Fuzzy 格上的粗相等*)

吴明芬[1] 谢祥云[2]

(五邑大学信息学院 广东江门529020)[1] (五邑大学数学物理系 广东江门529020)[2]

摘 要 本文引入了 Fuzzy 格上的粗相等的定义,并给出了粗相等的刻画。作为应用,得到 Pawlak 粗代数中粗相等的刻画。

关键词 Fuzzy 格,强 Pawlak 代数,粗相等

Rough Equalities on Fuzzy Lattices

WU Ming-Fen[1] XIE Xiang-Yun[2]

(School of Information, Wuyi University, Jiangmen, Guangdong, 529020)[1]

(Department of Math. & Physics, Wuyi University, Jiangmen, Guangdong, 529020)[2]

Abstract The notion of the rough equality on Fuzzy lattices is introduced, and a characterization of the rough equality is given. As an application of the results of this paper, the characterization of the rough equality on the Pawlak rough algebra is obtained.

Keywords Fuzzy lattices,Strong Pawlak algebra,Rrough equality

1 引言

早在上世纪80年代,Pawlak[1]为研究由不充分、不完备信息[2]构成的智能信息系统引入了粗糙集理论,以期作为一般集合论的扩展。因为分类和概念的形式化[3]等实践的要求,粗糙集理论作为其它集合论的一般化的补充(例如模糊集[4]等)而得到强有力的推动,近年来成为不多见的发展非常迅速的新浮现学科领域。粗糙集理论在各种问题上的成功应用证明了它的实用性和广谱性[5~7]。

在粗糙集模型中,论域 U 中的元素常常可以用多种信息(知识)来描述。例如,在医疗专家系统中,U 中的元素是病人,病人我们可以由他们发病的症状来描述。在模式识别系统中,对象可以用它们的特征来描述。当两个不同的对象由同样的特征来描述,这时这两个对象在该系统中称之为不可识别或不可分辨的。我们可以抽象地用 U 上的一个等价关系来描述。设 ρ 为 U 上的等价关系,即满足自反性,对称性与传递性的二元关系。每个等价类由 U 中不可分辨的元素构成。对于 U 中的任意的子集 A,人们往往没有办法用已知的可采用的信息,即 U 上的等价关系 ρ 的等价类来描述,而是用 A 的一个近似对($\underline{apr}A,\overline{apr}A$)来表示。这样,$U$ 上的二元关系以及 U 中每个元素之间表示关系就是 U 上最本质的概念。这样利用论域 U 中元素之间的信息(以二元关系来表示),粗糙集理论就形成了。粗糙集理论的研究主要从两个相互联系的观点出发,一个是算子观点(公理化表示),另一个是集合的观点。这两个观点的共同点就是近似空间,进而导出上(下)近似的概念。不同点是上(下)近似的解释。算子观点认为上(下)近似是定义在论域幂集上的一对一元算子,即粗糙集是集合论带有一对一元算子的扩展;集合的观点认为上(下)近似是粗糙集的两个基本概念。算子观点和拓扑空间、模态逻辑、带算子的 Boole 代数及区间结构有密切关系,而集合观点和区间集及模糊集紧密相关。一个信息系统[9](也称为多重专家系统或知识表达系统)是一个四元组 $S=(U,A,V,f)$,其中 U 是对象集,A 是属性集,$V=\bigcup_{a\in A}V_a$,V_a 为属性 a 的取值集,f 是 $U\times A$ 到 V 的映射(称之为信息函数)。由信息系统我们可以导出一般近似空间 (U,R) 的定义。设 R 为 U 上的等价关系,$[x]_R$ 为 $x\in U$ 的等价类,$A\subseteq U$。Pawlak 引入 2^U 上的上下近似如下:

$$\underline{apr}(A)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq A\}=\bigcup\{[x]_R\in U/R\mid[x]_R\subseteq A\}$$

$$\overline{apr}(A)=\{x\in U\mid[x]_R\cap A\neq\Phi\}=\bigcup\{[x]_R\in U/R\mid[x]_R\cap A\neq\Phi\}。$$

