A) < \alpha_1$  成立,那么  $x \in BND(X)$ ,即证据  $x$  延迟信任命题  $X$ 。

(N<sub>1</sub>)如果  $BEL(x, X, A) \leq \beta_1$  成立,那么  $x \in NEG(X)$ ,即证据  $x$  拒绝命题  $X$ 。

### 3.2 基于证据理论的可变三支决策模型

由于延迟信任区间的存在,  $pl(x, X, A) - bel(x, X, A) \geq 0$ , 即  $0 < bel(x, X, A) + bel(x, \sim X, A) \leq 1$ , 因此证据在属性子集  $A$  下信任命题的程度  $BEL(x, X, A)$  可能不限于  $bel(x, X, A)$ , 而是介于  $bel(x, X, A)$  和  $pl(x, X, A)$  之间。基于此,建立基于证据理论的可变三支决策模型。那么,令  $I = \langle U, AT \rangle$  为一个信息系统,其中论域  $U$  是所有对象的有限非空集合,  $AT = C \cup \{d\}$  是所有属性的有限非空集合,其中  $C$  为条件属性集,  $d$  为决策属性。定义  $BEL(x, X, A)$  为:

$$\begin{aligned} BEL(x, X, A) &= bel(x, X, A) + \delta_{pl}(pl(x, X, A) - bel(x, X, A)) \\ &= \delta_{pl} \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) + (1 - \delta_{pl}) \sum_{B \subseteq A} m(B) \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $A (A \subseteq C)$  表示满足定义的属性集合;  $m(B)$  表示证据  $x$  在属性子集  $B$  下的支持度;  $\delta_{pl}$  为信任系数,  $\delta_{pl} \in [0, 1]$ 。

以下两个假设是显然成立的:

1)  $BEL(x, X, A) + BEL(x, \sim X, A) = 1 + (2\delta_{pl} - 1)[pl(x, X, A) - bel(x, X, A)]$ ;

2)  $\hat{\lambda}_{PP} \leq \hat{\lambda}_{BP} < \hat{\lambda}_{NP}, \hat{\lambda}_{NN} \leq \hat{\lambda}_{BN} < \hat{\lambda}_{PN}$ 。

那么,最小代价决策规则(P')可以转化为:

$$\begin{aligned} \hat{R}(a_P|[x]) &\leq \hat{R}(a_B|[x]) \\ \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{PP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{PN}BEL(x, \sim X, A) &\leq \hat{\lambda}_{BP}BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{BN}BEL(x, \sim X, A) \\ \Leftrightarrow (\hat{\lambda}_{PP} - \hat{\lambda}_{BP} + \hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{PN})BEL(x, X, A) &\leq (1 + (2\delta_{pl} - 1)(pl(x, X, A) - bel(x, X, A))) (\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{PN}) \\ \Leftrightarrow BEL(x, X, A) &\geq (1 + (2\delta_{pl} - 1)(pl(x, X, A) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & bel(x, X, A)) \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN}) + (\hat{\lambda}_{BP} - \hat{\lambda}_{PP})} \\
 & \hat{R}(a_P | [x]) \leq \hat{R}(a_N | [x]) \\
 & \Leftrightarrow \hat{\lambda}_{PP} BEL(x, X, A) + \hat{\lambda}_{PN} BEL(x, \sim X, A) \leq \hat{\lambda}_{NP} BEL \\
 & (x, X, A) + \hat{\lambda}_{NN} BEL(x, \sim X, A) \\
 & \Leftrightarrow (\hat{\lambda}_{PP} - \hat{\lambda}_{NP} + \hat{\lambda}_{NN} - \hat{\lambda}_{PN}) BEL(x, X, A) \leq (1 + (2\delta_{\mu} - \\
 & 1)(pl(x, X, A) - bel(x, X, A))) (\hat{\lambda}_{NN} - \hat{\lambda}_{PN}) \\
 & \Leftrightarrow BEL(x, X, A) \geq (1 + (2\delta_{\mu} - 1)(pl(x, X, A) - \\
 & bel(x, X, A))) \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{PP})}
 \end{aligned}$$

