

基于泛逻辑学的模糊推理规则^{*}

马盈仓 何华灿

(西北工业大学计算机学院 西安710072)

摘 要 本文首次提出了基于泛逻辑学的模糊推理,给出一般 FMP 推理、模糊条件语句推理以及多段模糊推理的泛逻辑学推理规则。

关键词 泛逻辑学,模糊推理,广义相关性

The Fuzzy Reasoning Rules Based on Universal Logics

MA Ying-Cang^{1,2} HE Hua-Can¹

(College of Computer Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072)¹

(College of science, Xi'an Univ. of Eng. Sci. and Tech., Xi'an, 710048)²

Abstract The fuzzy reasoning based on universal logics is given for the first time, and the reasoning rules about FMP, fuzzy IF statement and fuzzy syllogism are given.

Keywords Universal logics, Fuzzy reasoning, Generalized correlativity

1 引言

自1965年 L. A. Zadeh 提出“模糊集合”开始^[1],模糊理论与应用在近几十年得到飞速的发展,尤其是在模糊控制方面取得巨大成绩。模糊推理规则是模糊控制得以实现的理论基础,因此,研究模糊推理规则一直是模糊理论研究的热点之一。而模糊推理的最基本形式为基本模糊取式(Fuzzy Modus Ponens,简记为 FMP),即:

已知 $A \rightarrow B$
且给定 A^*
求 B^*

这里 $A, A^* \in F(X), B, B^* \in F(Y)$ 。关于基本 FMP 的推理规则,国内外研究颇多,较为著名的有 L. A. Zadeh 提出的 CRI 方法^[2],E. H. Mamdani 提出的 Mamdani 方法^[3],以及我国学者张文修教授提出的包含度理论^[4],王国俊教授提出的三 I 方法^[5]等。这些研究丰富了模糊推理的内容,并且给应用提供了理论的基础,应用中取得的成绩也可以证明这一点。但是,我们又看到,在实际应用中,这些方法也会产生一些“不好”的结果。其推理规则在一种情况下非常有效,在另外的一种情况下就不理想。这也使人们对模糊理论产生怀疑^[6]。随着人们认识的加深,越来越感到模糊问题不仅是隶属函数的变化,其连接词算子也是变化的。而 CRI 方法与 Mamdani 方法的算子是固定不变的,从而导致其解决问题的片面性(传统模糊逻辑中的“逻辑与”为两者“取小”,“逻辑或”为两者“取大”,其逻辑连接词也是固定的)。为了解决连接词的变化,人们引入了范数的概念,使得模糊连接词可以在满足一定的条件下进行变化。其中,包含度理论所进行的模糊推理即实现了算子的变化性,从而将前两种方法“包含”进来,使得解决推理问题更为全面和有效。但是,在推理过程中,如何选取“合适的”算子一直是

一个没有彻底解决的问题。算子之间的选取与配对成为人们解决问题成功的关键。由此可以看出,尽管实现了算子的可变性,但包含度理论没有给出选取算子的一条很有效的途径。因此,模糊命题间选取何种模糊逻辑算子来表示模糊逻辑运算,即模糊逻辑中两命题间的逻辑运算:与($\wedge$)、或($\vee$)、非($\neg$)、蕴涵($\rightarrow$)、等价($\leftrightarrow$)等如何选取成为解决模糊推理的关键。前面的几种方法均没有给出一个“很好”的解决途径。1996年,何华灿教授提出的泛逻辑学对解决此问题提供了一条有效的途径^[7],本文借助于泛逻辑学的基本原理,首次较系统、全面地提出基于泛逻辑学的模糊推理规则,以期对模糊推理提供一种更有效的方法。下面先简要地介绍一下泛逻辑学的基本思想,至于详细的内容参见文[8]。

前面已经提过,在模糊逻辑中,人们发现命题连接词的运算模型不唯一,因此提出范数的概念并且提出了各式各样的与/或算子对,比如:Zadeh 算子对,Probability 算子对,Einstein 算子对,有界算子对,Drastic 算子对,Hamacher 算子对,Yager 算子对等。由此可以得到两个启示:1)命题连接词应是可变的,而不是固定的;2)它们又是相互配对的,不可随意组合。那么如何实现这两点?是否可以用统一的逻辑来体现呢?泛逻辑学给出了答案。它是何华灿教授在研究柔性世界逻辑规律时发现的一个全新的连续可控的逻辑体系。