称 $(2^U,\cap,\cup,{}^c,\underline{apr},\overline{apr})$ 为 Pawlak 粗集代数[11]。二元关系:

$$R_{apr}:=\{(X,Y)\in 2^U\times 2^U\mid\underline{apr}X=\underline{apr}Y,\overline{apr}X=\overline{apr}Y\}$$

为 2^U 上的等价关系。设 ρ 为 $(2^U,\cap,\cup,{}^c)$ 上的一个等价关系,ρ 称为粗相等关系[12],如果存在 2^U 上的 Pawlak 粗集代数 $(2^U,\cap,\cup,{}^c,\underline{apr},\overline{apr})$ 使得 $\rho=R_{apr}$。

在文[13]中,刘文奇用公理化方法给出了 Pawlak 粗集代数的格形式。

定义1[13] 设 $(L,\wedge,\vee,{}^c)$ 为 Fuzzy 格,即 L 为带逆合对应的完备的完全分配格,0和1分别为 L 的最小、最大元。若 $\underline{apr}:L\to L$ 和 $\overline{apr}:L\to L$ 满足:

(P1) $\underline{apr}\alpha=(\overline{apr}\alpha^c)^c$;

(P2) $\underline{apr}1=1$;

(P3) $\underline{apr}(\alpha\wedge\beta)=\underline{apr}\alpha\wedge\underline{apr}\beta$;

(P4) $(\forall\alpha\in L)\alpha\leqslant\overline{apr}\alpha$;

称 $(L,\wedge,\vee,{}^c,\underline{apr},\overline{apr})$ 为 Pawlak 代数。

引理1[13] 设 $(L,\wedge,\vee,{}^c,\underline{apr},\overline{apr})$ 为 Pawlak 代数。则下

*)基金项目:本文得到国家自然科学基金资助(60075014),广东省自然科学基金(No. 011471、000864)和广东省教育厅自然科学基金和"千百十工程"优秀人才基金资助项目(No. Q 校02050)资助。吴明芬 副教授,硕士,主要从事序代数理论,模糊代数和粗集理论研究。谢祥云 教授,博士,研究方向:序半群的代数理论,模糊代数,粗集理论。

列关系式成立：

(1)$(\forall\ \alpha\in L)\underline{apr}\alpha\leqslant\alpha\leqslant\overline{apr}\alpha$；

(2)$\underline{apr}1=\overline{apr}1=1,\underline{apr}0=\overline{apr}0=0$；

(3)$\alpha\leqslant\beta\Rightarrow\underline{apr}\alpha\leqslant\underline{apr}\beta,\overline{apr}\alpha\leqslant\overline{apr}\beta$；

(4) $\underline{apr}(\alpha\vee\beta)\geqslant\underline{apr}\alpha\vee\wedge\underline{apr}\beta$；

(5)$\overline{apr}(\alpha\wedge\beta)\leqslant\overline{apr}(\alpha\wedge\beta)$；

(6)$\overline{apr}(\alpha\vee\beta)=\overline{apr}\alpha\vee\overline{apr}\beta$；

(7)$\underline{apr}\alpha^c=(\overline{apr}\alpha)^c$。

本文首先引入强 Pawlak 代数的概念，在强 Pawlak 代数上引入粗相等且给出了它的刻画。作为推论，我们得出 Pawlak 粗代数粗相等的刻画。本文没有给出但使用的术语和记号参见文[8]。

2 粗相等

定义2 设 L 为 Fuzzy 格，$C\subseteq L$ 且 $C\neq\Phi$。C 称为 L 的完备子代数，如果 C 满足：(1)$0,1\in C$；(2)$\forall\ x_i\in C\Rightarrow\wedge x_i,\vee x_i\in C$ 。

L 的完备子代数 C 称为 L 的逆合完备子代数，如果 C 还满足：(3)$x\in C\Rightarrow x^c\in C$ 。

引理2 C 为 Fuzzy 格 L 的完备子代数当且仅当对任意 $x\in L,\{t\in C|t\geqslant x\}\neq\Phi$ 且在 C 中有最小元；$x\in L,\{t\in C|t\leqslant x\}\neq\Phi$ 且在 C 中有最大元。

