

多变量规则的线性插值推理方法

王天江 卢正鼎

(华中科技大学计算机学院 武汉430074)

摘要 插值推理是稀疏规则条件下的一类重要的推理方法,单变量的情况已有较多研究,但针对多变量情况的研究还不多,仅有的几种插值方法,存在着难以保证推理结果的凸性和正规性等问题。多变量规则的插值推理是插值推理研究的重要方面,为了在多变量稀疏规则条件下能得到好的插值推理结果,本文对多变量规则的插值推理方法进行了研究,提出了一个多变量规则的线性插值推理方法。该方法能较好地保证推理结果隶属函数的凸性和正规性,为智能系统中的模糊推理提供了一个十分有用的工具。

关键词 模糊推理,线性插值,插值推理,多变量,稀疏规则

A Linear Interpolative Reasoning Approach under Multi-Dimensional Fuzzy Rules

WANG Tian-Jiang LU Zheng-Ding

(College of Computer, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract Interpolative reasoning is type of important reasoning approaches under sparse rules. Interpolative reasoning in one dimension has been researched widely, but the research in multidimension is lacking and a few existing approaches have some faults. Interpolative reasoning in multidimension is an important research aspect of interpolative reasoning, in order to get better conclusion under multidimensional sparse rules condition, we research interpolative reasoning approach in multidimension and propose a linear interpolative reasoning approach in multidimension which can keep the convexity and normality of the reasoning conclusion better. It devotes a useful tool for fuzzy reasoning in intelligent systems.

Keywords Fuzzy reasoning, Linear interpolation, Interpolative reasoning, Multi-dimension, Sparse rules

1 引言

在模糊控制、模糊专家系统、模糊决策等智能系统的开发和研究中,模糊推理^[1]是其中一个十分重要的组成部分。目前在模糊推理中使用得最多的模糊推理方法是 Zadeh 提出的合成推理规则(CRI)^[2],而在稀疏规则条件下,CRI 方法却不适用。有学者已证明:模糊推理本质上就是插值器^[3]。文[4]就证明了常用的 CRI 如 Mamdani 的推理算法, Takagi-Sugeno 的推理算法等均可归结为某种插值函数。插值推理是稀疏规则条件下的重要推理方式。对于单变量情况下的插值推理,已有许多研究,然而对多模糊变量的插值推理研究却较少^[3,4]。本文对稀疏条件下多变量规则的插值推理进行了研究,提出了一个多变量规则的线性插值推理方法。假设多变量模糊假言推理规则库由 m 条规则构成,则可表示成如下形式:

规则1: IF X is A_1 THEN y is B_1

规则2: IF X is A_2 THEN y is B_2

...

规则 m : IF X is A_m THEN y is B_m

观测值: X is A^*

结论: y is B^*

其中, $X, A^*, A_1, A_2, \dots, A_m$ 都是 n 维模糊向量, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $A = (a_1, \dots, a_n)$, $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1 \dots m$; x_j, a_j, a_{ij} 是论域 U_j 上的模糊集, $j = 1 \dots n$, $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, 是 n 维笛

卡尔积; $y, B^*, B_1, B_2, \dots, B_m$ 都是论域 V 上的模糊集。

当模糊规则库中的规则呈稀疏状态时,即规则库中的规则前件不能完全覆盖输入论域,此时两个相邻规则之间将会出现“空隙”。当输入的事实落入“空隙”时,采用 CRI 是得不到任何推理结果的,而采用插值推理方法却可得到较满意的结果。

文[7]中介绍的 MB 多变量规则条件下的插值推理方法,虽然能适应一定的条件,但是它也存在着推理结论凸性的问题。为此,我们提出了一个多变量规则的线性插值推理方法,能够在多变量条件下,推出满意的结论,并且满足凸性和正规性的要求。下面,我们首先对 MB 插值推理方法进行分析,然后提出我们新的插值推理方法,最后用一个实例来说明,并与 MB 方法进行比较。

2 多维规则条件下的 MB 插值推理方法分析

Marsala 和 Bouchon-Meunier 在文[7]中提出了一种多维规则的近似插值推理方法。

为了叙述的方便,下面给出几个定义:

定义1(模糊描述 F) 称一组模糊集为模糊描述,记为 $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ 。

定义2(论域的坐标转换 R_{xz}) 由于多维条件下,各维的取值尺度不同。将模糊描述的每个分量的取值尺度统一到一一个标准上来的过程称为论域的坐标转换。设极值 $W = (a^-,$

王天江 博士,副教授,主要研究领域为人工智能,面向信息网络的智能应用,模糊推理,遗传算法。卢正鼎 教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助软件工程,智能信息系统。

a^+)是定义域 X_w 的取值范围, $r(X_w) = a^+ - a^-$; 极值 $Z = (b^-, b^+)$ 是定义域 X_z 的取值范围, $r(X_z) = b^+ - b^-$. 则: 对于 $\forall x \in X_w$, 坐标转换 $R_{X_w X_z}(x) = \frac{x r(X_z)}{r(X_w)}$ 将坐标系从 X_w 转换到 X_z , 若 $Z = [0, 1]$, 则 $R_{X_w [0,1]}(x) = \frac{x}{r(X_w)}$, 简记 $R_{X_w [0,1]}(x)$ 为 $R_{X_w}(x)$.

定义3(模糊描述的重心 G_F) 设 F 是一个模糊描述, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n), g_{f_j} (j=1 \dots n)$ 是模糊集 f_j 的重心

$$G_F = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n (g_{f_j} \cdot R_{X_w})^2}$$

定义4(模糊描述间的距离 $L_{F_1 F_2}$) 设 F_1, F_2 为模糊描述, 则它们的距离为:

$$L_{F_1 F_2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n ((g_{1j} - g_{2j}) \cdot R_{X_w})^2}$$

定义5(模糊描述序列) 设 F_1, \dots, F_m 是 m 个模糊描述, G_{F_1}, \dots, G_{F_m} 是它们的重心, 按它们重心的从小到大依次排序, 得到 F_1', \dots, F_m' , 称为一个模糊描述序列.

MB 算法首先求出各前件、观测值的模糊描述的重心, 各前件按重心从小到大的顺序排列, 得到一个模糊描述序列. 找出 i , 使得 $G_{A_i} \leq G_A \leq G_{A_{i+1}}, G_{A_i}, G_{A_{i+1}}$ 是模糊描述 A_i, A_{i+1} 的重心, G_A 是观测值的重心; 令 $A_1 = A_i, A_2 = A_{i+1}, B_1 = B_i, B_2 = B_{i+1}$.

然后, 根据模糊描述 A_1, A_2 和观测值 A 的重心来决定结论 B 的重心, 即分别求出 B_1, B_2 和 B 的距离 $L_{B_1 L_B}, L_{B_2 L_B}$

$$L_{B_1 L_B} = \frac{L_{A_1 L_A}}{L_{A_1 L_A} + L_{A_2 L_A}} L_{B_1 L_{B_2}} \quad (1)$$

$$L_{B_2 L_B} = \frac{L_{A_2 L_A}}{L_{A_1 L_A} + L_{A_2 L_A}} L_{B_1 L_{B_2}}$$

其中 $L_{B_1 L_{B_2}} = g_{B_2} - g_{B_1}, L_{B_1 L_B}, L_{B_2 L_B}$ 可以唯一确定结论 B 的重心.

最后, 决定结论 B 的形状, 其核心思想就是 B 与 B_1, B_2 相似的程度就和 A 与 A_1, A_2 相似的程度一样. 对 A_1 的任意分量 $a_{1j}, j=1 \dots n$, 做重心平移计算, 得 a_{1j}' , 使之与 A 的相应的分量 a_j 重心重合.

定义一个运算 $T_{\delta_x}^j$, 使得 $a_j = T_{\delta_x}^j(a_{1j}')$, 如图1所示.

