

基于泛逻辑的分形与混沌逻辑初探^{*}

陈志成 何华灿 毛明毅

(西北工业大学计算机科学与工程系 西安710072)

摘 要 人们对自然的看法正经历着一个根本性的改变,即转向多重性、暂时性和复杂性,混沌学与分形论则是研究此类非线性自然系统的新兴科学。本文分析了分形与混沌的基本特征及其与泛逻辑的相互关系,讨论了建立分形与混沌逻辑的必要性和可能性,并给出了分形逻辑的研究纲要和混沌逻辑的实现途径。文章指出:(1).分形与混沌逻辑的产生既是人类对自然规律认识深入的必然产物,也是深入认识自然的客观需要;(2).泛逻辑学原理为建立具体的逻辑体系提供了理论框架与生成规则,这使得建立分形与混沌逻辑成为可能;(3).分形与混沌逻辑在复杂系统的研究中将扮演重要的角色,并在其应用中逐渐自我完善。

关键词 泛逻辑,分形逻辑,混沌逻辑,非线性科学

Exploration of Fractal and Chaos Logics Based on Universal Logic

CHEN Zhi-Cheng HE Hua-Can MAO Ming-Yi

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract Opinions that people think about the nature are basically changing, that is to say, turning to multimode, temporality and complexity. Fractal and chaos are sunrise sciences, which research nonlinear natural system. This paper mainly analyzes the basic characteristics of fractal phenomenon and chaos system, expatiates on the correlation of fractal, chaos and universal logic, fully discusses the necessary and probability of setting up fractal logic and chaos logic, and gives the compendium of fractal logic and the way of the implementing of chaos logic. The paper raises: a). Along with the fact that people search after the order of nature more and more thoroughly, the naissance of chaos logic and fractal logic is not only the inevitable production, but also the objective requirement for continuing to do that. b). The principles of universal logic offer the formal frame and the producing rules for establishing the architecture of a concrete logic system, and this makes it possible to set up fractal logic and chaos logic. c). Fractal and chaos logics will play an important and positive role in researching complicated system, and gradually consummate themselves in the applications.

Keywords Universal logic, Fractal logic, Chaos logic, Nonlinear sciences

1 分形与混沌逻辑的提出背景

逻辑是关于正确思维的形式与规律的科学。思维的逻辑形式是客观现实在思维中的反映。逻辑对象包括:形式逻辑与辩证逻辑、逻辑这一关于正确思维的科学的目的是与任务以及逻辑对于科学与实践活动的意义^[1,2]。了解逻辑学的研究对象及其作用,有助于理解本文“为什么要建立分形与混沌逻辑”这一问题。

1.1 经典逻辑系统之特征

经典逻辑通常指二值逻辑,这里泛指除二值逻辑外,亦包括多值逻辑、数理逻辑。依照泛逻辑的观点^[3],是指“刚性逻辑”。其主要特征有:

(1)命题真值的整数性 在二值逻辑中,命题的真值只能是0和1之一。随着其它学科,尤其控制论发展的需要,出现了多值逻辑,允许命题的真值有多种取值。数理逻辑的产生则使代数系统符号化。然而,这些都是“刚性逻辑”。因为它们之中的命题真值取值仍然是整数。

(2)命题关系的独立性 在经典逻辑推理系统中,通常假定各个命题之间是相互独立的关系,否则推理很难进行。换句话说,通常没有考虑命题之间的相关性。即使是在条件概率逻辑中,考虑的也仅仅是“主从式关系”,而“并行性关系”却避而远之。这里“主从式关系”是指:命题B为真的概率依赖与事件A为真的概率,A对B有影响作用,而B不能影响A,其本质是“串行推理”,如图1(a);“并行式关系”是指命题A和B为真的概率可以分别由其它方式确定,二者没有相互依赖关系,但是在某个具体推理系统,二者可能有相互交叉(吸引、排斥)的关系,这种交叉(吸引、排斥)的关系对二者是相互作用的,是“并行的”,命题A、B及这种关系影响命题C的真值,如图1(b)。

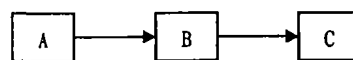


图1(a) 命题A与B的“主从式关系”