最小代价决策规则(B')和(N')也可以进行类似的简化,最小代价决策规则转化如下:

(P<sub>2</sub>) 如果 BEL(x, X, A) ≥ α<sub>2</sub> 且 BEL(x, X, A) ≥ γ<sub>2</sub> 成立,那么 x ∈ POS(X),即证据 x 信任命题 X。

(B<sub>2</sub>) 如果 BEL(x, X, A) ≤ α<sub>2</sub> 且 BEL(x, X, A) ≥ β<sub>2</sub> 成立,那么 x ∈ BND(X),即证据 x 延迟信任命题 X。

(N<sub>2</sub>) 如果 BEL(x, X, A) ≤ β<sub>2</sub> 且 BEL(x, X, A) ≤ γ<sub>2</sub> 成立,那么 x ∈ NEG(X),即证据 x 拒绝命题 X。

其中, α<sub>2</sub> = (1 + (2δ<sub>μ</sub> - 1)(pl(x, X, A) - bel(x, X, A)))

$$\frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN}) + (\hat{\lambda}_{BP} - \hat{\lambda}_{PP})}, \beta_2 = (1 + (2\delta_{\mu} - 1)(pl(x, X,$$

$$A) - bel(x, X, A)) \frac{(\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{BP})}, \gamma_3 = (1 +$$

$$(2\delta_{\mu} - 1)(pl(x, X, A) - bel(x, X, A))) \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{PP})}。$$

又由于 α<sub>2</sub>, γ<sub>2</sub>, β<sub>2</sub> ∈ (0, 1], 因此 α<sub>2</sub> = min{(1 + (2δ<sub>μ</sub> - 1)

$$(pl(x, X, A) - bel(x, X, A)) \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{BN}) + (\hat{\lambda}_{BP} - \hat{\lambda}_{PP})}, 1\},$$

$$\beta_2 = \min\{(1 + (2\delta_{\mu} - 1)(pl(x, X, A) - bel(x, X, A))) \frac{(\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{BN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{BP})}, 1\}, \gamma_2 = \min\{(1 + (2\delta_{\mu} - 1)$$

$$(pl(x, X, A) - bel(x, X, A)) \frac{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN})}{(\hat{\lambda}_{PN} - \hat{\lambda}_{NN}) + (\hat{\lambda}_{NP} - \hat{\lambda}_{PP})}, 1\}。$$

类似于确定模型,将最小代价决策规则进一步简化为:

(P<sub>2</sub>) 如果 BEL(x, X, A) ≥ α<sub>2</sub> 成立,那么 x ∈ POS(X),即证据 x 信任命题 X。

(B<sub>2</sub>) 如果 β<sub>2</sub> < BEL(x, X, A) < α<sub>2</sub> 成立,那么 x ∈ BND(X),即证据 x 延迟信任命题 X。