在研究中,何华灿教授把中国古典哲学的思想(即世间万事万物都是相关的,不是相生就是相克,非此即彼)引入到柔性逻辑学中,用相关性来解释命题连接词的运算模型不唯一的原因,它是事物间的内在特性,用它可以反映事物间作用的真正原因。它包括广义相关性(模糊命题之间的关联性)和广义自相关性(命题真值的测量误差)。并且可以将其量化为广义相关系数(一般用 h 表示)和广义自相关系数(一般用 k 表示), h 和 k 在 $[0,1]$ 中连续取值。比如: $h=1$ 时表示两命题最大相吸, $h=0.5$ 表示两命题最大相斥, $h=0$ 表示两命题最大相

^{*} 基金项目:国家自然科学基金(批准号:60273087)。马盈仓 讲师,博士生,主要研究方向为代数学、泛逻辑学。何华灿 教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能及应用、泛逻辑学。

克。广义自相关系数用 k 来刻画,比如,最大正误差时 $k=1$,没有误差时 $k=0.5$,最大负误差时 $k=0$ 。依据范数理论以及相关系数作为参数可以得到不同连接词的生成元完整簇,从而使得连接词算子是连续可变的,而相同的相关系数所对应的连接词算子是互相配对的。比如: $k=0.5, h=0.5$,所得到的连接词分别为:

$$\begin{aligned} \text{非运算} & \rightarrow(x)=1-x \\ \text{与运算} & \wedge(x,y)=\max(0,x+y-1) \\ \text{或运算} & \vee(x,y)=\min(1,x+y) \\ \text{蕴涵运算} & \rightarrow(x,y)=\min(1,1-x+y) \\ \text{等价运算} & \leftrightarrow(x,y)=1-|x-y| \end{aligned}$$

只要给定 h 和 k 的值,就可得到对应的连接词算子。使得命题间连接词的运算可通过命题间的内在特性:相关性确定下来,从而命题间的连接词选择有章可循,这就解决了我们在推理时选取算子的盲目性,为模糊推理提供一种更有效的途径。下面我们用 $\wedge_{h,k}, \vee_{h,k}, \rightarrow_{h,k}, \leftrightarrow_{h,k}$ 分别表示广义相关系数为 h 、广义自相关系数为 k 时的泛逻辑连接词泛与、泛或、泛非、泛蕴涵、泛等价。

2 一般 FMP 推理的泛逻辑规则

首先分析命题情形的基本 FMP 的推理规则,即

$$\begin{aligned} & \text{已知 } a \rightarrow b \\ & \text{且给定 } a^* \\ & \text{求 } b^* \end{aligned}$$

其中 a, b, a^*, b^* 均为模糊命题,设 a, b, a^* 的隶属度分别为 x, y, x^* ,求 b^* 的隶属度 y^* 。传统的解法为:

$$y^* = x^* \wedge (X \rightarrow y) \quad (1)$$

$\wedge$ 为取小,一般是固定的,而 $\rightarrow$ 算子的取法比较多,对于不同的取法得到的结果也不尽相同,这也造成了推理的不易操作性,选取合适的算子就显得十分突出。而泛逻辑学原理告诉我们,式(1)中连接词的选取是与命题间的相关性所确定的,因此, $\wedge$ 应取泛与: $\wedge_{h,k}, \rightarrow$ 应取泛蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$,结合传统的解法,对于上述命题 FMP 情形,我们有:

规则1 命题情形的基本 FMP 的泛逻辑学推理规则为: $y^* = x^* \wedge_{h_1,k}(X \rightarrow_{h_2,k} y)$,其中, h_1, h_2 分别为相应命题间的广义相关系数, k 为广义自相关系数。