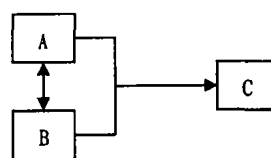


图1(b) 命题A与B的“并行式关系”

^{*} 本文受国家自然科学基金项目资助(编号:60273087)。陈志成 博士生,主要研究领域为分形与混沌中的泛逻辑,因特网操作系统。何华灿 教授,博士生导师,主要研究方向为人工智能基础及其应用,泛逻辑学与不确定性推理。毛明毅 博士生,主要研究方向为面向对象的泛逻辑学原理。

(3)连接词运算模型的唯一性 在经典逻辑中,甚至在模糊逻辑中^[4,5],某一连接词的运算都是确定的规则,比如: $\sim P = 1 - P$, $P \wedge Q = \min(P, Q)$, $P \vee Q = \max(P, Q)$, $P \oplus Q = \min(1, 1 - P + Q)$, $P \ll Q = 1 - |P - Q|$ 。关于这些连接词运算规则的合理性在文[3]中已有充分讨论。由于客观事物的复杂性,连接词的运算模型应该允许定义在算子簇上,并随着命题之间的相关性变化而连续改变。

1.2 分形与混沌逻辑之必要

科学家的天职就是探索大自然的规律。物理学家要搞清楚基本粒子的自旋、色与味。化学家则研究物质的构成,探索新的化学元素,生物学家研究生物的演变与进化……。然而还有许多更为复杂的问题在困扰着人们:为什么天气变化存在着不可预测性^[6-8],为什么在两个形式与意义极不相同的方程迭代中存在“费根鲍姆常数”^[9,14]?人们相信这些深奥的问题中蕴涵着大自然更深一层的规律,这就是混沌。在对混沌的进一步研究中,发现其无序中蕴含着有序,而这种有序具有无限循环而又永不重复的性质,具有“自相似性”。然而,研究“自相似性”的分形论作为一门新兴学科已经有了较大进展,因而研究混沌的一大内容就是研究分形,而研究分形却成为研究混沌的一条有效途径。

至今,尽管分形论在分子科学、物理学、化学、生命科学等领域有了一定的应用与发展^[10-13],但其更多的却仍是一门计算数学,对许多复杂系统的推理过程和结果预测仍是少能为力,而此时的混沌学几乎仍限于控制系统中的应用。如何才能使分形论与混沌学得到更快发展与广泛应用呢?21世纪的科学是复杂性科学,它们如何充分发挥其作用呢?显然,对复杂系统中各要素、各过程的判断、推理与控制将会成为研究热点,而这归根结底是需要有正确有效的逻辑推理,这就势必要要求逻辑学的发展。事实就是这样,在正需要深入与发展经典逻辑的时候,一门新的学科——泛逻辑学产生了,它分析了经典逻辑与模糊逻辑的使用范围,并提出了所有逻辑学应该具备的四要素,这就为建立“分形逻辑”和“混沌逻辑”提供了理论构架和生成规则。因此可以说,分形逻辑与混沌逻辑的产生既是人类对自然规律认识深入的必然产物,也是深入认识的客观需要,是研究上述复杂系统的强有力的“工具逻辑”。

2 混沌与分形的特征与关系

2.1 混沌的基本特征

在物质世界中的混沌现象处处可见,从宏观世界到微观世界概不例外。它把表象的无序性与内在的规律性巧妙地结合在一起,其基本特征有^[9]:

(1)内随机性 体系处于混沌状态是由体系内部动力学随机性产生的不规则行为。混沌系统内的局部不稳定正是内随机性的特点,也是对初值敏感性的原因。洛伦兹就是据此提出著名的蝴蝶效应的。

(2)分维性 混沌具有分维性质,是指系统运动轨迹在相空间的几何形态可以用分维来描述。系统的混沌运动在相空间无穷缠绕、折叠和扭曲,构成具有无穷层次的自相似结构,这种结构就是著名的奇怪吸引子。

(3)无序中的有序性 混沌现象是一种无周期性的有序态,具有无限层次的自相似结构,存在无标度区域。只要数值计算的精度或实验设备的分辨率足够高,则可以从中发现小尺度混沌的有序运动花样,具有标度律性质。