(N<sub>2</sub>) 如果 BEL(x, X, A) ≤ β<sub>2</sub> 成立,那么 x ∈ NEG(X),即证据 x 拒绝命题 X。

对于特定应用需求,不同的决策者根据自身对于风险代价的评估会给出不同的信任系数。随着 δ<sub>μ</sub> 取值的变化,模型的综合结果也会随之发生变化。

当 δ<sub>μ</sub> = 0 时, BEL(x, X, A) = bel(x, X, A)。此时, BEL(x, X, A) 只限于 bel(x, X, A),模型退化为悲观三支决策模型。倾向于低风险代价的决策者应该尽可能地选择悲观三支决策模型。当 δ<sub>μ</sub> = 1 时, BEL(x, X, A) = pl(x, X, A)。此时, BEL(x, X, A) 等于上限 pl(x, X, A),模型退化为乐观三支决策模型。倾向于高风险代价的决策者应该尽可能地选择乐观三支决策模型。当 0 < δ<sub>μ</sub> < 1 时,可以得到任意松紧程度的融合规则以满足特定应用需求。特别地,当 δ<sub>μ</sub> = 0.5 时, BEL(x, X, A) = 0.5bel(x, X, A) + 0.5pl(x, X, A),显然 BEL(x, X, A) + BEL(x, ~X, A) = 1,此时, α<sub>2</sub> = α<sub>1</sub>, β<sub>2</sub> = β<sub>1</sub>, γ<sub>2</sub> = γ<sub>1</sub>。因此,模型退化为基于证据理论的确三支决策模型。

此外,不同的决策者面对风险损失时具有不同的应对方式。为了在决策过程中充分考虑决策者面对风险损失时的策略,基本信任分配函数 m(B) 可以通过不同策略下的属性重要度确定,也可以通过专家给出,还可以通过层次分析法<sup>[17]</sup>、AHP<sup>[18]</sup>法等权重确定方法得到。

### 4 案例分析

在防空作战领域,对防空战略作战的态势进行评估是现代防空研究的热点之一。在对防空战略作战的态势进行评估时,主要考虑两个问题:1)当前战场态势下,双方部队行动的部署和实际情况;2)对于我方作战目标来说,当前战场态势是有利还是不利。前线指挥员拥有战场主动权的性质和程度,决定了态势评估的质与量<sup>[19]</sup>。因此,战场态势评估有利与否的判断,是指挥人员对战场主动权拥有状况的判断。当指挥人员将这种判断建立在对双方部队行动和部署的具体分析之上时,它就具体反映了当前战场态势是优势还是劣势。

下文利用基于证据理论的三支决策模型对防空战略作战的态势进行评估。首先构造状态空间 Θ = {X, ~X}, 表示当前战场环境下,我方作战目标 x 处于优势、劣势两种状态;构造决策动作集 A = {a<sub>P</sub>, a<sub>B</sub>, a<sub>N</sub>}, 表示当前战场情况下,对我方作战目标 x 进行风险分析时采取的 3 种行动,即有利、可能有利、不利于我方。综合分析当前战场环境下双方部队行动的部署和实际情况,分别对参与态势评估的我方作战目标 x 给出相应的代价函数。假设有 6 组作战目标组成论域 U = {x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>, x<sub>5</sub>, x<sub>6</sub>}。如表 3 所列,我方作战目标 x 处于优势状态 X 时,采取 a<sub>P</sub>, a<sub>B</sub>, a<sub>N</sub> 决策时所需的代价分别记为 λ<sub>PP</sub>, λ<sub>BP</sub>, λ<sub>NP</sub>; 当我方作战目标 x 处于劣势状态 ~X 时,采取 a<sub>P</sub>, a<sub>B</sub>, a<sub>N</sub> 决策时所需的代价分别记为 λ<sub>PN</sub>, λ<sub>BN</sub>, λ<sub>NN</sub>。

表 3 当前战场下对战略目标的风险评估

Table 3 Risk assessment of strategic targets under current battlefield

目标	λ <sub>PP</sub>	λ <sub>BP</sub>	λ <sub>NP</sub>	λ <sub>PN</sub>	λ <sub>BN</sub>	λ <sub>NN</sub>
x <sub>1</sub>	0.0	8.4	13.1	12.2	6.8	4.6
x <sub>2</sub>	1.8	7.0	14.8	16.2	5.2	0.0
x <sub>3</sub>	2.1	6.2	16.9	16.3	11.1	0.0
x <sub>4</sub>	0.7	6.9	9.5	16.6	9.3	6.7
x <sub>5</sub>	1.4	4.9	19.7	38.3	6.9	0.5
x <sub>6</sub>	2.2	10.1	19	19.8	10.8	1.6