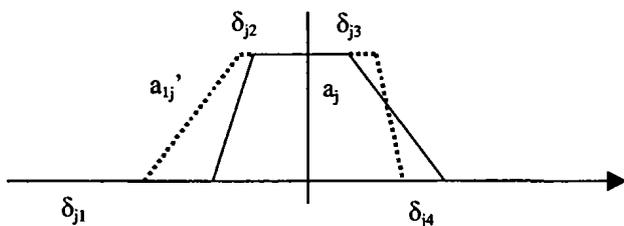


图1

令 $\omega_j = [\omega_{j1}, \omega_{j2}, \omega_{j3}, \omega_{j4}]$ 为梯形 a_j 四个顶点的横坐标, $v_{1j} = [v_{1j1}, v_{1j2}, v_{1j3}, v_{1j4}]$ 为梯形 a_{1j}' 四个顶点的横坐标, $\omega_j = T_{\delta_x}^j(v_{1j}) = [v_{1j1} + \delta_{j1}, v_{1j2} + \delta_{j2}, v_{1j3} + \delta_{j3}, v_{1j4} + \delta_{j4}] = [\omega_{j1}, \omega_{j2}, \omega_{j3}, \omega_{j4}]$, 则

$$\delta_{jk} = \omega_{jk} - v_{1jk} (k=1 \dots 4).$$

定义一个运算 $T_{\delta_x}, T_{\delta_x} = [\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_{X_j}(\delta_{j1}), \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_{X_j}(\delta_{j2}), \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_{X_j}(\delta_{j3}), \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_{X_j}(\delta_{j4})]$

这个运算规定了从 A_j' 到 A_j 的转换, 同理还可以得到 A_2' 到 A_2

的转换. 我们记第一个转换为 $T_{\delta_{x1}}$, 记第二个转换为 $T_{\delta_{x2}}$.

将这两个转换坐标变换到 B 的定义域 Y 中, 我们可以得到 B_1' 到 B 的转换和 B_2' 到 B 的转换, 即: $T_{\delta_{y1}} = R_{[0,1]Y}(T_{\delta_{x1}}), T_{\delta_{y2}} = R_{[0,1]Y}(T_{\delta_{x2}})$.

将 B_1' 的四个顶点的横坐标加上 $T_{\delta_{y1}}$ 的四个对应的分量, 得到 B' ; 将 B_2' 的四个顶点的横坐标加上 $T_{\delta_{y2}}$ 的四个对应的分量, 得到 B'' .

作为结论的两个部分 B' 和 B'' , MB 算法定义一个运算 \oplus , 使 B' 和 B'' 聚合起来, 得到:

$$B = B' \oplus B'' = \frac{L_{A_1 L_A}}{L_{A_1 L_A} + L_{A_2 L_A}} B' + \frac{L_{A_2 L_A}}{L_{A_1 L_A} + L_{A_2 L_A}} B'' \quad (2)$$

MB 插值算法有一定的几何直观意义, 能直接定位结论的重心位置. 但是该算法的计算量较大, 更重要的是, 在许多情况下, 插值结论 B 是一个非凸的模糊集. 这是由于 δ 值相对于对应点过大或过小造成的, 这显然是这个算法的最大缺点.

3 多变量规则的线性插值推理方法

由于在插值意义下, 推理规则前件的模糊集可以看作是插值的基函数, 而推理规则后件的模糊集在插值中只出现其峰点. 根据这一原理, 在规则和事实的隶属函数为三角形(或梯形)时, 我们综合考虑两个模糊描述之间的关系, 给出一个多变量规则的线性插值推理方法.

定义6 假定 $a_1 < a_2$ 是论域 U 上的模糊集, 且 $a_1 < a_2$ (即 $\forall \alpha \in [0, 1], \inf\{a_{1\alpha}\} < \inf\{a_{2\alpha}\}, \sup\{a_{1\alpha}\} < \sup\{a_{2\alpha}\}$), 则 α 截集 $a_{1\alpha}$ 和 $a_{2\alpha}$ 之间的下限距离和上限距离分别定义如下:

$$d_L(a_{1\alpha}, a_{2\alpha}) = d(\inf\{a_{1\alpha}\}, \inf\{a_{2\alpha}\}) \quad (3)$$

$$d_U(a_{1\alpha}, a_{2\alpha}) = d(\sup\{a_{1\alpha}\}, \sup\{a_{2\alpha}\}) \quad (4)$$

其中 d 是欧氏距离, 或者更一般地也可以看成是闵可夫斯基距离.