证明：设 C 为 L 的完全子代数，由(1)得 $x\in L,\{t\in C|t\geqslant x\},\{t\in C|t\leqslant x\}$ 均为 L 的非空子集且 $\wedge\{t\in C|t\geqslant x\},\vee\{t\in C|t\leqslant x\}$ 存在，分别为集 $\{t\in C|t\geqslant x\}$ 的最小元及 $\{t\in C|t\leqslant x\}$ 的最大元。

反之，取 $x=1\in C,\{t\in C|t\geqslant x\}\neq\Phi$，只有一个元素1，因此有最小元1，$1\in C$。相似地，由 $0\in L$ 得出 $0\in C$。$\forall\ x_i\in C,i\in T,\{t\in C|t\leqslant\vee_{i\in T}x_i\}$ 在 C 中存在最大元 z，我们有 $z\in C$ 且 $z\leqslant\vee_{i\in T}x_i$。另一方面，$x_i\leqslant\vee_{i\in T}x_i$ 且 $x_i\in C,\forall\ i\in T$。从而 $x_i\in C,\forall\ i\in T$。故 $\vee_{i\in T}x_i\leqslant z$，即 $\vee_{i\in T}x_i=z\in C$。类似地可证 $\wedge_{i\in T}x_i\in C$。证毕。

由引理2，设 C 为 L 的逆合完备子代数，记

$$(\forall\ x\in L)(iC)(x)=\wedge\{t\in C|t\geqslant x\},$$
$$(0C)(x)=\vee\{t\in C|t\leqslant x\}\ 。$$

则二元关系

$$M(C):=\{(x,y)\in L\times L|(0C)(x)=(0C)(y),(iC)(x)=(iC)(y)\}$$

为 L 上的等价关系。设 ρ 为 L 上的等价关系，如果存在 L 上的完备子代数 C 使得 $\rho=M(C)$，则称 ρ 为 C 诱导的。我们下面记 $\{x\in C|\{x\}\in L/\rho\}$ 为 S/ρ。

定义3 设$(L,\wedge,\vee,^c)$为 Fuzzy 格。若$\underline{apr}:L\to L$ 和$\overline{apr}:L\to L$ 满足(P1)、(P2)及(P4)且满足：

(P3)'$(\forall\ \alpha_i\in L)\underline{apr}(\wedge_{i\in T}\alpha_i)=\wedge_{i\in T}\underline{apr}\alpha_i$；

(P5)$(\forall\ \alpha\in L)\underline{apr}\overline{apr}\alpha=\overline{apr}\alpha$；

称$(L,\wedge,\vee,^c,\underline{apr},\overline{apr})$为强 Pawlak 代数。

显然强 Pawlak 代数是 Pawlak 代数。由定义1，3我们不难推出：

性质1 设$(L,\wedge,\vee,^c,\underline{apr},\overline{apr})$为强 Pawlak 代数。则以下各款成立：(1)$(\forall\ \alpha\in L)\underline{apr}\underline{apr}\alpha=\underline{apr}\alpha$；(2)$(\forall\ \alpha\in L)\overline{apr}\,\overline{apr}=\overline{apr}\alpha$；(3)$(\forall\ \alpha\in L)\overline{apr}\underline{apr}\alpha=\underline{apr}\alpha$ 。

定理1 设 L 为 Fuzzy 格，$\Phi\neq C\subseteq L$。C 为 L 的逆合完备子代数当且仅当存在 L 上的强 Pawlak 代数$(L,\wedge,\vee,^c,\underline{apr},\overline{apr})$使得 $C=\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}$。

证明：设 $C=\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}$。则由引理1(2)，得$0,1\in C$，$\forall\ \alpha_i\in L,i\in T$。

$$\wedge_{i\in T}\underline{apr}\alpha_i=\wedge_{i\in T}\underline{apr}(\overline{apr}\alpha_i)=\underline{apr}(\wedge_{i\in T}\overline{apr}\alpha_i)=\overline{apr}[\underline{apr}(\wedge_{i\in T}\overline{apr}\alpha_i)]\in C,\quad(性质1)$$

且

$$\vee_{i\in T}\overline{apr}\alpha_i=\vee_{i\in T}((\overline{apr}(\alpha_i^c)^c)^c)^c=(\wedge_{i\in T}(\overline{apr}(\alpha_i^c)^c)^c)^c=(\wedge_{i\in T}\underline{apr}_{\alpha_i^c})^c=(\underline{apr}\wedge_{i\in T}\alpha_i^c)^c=(\underline{apr}(\vee_{i\in T}\alpha_i)^c)^c=\overline{apr}(\vee_{i\in T}\alpha_i)\in T。$$