2.2 分形的基本特征

分形最明显的特征是自相似性,其它的特征包括无限复杂、无限细致等^[9,15]。

(1)自相似性 自然界中许多植物具有自相似特性,例如,在厥类植物中,枝杈是整个植物的小版本,而枝杈的枝杈则是更小的版本。这种特性可以无限地持续下去,如图2。分形的自相似性可以描述植物、雪花等自然物体,同样也可以依此生成风景图像,音乐作品。

(2)无限精细和无限复杂 分形的另一个重要特征是具有无限精细和无限复杂性。这个性质在迭代函数系统(IFS)中得到了充分的体现与应用。

(3)分维性 分形的正式定义是依据分维来判断的,分维同时又是分形事物所具备的特征,用它可以更为贴近地描述分形事物。可以说,如果没有分维的概念,目前是很难定量刻画分形事物的。



图2 分形植物

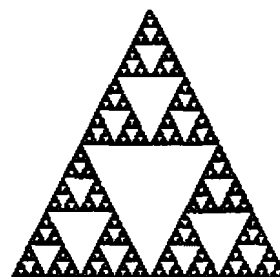


图3 Sierpinski 三角形

2.3 混沌与分形的关系

理解混沌与分形的关系是很重要的,这里归纳为以下三个方面:

(1)从混沌到有序 我们知道,混沌是一种非周期的动力学行为,看似无序,杂乱无章,但却蕴藏着丰富的内涵,如奇异吸引子、分支、窗口等。因此可以说,混沌中蕴含着有序,而决不仅仅是一个无从控制的随机过程。Sierpinski 三角形(如图3)是利用一些非常简单的规则,作一些很简单的计算,所绘出的一幅奇妙的三角形图案。这意味着,有时即使缺乏计算机理(甚至只用随机的方法)也不影响三角形结果的产生。这一点正是混沌研究所必不可少的特性,也即无序中蕴含着有序。

(2)从有序到相似 自然界的有序特征是自然界自组织动力学行为的反映。有序的事物就意味着有规律可循。这里的“有序”是“广义有序”,它不单指线性科学,更重要的是非线性科学中的规律。研究表明,蕴涵在混沌内部的有序具有分数维的特性,如缭绕升起的炊烟,如螺旋般的上升。每次螺旋形成一个不自封的圈,各个圈是相似的。

(3)从相似到分形 对混沌的进一步研究证实,混沌之所以具有分数维的性质,是因为混沌的动力学行为具有自相似的性质。因而可以用分形来研究混沌,使得混沌与分形成为研

究非线性科学的强有力工具。

从混沌到有序、从有序到相似、从相似到分形,这就很好地概括了混沌与分形之间的相互关系。由于混沌现象具有分维性质,从而使得研究分形成为研究混沌的一条有效途径。

3 基于泛逻辑的分形逻辑探究

3.1 泛逻辑学原理简介

由于计算机与信息技术和人工智能的发展需要,一种强调不同对象(事务、命题、连接词等)间关系柔性的“泛逻辑学”^[3]诞生了。泛逻辑学是一种“既完备而又开放的”逻辑学理论体系结构,其完备性在于它提出了目前所有存在的各类逻辑的共同特征,即四大要素,同时给出了一个可以按具体需要来生成各具体应用逻辑的逻辑生成器;其开放性在于这套逻辑体系允许有新的逻辑体系加入其中,必要时允许对其体系结构进行扩充和完善。

泛逻辑学提出的任何一个逻辑都应至少具备的四个特征要素是:研究论域、命题连接词、相关量词、常用规则集与合适的推理模式。对于某一具体逻辑而言,还应该有的语义解释,同时允许有各自的其它特征,必要时可以扩充或修正泛逻辑这一框架。本文以及笔者今后长期的工作之一将是试图应

用泛逻辑学原理的四要素及逻辑生成器来建立分形逻辑与混沌逻辑。

3.2 分形逻辑的研究纲要

3.2.1 分形逻辑的四要素

①分形逻辑的研究论域。是所有具有分形特征的事物,它既可以是几何形式上的自相似结构,也可以是统计意义上的自相似行为。建立分形逻辑,就是在分形基础上建立逻辑推理系统,其命题的真值域是多维超序空间:

$$W = \{\perp\} [0, 1]_{n(a)}, n > 0.$$

显然,在分形逻辑中,由于分维的非整数性, W 也必定是基于连续值基的分维空间。由于混沌现象产生的必要条件是分维大于3,因此在建立分形逻辑与混沌逻辑时,有必要考虑把命题的真值域拓展至 $[0, \infty]$, 甚至 $[-\infty, +\infty]$ (在分形中,有时 D 为负数是有意义的)。