定义7 n 维模糊向量 A 的 α 截集 A_α 定义为: $A_\alpha = (a_{\alpha 1}, \dots, a_{\alpha n})$, 其中, $a_{\alpha i} (1 \leq i \leq n)$ 是普通模糊集的 α 截集.

定义8 假定 A_1, A_2 是两个不相连的 n 维模糊向量, 则 n 维 α 截集 $A_{1\alpha}$ 和 $A_{2\alpha}$ 之间的下限距离和上限距离分别定义为:

$$d_L(A_{1\alpha}, A_{2\alpha}) = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n d_L(a_{1j\alpha}, a_{2j\alpha})^2} \quad (5)$$

$$d_U(A_{1\alpha}, A_{2\alpha}) = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n d_U(a_{1j\alpha}, a_{2j\alpha})^2} \quad (6)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$.

设有两条 n 维稀疏规则:

规则1: IF X is A_1 THEN y is B_1

规则2: IF X is A_2 THEN y is B_2

其中, X, A_1, A_2 是 n 维模糊向量, $X = (x_1, \dots, x_n), A_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), A_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n}), x, a_{1i}, a_{2i}$ 是论域 U 上的模糊集, $i = 1 \dots n, U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, 是 n 维笛卡尔积; y, B_1, B_2 是论域 V 上的模糊集. 我们的多变量规则的线性插值推理方法, 由下面的公式表示:

$$\frac{d_L(A_{11}, A_{1i}^*)}{d_L(A_{1i}^*, A_{21})} = \frac{d_L(B_{11}, B_{1i}^*)}{d_L(B_{1i}^*, B_{21})} \quad (7)$$

$$\frac{d_U(A_{11}, A_{1i}^*)}{d_U(A_{1i}^*, A_{21})} = \frac{d_U(B_{11}, B_{1i}^*)}{d_U(B_{1i}^*, B_{21})} \quad (8)$$

$$h' = \frac{1}{n} ((\sum k_{1i}') (1-\beta) + (\sum k_{2i}') \beta) \quad (\beta \in [0, 1] \quad i \in \{1, \dots, n\}) \quad (9)$$

$$h'' = \frac{1}{n} ((\sum k_{1i}'') (1-\beta) + (\sum k_{2i}'') \beta)$$

$$(\beta \in [0,1] \quad i \in \{1, \dots, n\}) \quad (10)$$

其中 $k'_{1i}, k'_{1i}, k'_{2i}, k'_{2i}$ 分别是 n 维模糊向量 A_1, A_2 的第 i 个分量 a_{1i}, a_{2i} 的隶属函数的左右边斜率, h', h'' 是推理结果 B^* 的隶属函数的左右边斜率, $A_{11}, B_{11}, A_{21}, B_{21}, A_i^*, B_i^*$ 分别是 A_1, B_1, A_2, B_2 以及 A^*, B^* 的 1 截集 (即 $\alpha=1$ 时的截集)。从定义可以看出, 该推理方法只要求规则前后件及推理结果的 1 截集满足线性比例关系, 而推理结果的左右边斜率分别为两规则前件相应斜率的平均值。我们从图 2 中可以看到, 在三角形或者梯形隶属函数情况下, 只要确定了模糊集的 x^1, x^2, x^3, x^4 点, 即可完全确定一个模糊集。

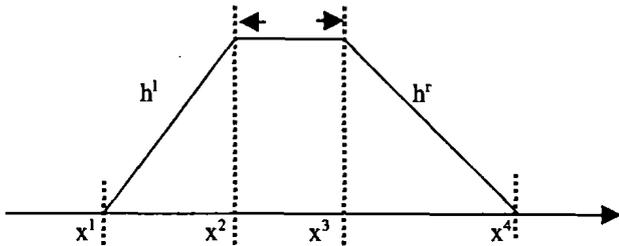


图 2 模糊集合的图形表示

因此, 由我们的这个插值推理方法, 具体计算推理结果 B^* , 可以归纳成下面几个步骤:

(1) 由式(5)和式(7)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^2$:

$$x_{B^*}^2 = \frac{x_{B_2}^2 \times \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^2 - x_{a_{1j}}^2)^2} + x_{B_1}^2 \times \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^2 - x_{a_{1j}}^2)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^2 - x_{a_{1j}}^2)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^2 - x_{a_{1j}}^2)^2}} \quad (11)$$

$$x_{B^*}^2 = \frac{33 \times \sqrt{(13-2)^2 + (18-2)^2} + 9 \times \sqrt{(17-13)^2 + (23-18)^2}}{\sqrt{(17-13)^2 + (23-18)^2} + \sqrt{(13-2)^2 + (18-2)^2}} = 27.05$$

(2) 利用式(12)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^3$:

$$x_{B^*}^3 = \frac{34 \times \sqrt{(14-3)^2 + (19-3)^2} + 11 \times \sqrt{(18-14)^2 + (26-19)^2}}{\sqrt{(18-14)^2 + (26-19)^2} + \sqrt{(14-3)^2 + (19-3)^2}} = 27.25$$

(3) 利用式(13)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^4$ (β 取 0.5):

$$x_{B^*}^4 = 27.05 - 2 / ((1+1) \times 0.5 + (1+1) \times 0.5) = 26.05$$

(4) 利用式(14)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^1$:

(2) 由式(6)和式(8)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^1$:

$$x_{B^*}^1 = \frac{x_{B_2}^1 \times \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^1 - x_{a_{1j}}^1)^2} + x_{B_1}^1 \times \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^1 - x_{a_{1j}}^1)^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^1 - x_{a_{1j}}^1)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{a_{2j}}^1 - x_{a_{1j}}^1)^2}} \quad (12)$$

(3) 由式(9)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^2$:

$$x_{B^*}^2 = x_{B^*}^2 - 1 / \frac{1}{n} ((\sum k'_{1i})(1-\beta) + (\sum k'_{2i})\beta) \quad (13)$$

(3) 由式(10)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^3$:

$$x_{B^*}^3 = x_{B^*}^3 - 1 / \frac{1}{n} ((\sum k'_{1i})(1-\beta) + (\sum k'_{2i})\beta) \quad (14)$$

为了更好地说明我们的多变量规则的线性插值推理方法, 并与 MB 插值推理方法进行比较, 下面用一个实例进行对比分析。

4 实例分析

下例给出两个不相邻的推理规则以及观测值 A^* , 运用我们的多变量规则的线性插值推理方法得到推理结果 B^* , 如图 4 所示, 为了比较方便, 图 3 给出了 MB 插值推理方法的结果:

规则 1: if X is $A_1 = \{(1, 2, 3, 10), (1, 2, 3, 7)\}$ then y is $B_1 = (2, 9, 11, 12)$

规则 2: if X is $A_2 = \{(16, 17, 18, 19), (22, 23, 26, 28)\}$ then y is $B_2 = (29, 33, 34, 35)$

观测值: $A^* = \{(12, 13, 14, 15), (17, 18, 19, 20)\}$

(1) 利用式(11)计算推理结果 B^* 的 $x_{B^*}^2$:

$$x_{B^*}^2 = 27.25 + 2 / ((1/7 + 1/4) \times 0.5 + (1 + 1/2) \times 0.5) = 29.36$$