又

$$(\overline{apr}\alpha)^c=(\overline{apr}(\alpha^c)^c)^c=\underline{apr}\alpha^c=\overline{apr}(\underline{apr}\alpha^c)\in C\ 。$$

故 C 为 L 的逆合完备子代数。

反之，设 C 为 L 的逆合完备子代数，定义 L 上的二个一元运算：

$$(\forall\ \alpha\in L)\underline{apr}\alpha:=\vee\{\alpha_t\in C|\alpha_t\leqslant\alpha\},$$
$$\overline{apr}\alpha:=(\underline{apr}\alpha^c)^c=\wedge\{\alpha_t^c|\alpha_t\in C,\alpha_t\leqslant\alpha^c\}。$$

由$\underline{apr}$和$\overline{apr}$的定义得出它们是对偶的，因此满足($P1$)。因为$1\in C$，所以$\underline{apr}1=1$，即(P2)成立。

$$(\forall\ \alpha_i\in L,i\in T)\underline{apr}\wedge_{i\in T}\alpha_i=\vee\{\alpha_t\in C|\alpha_t\leqslant\wedge_{i\in T}\alpha_i\}$$
$$=\wedge_{i\in T}(\vee\{\alpha_t\in C|\alpha_t\leqslant\alpha_i\})(L 是完全分配的)$$
$$=\wedge_{i\in T}\underline{apr}\alpha_i。$$

因为 C 为 L 的逆合完备子代数，所以由$\overline{apr}\alpha$ 的定义得出$\overline{apr}\alpha\in C,\forall\ \alpha\in L$。因此

$$\underline{apr}(\overline{apr}\alpha)=\vee\{\alpha_t\in C|\alpha_t\leqslant\overline{apr}\alpha\}=\overline{apr}\alpha。$$

故(P5)成立。

由 L 的逆合性及$\underline{apr}\alpha^c\leqslant\alpha^c,\forall\ \alpha\in L$，得 $\alpha\leqslant(\underline{apr}\alpha^c)^c=\overline{apr}\alpha,\forall\ \alpha\in L$。综上所述得$(L,\wedge,\vee,^c,\underline{apr},\overline{apr})$为强 Pawlak 代数，且$\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}\subseteq C$。又设 $\alpha\in C$，则$\underline{apr}\alpha=\vee\{\alpha_t\in C|\alpha_t\leqslant\alpha\}=\alpha$ 从而$\underline{apr}\alpha^c=\alpha^c,\forall\ \alpha\in L$，因此 $\alpha=(\alpha^c)^c=(\underline{apr}\alpha^c)^c=\overline{apr}\alpha,\forall\ \alpha\in L$。故 $C=\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}$。证毕。

引理3 设$(L,\wedge,\vee,^c,\underline{apr},\overline{apr})$为强 Pawlak 代数。定义 L 上的二元关系：

$$N_{apr}:=\{(\alpha,\beta)\in L\times L|\underline{apr}\alpha=\underline{apr}\beta,\overline{apr}\alpha=\overline{apr}\beta\}$$

则 N_{apr}为 L 上的等价关系且$\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}\subseteq S(N_{apr})$。

证明：容易验证 N_{apr}为 L 上的等价关系。设 $\beta\in\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}$，则存在 $\alpha\in L$ 使得 $\beta=\overline{apr}\alpha$。如果 $\gamma\in L$ 且$(\gamma,\beta)\in N_{apr}$，则

$$\underline{apr}\beta=\underline{apr}\overline{apr}\alpha=\overline{apr}\alpha=\beta=\underline{apr}\gamma,$$

从而$\overline{apr}\beta=\overline{apr}\underline{apr}\beta=\underline{apr}\beta=\beta=\overline{apr}\gamma$。

故$\underline{apr}\gamma=\overline{apr}\gamma=\beta$。又$\underline{apr}\gamma\leqslant\gamma\leqslant\overline{apr}\gamma$ 得 $\gamma=\overline{apr}\gamma=\beta$。因此 $\beta\in S(N_{apr})$。证毕。