②分形逻辑的命题连接词。从分形论原理出发,把积和原理、加和原理、和并原理等^[9]分别与泛逻辑中的泛与、泛或、蕴涵等联系起来。自相似原理与级差原理则反映了泛逻辑学中的广义相关性和广义自相关性。表1给出了基于泛逻辑学原理的分形逻辑的连接词运算模型,笔者利用它们已经得到良好的实验结果,这将另文专述。

表1 分形逻辑的连接词及其运算模型

序号	连接词	符号	运算模型
1	非	$\sim_k$	$N(x, k) = D(R - D^{-1}(x))$
2	与	$\wedge_k$	$A(x, y, h) = \Gamma^k [D((D^{-1}(x))^m + D^{-1}(y)^m - R)^{1/m}]$
3	或	$\vee_k$	$O(x, y, h) = \Gamma^k [D(R - ((R - D^{-1}(x))^m + (R - D^{-1}(y))^m - R)^{1/m})]$
4	蕴涵	$\rightarrow_k$	$I(x, y, h) = \Gamma^k [D((R - D^{-1}(x))^m + D^{-1}(y)^m)^{1/m}]$
5	等价	$\leftrightarrow_k$	$E(x, y, h) = ite\{D((R + D^{-1}(x)^m - D^{-1}(y)^m)^{1/m}) m \leq 0; D((R - D^{-1}(x)^m - D^{-1}(y)^m)^{1/m})\}$
6	平均	$\oplus_k$	$V(x, y, h) = D(R - (((R - D^{-1}(x))^m + (R - D^{-1}(y))^m)/2)^{1/m})$
7	组合	$\odot_k$	$C^*(x, y, h) = ite\{\Gamma^k [D((D^{-1}(x))^m + D^{-1}(y)^m - e^m)^{1/m})] D^{-1}(x) + D^{-1}(y) < 2e; D(R - (\Gamma^{R-e} [((R - D^{-1}(x))^m + (R - D^{-1}(y))^m) - (R - e)^m]^{1/m})) D^{-1}(x) + D^{-1}(y) > 2e;$
8	级差	$\otimes_k$	$R(x, y, h) = D(R - (((R - D^{-1}(x))^m + (R - D^{-1}(y))^m)^{1/m}))$

注释:

a) R 为研究论域的基空间维数, D 为分形事物的实际分形维数,函数 $D(x)$ 表示对分形对象“ x ”求分形维数,而 $D^{-1}(x)$ 则表示构造分维为“ x ”的分形对象及其所在分维空间, $D^{-1}(x)$ 与 $D(x)$ 表示两个相反的操作过程,而不是纯数学意义上的互逆运算;

b) h 表示广义相关性系数, k 表示广义自相关系数,可参见文[3];

c) 在算子簇中, $m \in R$, 参数 m 与 h 之间存在近似关系: $m = (3 - 4h)/(4h(1 - h))$;

d) 函数 $\Gamma^k [x]$ 为 $[0, R]$ 上的有界截取函数,当 $x > R$ 时取值为 R , 当 $x < 0$ 时取值为 0 , 否则为 x ;

e) $S = ite\{\beta | a; \gamma\}$ 为条件表达式,表示当 a 为真时 $S = \beta$, 否则 $S = \gamma$;

f) 在公式7中, e 代表组合算子 $\odot_k$, 在公式8中, n 代表分形的级差数。

③分形逻辑的量词。目前泛逻辑学提供的量词有:全称量词、存在量词、域元量词、假设量词、范围量词、位置量词、过渡量词。这些量词已经可以满足分形逻辑的需要了。

④分形逻辑的常用公式集和推理模式。根据命题连接词和量词的性质可以得到非常丰富的公式集,对分形逻辑而言,需要研究分形有那些类别,各自特点如何,分形逻辑在各个复杂系统中的作用如何,也即,进行“分形推理”的目的。知道了这些,就可以建立常用公式集和相应的推理模式。