因此推理结论 B^* 为: $B^* = (26.05, 27.05, 27.25, 29.36)$

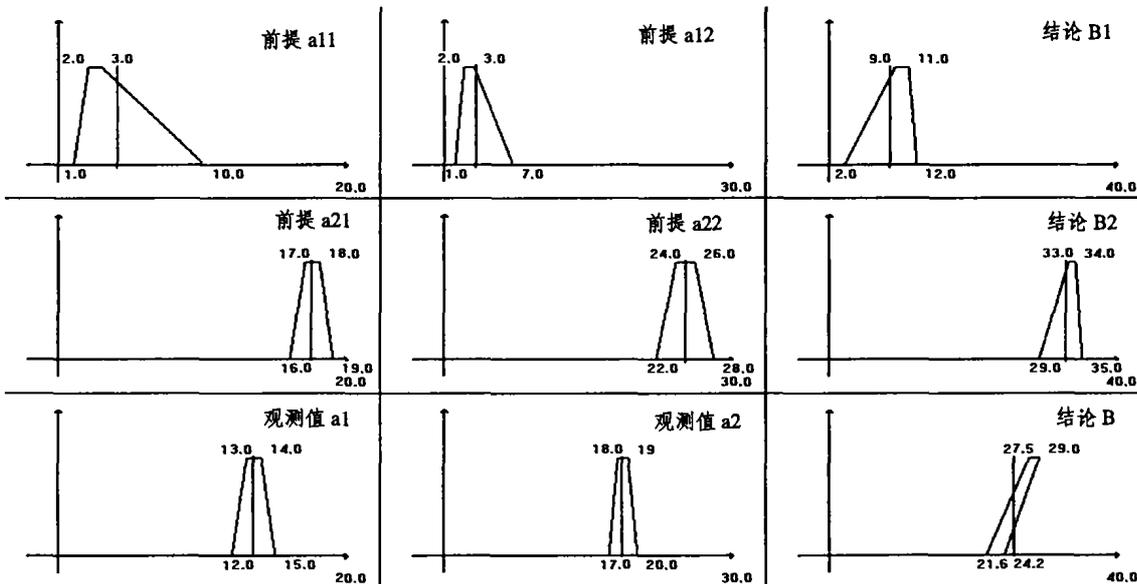


图 3 MB 算法的推理结果

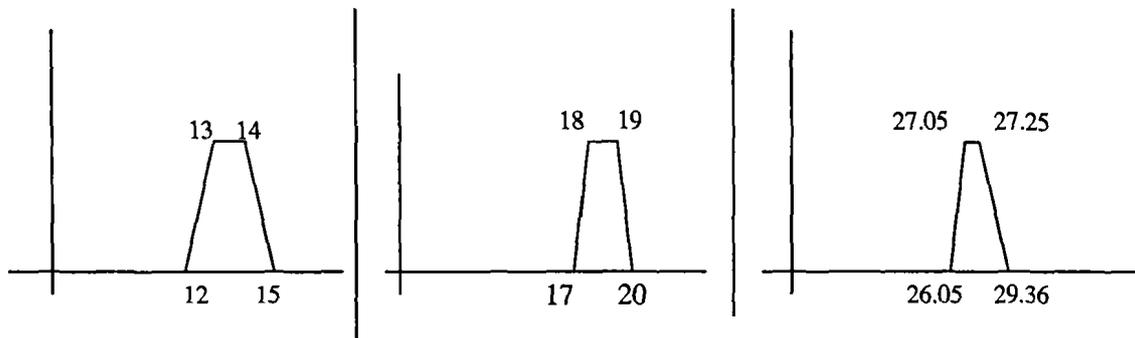


图4 多变量规则的线性插值推理方法的推理结果

从图中可以看出,同样的前提和观测值,我们的多变量规则的线性插值推理方法可以得到较好的推理结果,而且是保凸的,但使用 MB 算法得出的结论不能保证是凸的。

结论 Marsala 和 Bouchon-Meunier 提出的多维规则条件下的插值推理方法的推理结果在许多情况下是非凸的。这就使得 MB 方法在实际应用中受到很多限制。本文研究了在多变量情况下的线性插值推理,提出了一个多变量规则的线性插值推理方法,它保证了推理结果的凸性和正规性,而且是保形的。这就使得在稀疏规则的条件下,采用我们的方法可得到满意的插值推理结果。这为智能系统中的模糊推理提供了一个十分有用的工具。

参 考 文 献

1 Baranyi P, Gedeon T D, Koczy L T. A general method for fuzzy rule interpolation: Specialized for crisp triangular and trapezoidal

rules. In EUFIT'95, 1995. 99~102

2 Jenei S. A new approach for interpolation and extrapolation of compact fuzzy quantities. In: Proc. of the 21th Linz Sern. on Fuzzy Sets theory, 2000. 13~18
 3 Cross V, Sudkamp T. Geometric compatibility modification. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 84: 283~299
 4 Jenei S, Klement E P, Konzel R. Interpolation and extrapolation of fuzzy quantities - the multiple-dimensional case. Submitted
 5 区奔勤, 张先迪. 模糊数学原理及应用. 成都: 成都电讯工程学院出版社, 1989
 6 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学(E 辑), 1998, 28(3): 259~267
 7 Marsala C, Bouchon-Meunier B. Interpolative Reasoning with Multi-Variable Rules. In: proc. of joint 9th IFSA world congress and 20th NAFIPS intl. conf. 2001, 7: 2476~2482