引理4 设$(L,\wedge,\vee,^c,\underline{apr},\overline{apr})$为强 Pawlak 代数。如果$\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\}=S(N_{apr})$，则 $M(\{\overline{apr}\alpha|\alpha\in L\})=S(N_{apr})$。

证明：设$(\alpha,\beta)\in N_{apr}$，则$\underline{apr}\alpha=\underline{apr}\beta,\overline{apr}\alpha=\overline{apr}\beta$。令 $C=\{\overline{apr}\delta|\delta\in L\}$，由定义$(iC)(\alpha)=\wedge\{t\in C|t\geqslant\alpha\}$。因为$\overline{apr}\alpha\geqslant\alpha$ 且$\overline{apr}\alpha\in C$，因此$\overline{apr}\alpha\geqslant(iC)(\alpha)$。如果 $\gamma\in C$ 且 $\gamma\geqslant\alpha$，由引理3的证明，则$\overline{apr}\gamma=\gamma\geqslant\overline{apr}\alpha$。因此$\overline{apr}\alpha=(iC)(\alpha)$。类似地，我们可以证明$\underline{apr}\alpha=(0C)(\alpha)$。由 $M(C)$的定义得出$(\alpha,\beta)\in M(C)$。

反之，由$(\alpha,\beta)\in M(C)$容易从上推导过程得出$(\alpha,\beta)\in N_{apr}$，故 $M(C)=N_{apr}$。证毕。

（下转第176页）

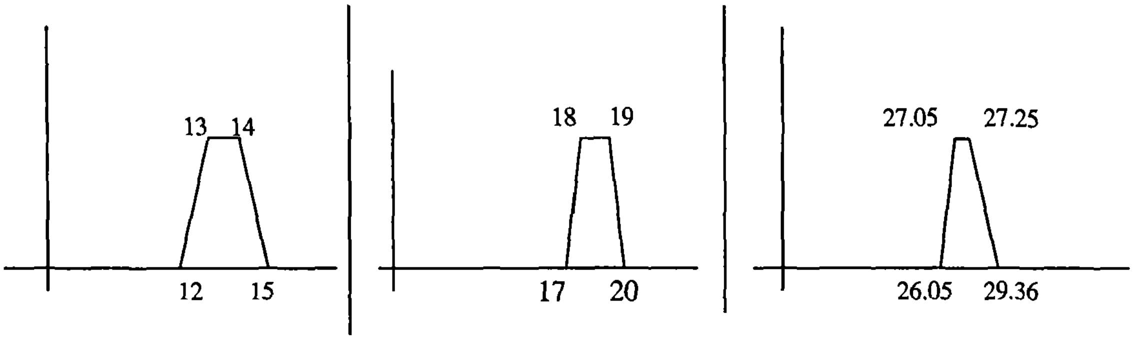

图4 多变量规则的线性插值推理方法的推理结果

从图中可以看出，同样的前提和观测值，我们的多变量规则的线性插值推理方法可以得到较好的推理结果，而且是保凸的。但使用 MB 算法得出的结论不能保证是凸的。

结论 Marsala 和 Bouchon-Meunier 提出的多维规则条件下的插值推理方法的推理结果在许多情况下是非凸的。这就使得 MB 方法在实际应用中受到很多限制。本文研究了在多变量情况下的线性插值推理，提出了一个多变量规则的线性插值推理方法，它保证了推理结果的凸性和正规性，而且是保形的。这就使得在稀疏规则的条件下，采用我们的方法可得到满意的插值推理结果。这为智能系统中的模糊推理提供了一个十分有用的工具。

参考文献

1 Baranyi P, Gedeon T D, Koczy L T. A general method for fuzzy rule interpolation: Specialized for crisp triangular and trapezoidal rules. In EUFIT'95, 1995. 99～102

2 Jenei S. A new approach for interpolation and extrapolation of compact fuzzy quantities. In: Proc. of the 21th Linz Sern. on Fuzzy Sets theory, 2000. 13～18

3 Cross V, Sudkamp T. Geometric compatibility modification. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 84: 283～299

4 Jenei S, Klement E P, Konzel R. Interpolation and extrapolation of fuzzy quantities - the multiple-dimensional case. Submitted