下面考察 $A, A^* \in F(X), B, B^* \in F(Y)$,基本 FMP 的推理规则。由命题的情形,我们知道实现模糊推理算法要解决两个方面的问题,一是必须给出关系 $R: A \rightarrow B$ 的生成算法,即给出确定的蕴涵算子;二是要解决推理 $B^* = A^* \circledast R$ 的推理合成算法,即给出算子 $\circledast$,在此注意它是一个复合算子,由于 $A, A^* \in F(X), B, B^* \in F(Y)$,实际上是求 B^* 在每一点 $y \in Y$ 的值,在 x 与 y 都确定时,由命题推理法则可以得到一个值,而 x 在 X 中随意取值,当 y 固定时,随着 x 的变化,得到不止一个 $B^*(y)$ 值,因此我们要取其中最大的,即先逻辑与,再取上确界。可以看到,在 CRI 方法中,蕴涵算子取为: $a \rightarrow b = (1-a) \vee (a \wedge b)$, $\circledast$ 取 $\max\text{-min}$ 。在 Mamdani 方法中,蕴涵算子取 $\wedge$, $\circledast$ 也取 $\max\text{-min}$ 。在包含度理论中, $\circledast$ 取 $\sup\text{-T}$ 范数,蕴涵算子取 T 蕴涵,它克服了前两种方法的算子的固定不变性,使算子可以随意变化,但是由于其组合很多,而且没有考虑命题间的广义相关性,因此在实际运算时如何选取算子的问题暴露出来。由泛逻辑学原理,依据命题间的广义相关性,蕴涵算子应选取泛蕴涵 $\rightarrow_{h,k}$,复合算子 $\circledast$ 应为 $\sup\text{-}\wedge_{h,k}$ 结合

以上分析,我们给出基本 FMP 的泛逻辑学推理规则:

规则2 基本 FMP 的泛逻辑学推理规则为: $B^*(y) = \sup_{a \in X} \{A^*(x) \wedge_{h_1,k}(A(x) \rightarrow_{h_2,k} B(y))\}$,其中 h_1, h_2 为广义相关系数, k 为广义自相关系数。

注:由于 k 为真值的测量误差,因此同一问题为了方便计算,取相同的 k 值。为了书写方便,下面提到的规则不再写出 k ,但在具体计算时,要赋予一个 k 值。

借助于一个例子比较一下 CRI 方法、Mamdani 方法与泛逻辑方法。

例 设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_6\} = \{1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0\}$ 表示某地区男子身高的论域,单位为米。 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_7\} = \{40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$ 表示该地区男子体重的论域,单位为千克。设有两个模糊集 $\tilde{A} = \text{高} = 0.2/1.6 + 0.7/1.7 + 0.9/1.8 + 1/1.9 + 1/2.0$, $\tilde{B} = \text{重} = 0.2/50 + 0.6/60 + 0.8/70 + 0.85/80 + 1/90 + 1/100$ 。若已知高则重,则问 $A^* = \text{很高} = (\tilde{A})^2 = 0.04/1.6 + 0.49/1.7 + 0.81/1.8 + 1/1.9 + 1/2.0$ 时, y 如何?

解:具体的过程不再写出,只写出最后结果。由 CRI 方法可得:

$$B^* = 0.3/40 + 0.3/50 + 0.6/60 + 0.8/70 + 0.95/80 + 1/90 + 1/100$$

由泛逻辑法,取 $k=0.5, h_1=0.5, h_2=0.75$ 得到:

$$B^* = 0/40 + 0.2/50 + 0.6/60 + 0.8/70 + 0.95/80 + 1/90 + 1/100$$

由 Mamdani 方法可以得到

$$B^* = 0/40 + 0.2/50 + 0.6/60 + 0.8/70 + 0.95/80 + 1/90 + 1/100$$

按照常理, y 应为很重,由所得到的模糊集合,显然泛逻辑法得到的比 CRI 方法优,在此问题中与 Mamdani 方法得到的结果一致。下面的定理可以看到它是可还原的。

定理 基于泛逻辑学的基本 FMP 推理规则是 P-还原算法,这里性质 P 指 A 为正规模糊集,即有 $a \in X$,使得 $A(a) = 1$ 。

证明:由文[8]我们有:

$$\wedge_{k,k}(1,y) = y \quad (2)$$

$$\rightarrow_{k,k}(1,y) = y \quad (3)$$

$$\wedge_{k,k}(x, (\rightarrow_{k,k}(x,y))) \leq y \quad (4)$$

由式(4)知,不论 x 如何取值, $B^*(y) \leq y$ 总成立。由已知,存在 $a \in X$,使得 $A(a) = 1$,因此,由式(2),(3)知: $A^*(a) \wedge_{h_1,k}(A(a) \rightarrow_{h_2,k} B(y)) = 1 \wedge_{h_1,k}(1 \rightarrow_{h_2,k} B(y)) = y$ 。结合式(4),即: $B^*(y)$ 可以取值 y ,从而对每一点 y ,总有 $B^*(y) = B(y)$,从而它是 P-还原算法。