(上接第172页)

由以上的准备,我们将得出本文的主要结果。

定义4 设 ρ 为 Fuzzy 格 $(L, \wedge, \vee, ')$ 上的等价关系。如果 ρ 满足条件: (A) $\rho = N_{apr}$, 称 ρ 为 L 上的粗相等。

下面我们给出 Fuzzy 格上粗相等的刻画。

定理2 设 $(L, \wedge, \vee, ')$ 是 Fuzzy 格, ρ 为 L 上的等价关系且 ρ 满足条件:

(B) 存在 L 上的强 Pawlak 代数 $(L, \wedge, \vee, ', \underline{apr}, \overline{apr})$ 使得 $C = \{\overline{apr}a | a \in L\} \supseteq S(N_{apr})$ 。

则下列各款等价: (1) ρ 为 L 上的粗等价; (2) $S(\rho)$ 为 $(L, \wedge, \vee, ')$ 的逆合完备子代数且 ρ 由 $S(\rho)$ 导出。

证明: (1)推(2). 设 ρ 为 L 的粗相等, 则 ρ 满足条件(A), (B)。由引理3, $S(\rho) = C = \{\overline{apr}a | a \in L\}$ 。根据引理4, $M(C) = N_{apr}$, 即 ρ 由 $C = S(\rho)$ 导出且由定理1, $C = S(\rho)$ 为 $(L, \wedge, \vee, ')$ 的逆合完备子代数。

(2)推(1). 设 $S(\rho)$ 为 $(L, \wedge, \vee, ')$ 的逆合完备子代数。由定理1, 存在一个强 Pawlak 代数 $(L, \wedge, \vee, ', \underline{apr}, \overline{apr})$ 使得

$$S(\rho) = \{\overline{apr}a | a \in L\} = C.$$

由于 $M(C) = N_{apr} = M(S(\rho))$, 由假设得 $\rho = N_{apr} = M(S(\rho))$ 。证毕。

设 U 为集合且 $|U| < \infty$, 则 $(2^U, \cap, \cup, \sim, \underline{apr}, \overline{apr})$ 为 Pawlak 代数, 也为 Fuzzy 格。设 R 为 2^U 上的等价关系, 则 Pawlak 粗代数 $(2^U, \cap, \cup, \sim, \underline{apr}, \overline{apr})$ 为 U 上的强 Pawlak 代数。如果条件(A)成立, 由引理5^[12], $S(N_{apr}) = \{\overline{apr}A | A \in 2^U\}$ 。我们有下面结论。

推论1^[12] 设 U 为非空有限集, R 为 2^U 上的等价关系。则

下列结论等价: (1) R 为 2^U 上的粗相等; (2) $S(R)$ 是 $(2^U, \cap, \cup, \sim, \underline{apr}, \overline{apr})$ 的 Boole 子代数且 R 由 $S(R)$ 导出。

参 考 文 献

1 Pawlak Z. Rough sets [J]. International journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 314~356
 2 Pawlak Z. Rough classification [J]. International Journal of Man-machine Studies, 1984, 20(1): 469~483
 3 Pawlak Z. Hard and soft sets in: Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery. edited by Ziarko M. P., Springer-Verlag, London, 130~135
 4 Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191~209
 5 Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data [M]. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991
 6 Slowinski R. Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory [M]. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992
 7 Ziarko W P. Rough Sets: Fuzzy Sets and Knowledge Discovery [M]. Springer-Verlag, London, 1994
 8 张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001
 9 Pawlak Z. Information systems: theoretical foundations [J]. Inform. Syst., 1981, 6: 205~218
 10 Pawlak Z. Rough sets [J]. Inter. J. Computer and Inform. Sci., 1982, 11: 341~356
 11 Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes [J]. Int. J. Reason, 1996, 15: 291~317
 12 Novotny M, Pawlak Z. On rough equalities [J]. Bull. PAS. Math., 1985, 33: 91~97
 13 Liu W Q. Pawlakean algebra and its properties [J] (in chinese). Fuzzy Systems and Mathematics, 1999, 13: 78~84