3.2.2 分形逻辑的语义解释 任何逻辑在具体系统中进行推理时,都会赋予相关命题、连接词、量词以及推理规则的具体语义^[16]。在应用分形逻辑进行有关分形系统的推理时,也要根据实际系统的含义而进行语义解释。比如,设命题的真值为对应分形事物的分维,命题之间和连接词之间的相关性大小表示分形事物相互之间的相似程度等。

3.2.3 分形逻辑的应用研究 尽管分形作为一门学科

的时间还不长,但由于其揭示了自然界的自相似规律,因而在哲学、数学、物理学、分子化学、材料科学、生命科学、生物学、人类学、计算机图像压缩、信息科学、地质学、艺术美学等众多领域都有不同程度的应用,而且其应用越来越广泛。然而,分析这些应用后发现:分形藐视边缘科学(其实应该是,但目前还不够),但在其中主要还是扮演“计算数学”的角色,人们多用函数迭代的方法来展示分形事物的动力学行为。然而在诸如控制系统的长期预测,以及许多典型的分形问题面前,仅仅由数学出生的分形却遇到了前所未有的困难。这里举两个例子来说明分形逻辑的应用。

①这是一个典型的分形问题^[10, 12],称其为“分形人问题”,简化如下:

一个分形的人,
走过分形的一英里,
买了一只分形的猫,
抓了一只分形的鼠。
分形人分形的大脑皮层里,

构思着分形猫分形地吞下分形老鼠,
分形老鼠被分形猫分形的小肠壁分形地吸收……

问题1 经过多少个分形的一分钟后,分形老鼠才会被吸收完?或者问:经过分形的一分钟后,分形老鼠是否被吸收完?

②这里是笔者列举的“毛毯和并”问题,主要用来说明分形逻辑的连接词的运算:

假设有面料相似但又不完全相同的两床毛毯 T_1 和 T_2 ,毛毯自然是有粗糙度的,即不光滑。设按某种测量方法已经计算出其粗糙度分别为 D_1 和 D_2 。

问题2 假设把两床毛毯的面料拆散后混合在一起,重新织出面积为 T_1 和 T_2 面积之和的新毛毯 T_3 ,试问新毛毯 T_3 的表面粗糙度 D_3 是多少?

由于问题自身的复杂性,仅仅利用数学来计算并较为准确地回答上述两个问题是很困难的。第一个问题需要由“分形逻辑”来进行分形推理和分形预测;第二个问题需要建立毛毯的合并规则,由于毛毯的粗糙度可由分维表征,这就势必要研究二者面料的相关性,以及二者分维对新毛毯分维的影响程度,而这正好符合泛逻辑学中广义相关性 h 和广义自相关性 k 的概念。因此,如果建立了基于泛逻辑学原理的分形逻辑,可以预言它将在此类问题的研究与应用方面发挥重要作用。

③通过分形中的广义相关性系数的研究,可以揭示生命科学中“牵一发而动全身”的疾病的本质。可以揭示众多物理、化学、生物过程以及自然现象的内在动力,并预测其发展趋势与最终结果。

④通过分形逻辑的研究与应用,可以进一步建立“混沌逻辑”。混沌逻辑可以用于混沌控制、气象预报、地震预测等众多领域。

4 混沌逻辑的建立与发展途径

通过前面的分析,可以构造出“混沌逻辑三步曲”,即泛逻辑学→分形逻辑→混沌逻辑→复杂系统。图4示意了混沌逻辑的建立与发展过程。

4.1 泛逻辑学——建立分形逻辑的基础

之所以说泛逻辑学是建立分形逻辑的基础,原因主要在于泛逻辑学提供了所有逻辑的形式化框架,并且给出了生成规则。此外,泛逻辑学中的广义相关系数和广义自相关系数可用于研究分形现象中的自相似和关联维,这是分形逻辑研究的主要内容之一,将另文专述。

4.2 分形逻辑——通向混沌逻辑的桥梁

由图4可知,泛逻辑学是整个逻辑系统的原理与基础,而分形逻辑则在建立混沌逻辑的过程中起桥梁的作用。这是因为混沌现象比分形现象更为复杂,直接研究混沌现象或建立混沌逻辑难度更大。但由于混沌现象具有分维的特征,故目前常用研究分形来作铺垫。自然而然,要建立混沌逻辑,可以先建立分形逻辑,最终使混沌逻辑“功到自然成”。