下面讨论一般 FMP 推理的泛逻辑学规则。一般 FMP 推理的数学描述为:

$$\text{已知 } A_{11}, \dots, A_{1m} \rightarrow B_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{n1}, \dots, A_{nm} \rightarrow B_n$$

$$\text{且给定 } A_1^*, \dots, A_m^*$$

$$\text{求 } B^*$$

其中: $A_{ij}, A_j^* \in F(X_j), B_i, B^* \in F(Y), i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$,我们只讨论其两种特殊的情形,对于一般的情形加以推广即可。

1)当 $n=1$ 时,其形式为:

已知 $A_1, \dots, A_m \rightarrow B$
 且给定 $A_1^*, \dots, A_m^*$
 求 B^*

解决上述推理的方法为:分别用 $X_1, \dots, X_m$ 与 Y 上的模糊集表示命题 $A_1, \dots, A_m$ 与 $B(A_1^*, \dots, A_m^*$ 与 B^*), 只须把 $A_1, \dots, A_m$ 与 $A_1^*, \dots, A_m^*$ 作叉积, 并令 $A = A_1 \times \dots \times A_m, A^* = A_1^* \times \dots \times A_m^*$, 则 A 与 A^* 都是 $X = X_1 \times \dots \times X_m$ 上的模糊集, 此时就可以转化为基本 FMP 情形, 则可以用我们上面得出的结论来求。

现在需要说明的是, 在传统的推理中, A 与 A^* 在具体运算时都取算子 $\wedge$, 即取小运算, 这样显然是不合理的。因为从语义上来说, 上述情形可以理解为在有 $A_1, \dots, A_m$ 的条件下, 可得到 B , 是需要给它们取合取(即传统上合取 $\wedge$)。但是, 由泛逻辑学原理知道, 多个命题的合取与其广义相关性有关, 只有两个命题的相关系数为 1 时, 才可取小。由于命题间的相关系数有可能不同, 因此, 在相同的 k 值下, 此时更为合理的解释为:

$A = A_1 \wedge_{h_1} \dots \wedge_{h_{m-1}} A_m$, 同样, $A^* = A_1^* \wedge_{h_1} \dots \wedge_{h_{m-1}} A_m^*$ 。由此得到:

规则3 一般 FMP 在 $n=1$ 时的泛逻辑学推理规则为:

$$B^*(y) = \sup_{(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m} \{ \wedge_h(A_i^*) \wedge_{h_m}(\wedge_h(A_i) \rightarrow_{h(2m)} B(y)) \}, y \in Y$$

其中:

$$\wedge_h(A_i^*) = A_i^*(x_i) \wedge_{h_1} \dots \wedge_{h_{m-1}} A_m^*(x_m),$$

$$\wedge_h(A_i) = A_i(x_i) \wedge_{h(m+1)} \dots \wedge_{h(2m-1)} A_m(x_m)。$$

2) 当 $m=1$ 时, 一般 FMP 变为如下的形式:

已知 $A_1 \rightarrow B_1$
 $\dots\dots\dots$
 $A_n \rightarrow B_n$
 且给定 A^*
 求 B^*

解决此类问题有两种方法, 先聚合后推理(FATI)及先推理后聚合(FITA)。我们应用先聚合后推理方法。由每一个 $A_i \rightarrow B_i$ 可以得到一个 R_i , 取所有得到的上确界为关系 R , 从而可得 R

$$(x, y) = \max_{i=1}^n R_i(x, y) = \max_{i=1}^n (A_i(x) \rightarrow_{h_i} B_i(y)), \text{ 于是得到:}$$

规则4 一般 FMP 在 $m=1$ 时的泛逻辑学推理规则为:

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} (A^*(x) \wedge_h R(x, y))。$$

3 模糊条件语句的泛逻辑方法

模糊条件语句的基本形式为:

已知 $A \rightarrow B$
 $\rightarrow A \rightarrow C$
 且给定 A^*
 求 B^*

其中: $A, A^* \in F(X), B, C, B^* \in F(Y), \neg A$ 是 A 的非命题。它的语义可以理解为, x 是 A 时, 可得 y 是 B, x 不是 A 时(否则), 可得 y 是 C , 若有 A^* , 则求 B^* 。也就是说, 已知的两个条件取析取(在此取泛或), 只要一个条件成立, 即可得到后面的结论, 由此可得:

规则5 模糊条件语句的泛逻辑学推理规则为:

$$B^*(y) = \sup_{x \in X} A^*(x) \wedge_{h_1} ((A(x) \rightarrow_{h_2} B(y)) \vee_{h_3} (\neg A(x) \rightarrow_{h_4} C(y)))。$$

4 多段模糊推理的泛逻辑方法

模糊三段论的基本形式为

已知 $A \rightarrow B$
 $B^* \rightarrow C$
 求 $A \rightarrow C^*$

其中, $A \in F(X), B, B^* \in F(Y), C \in F(Z)$ 。求 X 到 Z 的模糊关系 T 。即给定 x, z 值, 当 y 变化时, 求出 $T(x, z)$ 。显然关系 T 应取已知两关系的复合, 由此, 我们有:

规则6 模糊三段论的泛逻辑学推理规则为:

$$T(x, z) = \sup_{y \in Y} ((A(x) \rightarrow_{h_1} B(y)) \wedge_{h_2} (B^*(y) \rightarrow_{h_3} C(z)))。$$

下面考虑模糊 n 段推理法

已知 $A_1 \rightarrow A_1, A_1^* \rightarrow A_2, A_2^* \rightarrow A_3, \dots,$
 $A_{n-1}^* \rightarrow A_n, A_n^* \rightarrow C$
 求 $A_1 \rightarrow C^*$

其中 $A_i \in F(X), A_i, A_i^* \in X, 1 \leq i \leq n, C, C^* \in F(Y)$

结合三段论的推理规则, 可得 n 段模糊推理的泛逻辑方法为:

规则7 n 段模糊推理的泛逻辑学规则为:

$$T(x, y) = \sup_{x_i \in X_i} ((A(x) \rightarrow_{h_1} A_1(x_1)) \wedge_{h_2} (A_1^*(x_1) \rightarrow_{h_3} A_2(x_2)) \wedge_{h_4} \dots \wedge_{h_{2n}} (A_n^*(x_n) \rightarrow_{h(2n+1)} C(y)))$$

小结 本文通过对传统的模糊推理问题的分析, 结合泛逻辑学原理, 首次给出了在泛逻辑下的模糊推理的具体规则。可以看出, 所得到的泛逻辑学的推理规则在形式上与传统的推理规则极为相似, 而且具有自身的一些优点。首先它克服了命题连接词的固定不变性, 使得针对不同的问题选取不同的连接词, 从而克服传统的模糊理论所具有的片面性; 其次, 由于广义相关系数的引入, 它从本质上刻画了命题之间作用内在规律, 使得这种选择有章可循, 并能深刻地反映事物间的本质, 从而比传统模糊推理的求解问题更为合理与有效。通过实例的比较也可以看出来。今后我们将选取更有代表性的实际问题, 应用所提到的规则, 作进一步的证明。可以预见, 随着对泛逻辑学研究的深入, 会得到更好的解决实际问题的方法。

参考文献

- 1 Zadeh L A. Fuzzy Sets. Information and control, 1965, 8: 338~353
- 2 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics, 1973, 1: 28~44
- 3 Mamdani E H. Applications of Fuzzy Algorithms for Simple Dynamic Plant. Proc. IEE, 1974, 121: 1585~1588
- 4 张文修, 梁怡. 不确定性推理原理. 西安交通大学出版社, 1996
- 5 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 科学出版社, 2000
- 6 Elkan C. The paradoxical success of fuzzy logic. IEEE Expert, 1994, 9: 3~8
- 7 何华灿, 刘永怀, 何大庆. 经验性思维中的泛逻辑. 中国科学(E 辑), 1996, 26: 72~78
- 8 何华灿, 王华, 等. 泛逻辑学原理. 科学出版社, 2001