分别提取我方(兵力、武器)部署  $c_1$ 、友方(兵力、武器)部署  $c_2$ 、敌方(兵力、武器)部署  $c_3$  以及环境(地形、天气)  $c_4$  4 个特征<sup>[19]</sup>组成条件属性集合  $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 。使用有利  $d=1$  和不利  $d=2$  作为决策属性类别。为消除量纲等因素的影响,对原始数据进行规格化处理,建立二维信息表,如表 4 所列。指挥员对战场环境的主观风险策略是评估过程中极其重要的环节,本实例采用的策略如表 5 所列。表 5 中,  $|\cdot|$  表示命题包含属性的数量。

表 4 二维信息表

Table 4 Two dimensional information table

目标	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$d$
$x_1$	3	3	3	1	1
$x_2$	2	1	3	1	1
$x_3$	1	2	2	2	2
$x_4$	2	2	3	1	1
$x_5$	3	1	2	2	1
$x_6$	3	3	1	1	2

表 5 基本信任分配函数

Table 5 Basic trust distribution function

基本信任分配函数	
平均信任分配	$m(B) = \begin{cases} \frac{1}{2^{ C }-1}, & B \subseteq C \text{ 且 } B \neq \emptyset \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
悲观信任分配	$m(B) = \frac{ \{x   (\forall x \in U) \wedge ([x]_B \subseteq X)\} }{\sum_{M \subseteq C}  \{x   (\forall x \in U) \wedge ([x]_M \subseteq X)\} }$
乐观信任分配	$m(B) = \frac{ \{x   (\forall x \in U) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\} }{\sum_{M \subseteq C}  \{x   (\forall x \in U) \wedge ([x]_M \cap X \neq \emptyset)\} }$

根据实际情况,对  $A$  给出两种定义: $A_1 = \{B | (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$ ;  $A_2 = \{B | (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$ 。由模型可得,选择不同的  $m(B)$ ,  $A$  以及  $\delta_{pl}$  都可以得到不同的阈值以及评估结果。以  $\delta_{pl}=0, \delta_{pl}=0.5, \delta_{pl}=1$  时  $\alpha_2$  值的变化情况为例,分析阈值的变化情况,如表 6—表 8 所列。平均信任分配、乐观信任分配、悲观信任分配下防空战略作战的态势评估如表 9—表 11 所列。

由表 6—表 11 可知:1)同一信任分配下,  $A_2$  较  $A_1$  阈值略大且评估结果更为稳定,不随  $\delta_{pl}$  变化产生很大波动。同时,与  $A_1$  相比,  $A_2$  在优势决策上较宽松,在劣势决策上较严格,因此  $A_1$  在优势状态识别上更具优势,  $A_2$  在劣势状态识别上更具优势。2)在  $A$  的同一定义下,平均信任分配下阈值的

大小介于乐观信任分配和悲观信任分配之间。此外,乐观信任分配决策最为宽松,准确率高;而悲观信任分配最为严格,在劣势识别上的准确率较低;平均信任分配介于两者之间,但波动较大。3)随着  $\delta_{pl}$  的增大,  $BEL(x, X, A)$  和阈值  $(\alpha_2, \beta_2)$  均发生变化,因此同一条件下评估结果不满足单调性。当  $\delta_{pl}=0$  时,倾向于“悲观”地筛选决策,分类决策准确率高,但容错率低。当  $\delta_{pl}=1$  时,倾向于“乐观”地信任尽可能多的命题,容错率高,但分类决策准确率相对偏低。