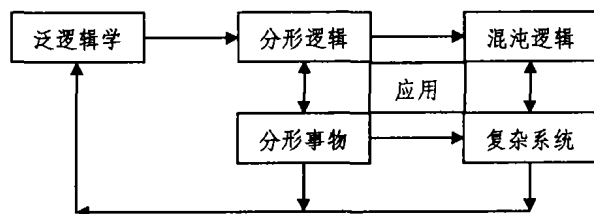


图4 混沌逻辑的建立与发展过程示意图

4.3 复杂系统——完善混沌逻辑的应用

从认识论的角度讲,所有新学科出现之目的只有一个,那就是为了帮助人们更准确地理解自然现象、掌握自然规律。混沌逻辑也不例外。只有不断在复杂系统得到应用,才能逐渐自我完善。这种完善包括混沌逻辑自身四要素的发展,尤其连接词的选用与规则。此外,除了建立通用混沌逻辑推理的规则集外,必要时可以分类建立针对某些具体混沌现象(或应用)的特征规则集。

结论与展望 目前,笔者利用分形逻辑仿真系统来研究分形事物已经取得了一些良好的结果。然而,建立与完善分形逻辑和混沌逻辑是一项长期艰苦的工作,本文作为此方面工作的开端,避开了繁琐的推理公式,而主要分析了现有的分形论与混沌学的基本特征,阐释了分形、混沌、泛逻辑之间的相互关系,充分讨论了建立分形逻辑和混沌逻辑的必要性和可能性等问题。基于本文的内容小结有:

(1)分形与混沌逻辑的产生既是人类对自然规律认识深入的必然产物,也是更加深入认识的客观需要。泛逻辑学原理为建立这样的逻辑体系提供了理论框架与生成规则,这使得建立分形与混沌逻辑成为可能。

(2)文章给出了分形逻辑的研究纲要,包括四个特征要素,连接词的运算模型以及分形逻辑的语义解释。同时提出了混沌逻辑的建立与发展途径。

(3)研究与应用分形逻辑和混沌逻辑,可以揭示众多自然现象的内在动力学本质,并可预测其发展趋势与最终结果。随着分形逻辑与混沌逻辑在复杂系统中的广泛应用,其自身必将逐渐得到发展与完善。

致谢 本文工作受国家自然科学基金项目资助(编号:60273087),相关工作得到教研室许多老师的有益建议与热忱帮助,并从参考文献中得到一定启发,在此一并表示感谢。

参考文献

- Patterson, Richard. Aristotle's Modal Logic: Essence and Entailment in the Organon. Cambridge University Press, 1995
- Hockney D. Contemporary Research in Philosophical Logic and Linguistic Semantics, Dordrecht, Reidel, 1975
- 何华灿,王华,等. 泛逻辑学原理. 北京:科学出版社,2001
- Zadeh L A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8:338~357
- Hacck S. Deviant Logic and Fuzzy Logic, Beyond the Formalism, 2nd edition. The University of Chicago Press, 1996
- Lorenz E N, Liu S. The essential of chaos. Beijing, Weather Publishing House, 1997
- 黄润生. 混沌及其应用. 武汉:武汉大学出版社,2000
- Hu Gang. Chaos Control. Shanghai, Shanghai Science and Technology Education Publishing House, 2001
- 林鸿溢,李映雪. 分形论——奇异性探索. 北京理工大学出版社, 1994
- Kaye B H. A Random Walk Through Fractal Dimension. translated version, Shenyang, Northeastern University Press, 1994
- Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. London, Cambridge University Press, 1985
- 刘华杰. 分形艺术. 长沙:湖南科学技术出版社,1998
- 王东生,曹磊. 混沌、分形及其应用. 合肥:中国科学技术大学出版社,1995
- Feigenbaum M J. Los Alamos Science, 1981(1):4
- Mandelbrot B B. Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1982
- Thomason, Steven K. Semantic Analysis of the Modal Syllogistic. Journal of Philosophical Logic, 1993(22):111~128