5 区奕勤，张先迪. 模糊数学原理及应用. 成都：成都电讯工程学院出版社，1989

6 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学(E 辑)，1998，28(3)：259～267

7 Marsala C, Bouchon-Meunier B. Interpolative Reasoning with Multi-Variable Rules. In: proc. of joint 9th IFSA world congress and 20th NAFIPS intl. conf. 2001, 7: 2476～2482

(上接第172页)

由以上的准备，我们将得出本文的主要结果。

定义4 设 ρ 为 Fuzzy 格$(L,\wedge,\vee,')$上的等价关系。如果 ρ 满足条件：(A)$\rho=N_{apr}$，称 ρ 为 L 上的粗相等。

下面我们给出 Fuzzy 格上粗相等的刻画。

定理2 设$(L,\wedge,\vee,')$是 Fuzzy 格，ρ 为 L 上的等价关系且 ρ 满足条件：

(B)存在 L 上的强 Pawlak 代数$(L,\wedge,\vee,',\underline{apr},\overline{apr})$使得 $C=\{\overline{apr}\alpha\mid\alpha\in L\}\supseteq S(N_{apr})$。

则下列各款等价：(1)ρ 为 L 上的粗等价；(2)$S(\rho)$为$(L,\wedge,\vee,')$的逆合完备子代数且 ρ 由 $S(\rho)$导出。

证明：(1)推(2)。设 ρ 为 L 的粗相等，则 ρ 满足条件(A)，(B)。由引理3，$S(\rho)=C=\{\overline{apr}\alpha\mid\alpha\in L\}$。根据引理4，$M(C)=N_{apr}$，即 ρ 由 $C=S(\rho)$ 导出且由定理1，$C=S(\rho)$ 为$(L,\wedge,\vee,')$的逆合完备子代数。

(2)推(1)。设 $S(\rho)$为$(L,\wedge,\vee,')$的逆合完备子代数。由定理1，存在一个强 Pawlak 代数$(L,\wedge,\vee,',\underline{apr},\overline{apr})$使得

$S(\rho)=\{\overline{apr}\alpha\mid\alpha\in L\}=C$。

由于 $M(C)=N_{apr}=M(S(\rho))$，由假设得 $\rho=N_{apr}=M(S(\rho))$。证毕。

设 U 为集合且 $|U|<\infty$，则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{apr},\overline{apr})$为 Pawlak 代数，也为 Fuzzy 格。设 R 为 2^U 上的等价关系，则 Pawlak 粗代数$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{apr},\overline{apr})$为 U 上的强 Pawlak 代数。如果条件(A)成立，由引理5[12]，$S(N_{apr})=\{\overline{apr}A\mid A\in 2^U\}$。我们有下面结论。

推论1[12] 设 U 为非空有限集，R 为 2^U 上的等价关系。则下列结论等价：(1)R 为 2^U 上的粗相等；(2)$S(R)$是$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{apr},\overline{apr})$的 Boole 子代数且 R 由 $S(R)$导出。

参考文献

1 . Pawlak Z. Rough sets [J]. International journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 314～356

2 Pawlak Z. Rough classification [J]. International Journal of Man-machine Studies, 1984, 20(1): 469～483

3 Pawlak Z. Hard and soft sets in : Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery. edited by Ziarko M. P. , Springer-Verlag, London, 130～135

4 Dubois D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191～209

5 Pawlak Z. Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data [M]. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991

6 Slowinski R. Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory [M]. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992

7 Ziarko W P. Rough Sets: Fuzzy Sets and Knowledge Discovery [M]. Springer-Verlag, London, 1994

8 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001

9 Pawlak Z. Information systems: theoretical foundations [J]. Inform. Syst. , 1981, 6: 205～218

10 Pawlak Z. Rough sets [J]. Inter. J. Computer and Inform. Sci. , 1982, 11: 341～356

11 Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes [J]. Int. J. Reason, 1996, 15: 291～317

12 Novotny M, Pawlak Z. On rough equalities [J]. Bull. PAS. Math. , 1985, 33: 91～97

13 Liu W Q. Pawlakean algebra and its properties [J](in chinese). Fuzzy Systems and Mathematics, 1999, 13: 78～84