表 6  $\delta_{pl}=0$  时不同情况下的  $\alpha_2$  值

Table 6  $\alpha_2$  value in different conditions when  $\delta_{pl}=0$

目标	$A_1 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$			$A_2 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$		
	平均信任分配	乐观信任分配	悲观信任分配	平均信任分配	乐观信任分配	悲观信任分配
$x_1$	0.209	0.161	0.226	0.363	0.324	0.363
$x_2$	0.559	0.559	0.559	0.216	0.164	0.227
$x_3$	0.481	0.410	0.494	0.533	0.533	0.533
$x_4$	0.391	0.391	0.391	0.679	0.679	0.679
$x_5$	0.224	0.169	0.234	0.541	0.541	0.541
$x_6$	0.900	0.900	0.900	0.213	0.150	0.231

表 7  $\delta_{pl}=0.5$  时不同情况下的  $\alpha_2$  值

Table 7  $\alpha_2$  value in different conditions when  $\delta_{pl}=0.5$

目标	$A_1 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$			$A_2 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$		
	平均信任分配	乐观信任分配	悲观信任分配	平均信任分配	乐观信任分配	悲观信任分配
$x_1$	0.391	0.391	0.391	0.679	0.679	0.679
$x_2$	0.559	0.559	0.559	0.541	0.541	0.541
$x_3$	0.900	0.900	0.900	0.533	0.533	0.533
$x_4$	0.391	0.391	0.391	0.679	0.679	0.679
$x_5$	0.559	0.559	0.559	0.541	0.541	0.541
$x_6$	0.900	0.900	0.900	0.533	0.533	0.533

表 8  $\delta_{pl}=1$  时不同情况下的  $\alpha_2$  值

Table 8  $\alpha_2$  value in different conditions when  $\delta_{pl}=1$

目标	$A_1 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$			$A_2 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$		
	平均信任分配	乐观信任分配	悲观信任分配	平均信任分配	乐观信任分配	悲观信任分配
$x_1$	0.573	0.621	0.556	0.995	<b>1.000</b>	0.995
$x_2$	0.559	0.559	0.559	0.866	0.918	0.855
$x_3$	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	<b>1.000</b>	0.533	0.533	0.533
$x_4$	0.391	0.391	0.391	0.679	0.679	0.679
$x_5$	0.894	0.949	0.884	0.541	0.541	0.541
$x_6$	0.900	0.900	0.900	0.853	0.916	0.835

表 9 平均信任分配下的防空战略作战态势评估

Table 9 Air defense strategic operational situation assessment under average trust allocation

$A_1 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$			$\delta_{pl}$	$A_2 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$		
优势	均势	劣势		优势	均势	劣势
$\{x_2\}$	$\{x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.0	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\{x_2\}$	$\{x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.1	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\{x_2\}$	$\{x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.2	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.3	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\{x_2\}$	$\{x_4\}$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.4	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.5	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\{x_2\}$	$\{x_5\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$	0.6	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_6\}$	0.7	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	0.8	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_6\}$	0.9	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_6\}$	1.0	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_3, x_6\}$

表 10 乐观信任分配下的防空战略作战态势评估

Table 10 Air defense strategic operational situation assessment under optimistic trust allocation

$A_1 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$			$\delta_{pl}$	$A_2 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$		
优势	均势	劣势		优势	均势	劣势
$\{x_2, x_4\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.0	$U$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{x_2, x_4\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.1	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_2, x_4\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.2	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_2, x_4\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_5, x_6\}$	0.3	$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_2, x_4\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_5, x_6\}$	0.4	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_2, x_4\}$	$\{x_1, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	0.5	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_2\}$	$\{x_1, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	0.6	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_2\}$	$\{x_1, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	0.7	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	$\emptyset$
$\{x_1, x_2\}$	$\{x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	0.8	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3\}$	$\{x_6\}$
$\{x_1\}$	$\{x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	0.9	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3\}$	$\{x_6\}$
$\{x_1\}$	$\{x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3, x_6\}$	1.0	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_3\}$	$\{x_6\}$

表 11 悲观信任分配下的防空战略作战态势评估

Table 11 Air defense strategic operational situation assessment under pessimistic trust allocation

$A_1 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \subseteq X)\}$			$\delta_{pl}$	$A_2 = \{B   (\forall B \in C) \wedge ([x]_B \cap X \neq \emptyset)\}$		
优势	均势	劣势		优势	均势	劣势
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.0	$\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6\}$	$\emptyset$	$\{x_3\}$
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.1	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.2	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.3	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_1, x_3, x_4, x_5, x_6\}$	0.4	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\{x_2\}$	$\{x_5\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$	0.5	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\{x_2\}$	$\{x_5\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$	0.6	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\emptyset$	$\{x_2, x_5\}$	$\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$	0.7	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_6\}$	0.8	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_6\}$	0.9	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$
$\emptyset$	$\{x_1, x_2, x_5\}$	$\{x_3, x_4, x_6\}$	1.0	$\{x_1, x_2, x_4, x_5\}$	$\{x_6\}$	$\{x_3\}$

通过以上应用分析可以说明,基于证据理论的三支决策模型能够清楚、简洁地解决实际问题,并且为决策者提供多种决策策略以供参考。

**结束语** 在三支决策的相关研究中,特定语义环境下的模型扩展一直是研究热点。本文将证据理论和三支决策模型相结合,分析两者在概念、信息处理方式等方面的互通互补之处,分别构建了基于证据理论的确定和可变三支决策模型。通过调节信任系数取值,结合贝叶斯风险分析形成了包含乐观语义和悲观语义的决策规则,以满足特定语义环境下的应用需求。该模型可以应用于医疗诊断、营养搭配、政府决策等在决策过程中需要考虑决策者对潜在风险的态度风险决策问题中。下一步将对特定语义环境下三支决策模型如何更好地引入决策者的主观能动性进行进一步研究。

参考文献

[1] 刘盾,李天瑞,苗谦谏,等.三支决策与粒计算[M].北京:科学技术出版社,2013.  
 [2] YU H, WANG G Y, YAO Y Y. Current research and future perspectives on decision-theoretic rough sets[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1628-1639. (in Chinese)  
 于洪,王国胤,姚一豫.决策粗糙集理论研究现状与展望[J].计算机学报, 2015, 38(8): 1628-1639.  
 [3] YAO Y Y, WONG S K M, LINGRAS P. A decision-theoretic rough set model[C]// Proceedings of the 5th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems. North-Holland, 1990: 17-25.  
 [4] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets

[J]. Information Sciences, 2011, 180(3): 341-353.  
 [5] YAO Y Y. The superiority of three-way decision in probabilistic rough set models[J]. Information Sciences, 2011, 181(6): 1080-1096.  
 [6] HU B Q. Three-way decisions space and three-way decisions [J]. Information Science, 2014, 281(281): 21-52.  
 [7] LIANG D C, LIU D, PEDRYCZ B W, et al. Triangular fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1087-1106.  
 [8] LIANG D C, LIU D. Systematic studies on three-way decisions with interval-valued decision-theoretic rough sets[J]. Information Sciences, 2014, 276(C): 186-203.  
 [9] LIANG D C, LIU D. Deriving three-way decisions from intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Information Science, 2015, 300(C): 28-48.  
 [10] LIANG D C, XU Z S, LIU D. Three-way decisions with intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets based on point operators[J]. Information Science, 2017, 375(C): 183-201.  
 [11] XUE Z A, ZHU T L, XUE T Y, et al. Model of three-way decision theory based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Computer Science, 2016, 43(6): 283-288. (in Chinese)  
 薛占熬,朱泰隆,薛天宇,等.基于直觉模糊集的三支决策模型[J].计算机学报, 2016, 43(6): 283-288.  
 [12] XUE Z A, WANG P H, LIU J, et al. Three-way decision model based on probabilistic graph[J]. Computer Science, 2012, 43(1): 30-34. (in Chinese)  
 薛占熬,王朋函,刘杰,等.基于概率图的三支决策模型研究[J].计算机学报, 2012, 43(1): 30-34.