计算最终线性秩函数的新方法

朱 广 李 轶 吴文渊
(中国科学院重庆绿色智能技术研究院 重庆 400714)

摘 要 程序的终止性分析作为程序验证中重要的一环,在软件正确性验证中极为重要。对于一个线性循环程序,若该程序没有传统定义的线性秩函数,则基于传统定义的秩函数终止性分析方法失效。2013 年,Bagnara 提出了最终线性秩函数(Eventual Linear Ranking Functions)的定义,并证明了若某个程序存在最终线性秩函数,则该程序终止。由此,提出了新的方法来计算最终线性秩函数,构造了存在线性增函数和最终线性秩函数的等价半代数系统,并使用 Mathematica 工具对半代数系统进行求解,对比分析了各种最终秩函数求解方法的实际计算时间,结果证实了所提方法的优越性。

关键词 线性循环程序,终止性分析,最终线性秩函数,Mathematica

中图法分类号 TP311.5 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.01.037

New Method for Computing Eventual Linear Ranking Functions

ZHU Guang LI Yi WU Wen-yuan
(Chongqing Institute of Green and Intelligent Technology, Chinese Academy of Sciences, Chongqing 400714, China)

Abstract Termination of linear loop programs has received extensive attention in these years. In this paper, we focused on the termination of linear constraint loops which has no traditional linear ranking functions. A method of detecting eventual linear ranking functions by Bagnara were introduced for termination analysis first. Such an eventual linear ranking function implies the loop terminates. We presented a new method for computing eventual linear ranking functions. Semi-algebraic systems, equivalent to linear increasing functions and eventual linear ranking functions, were established. Several methods for synthesizing eventual linear ranking functions were compared. And experimental results show that the semi-algebraic system for synthesis of eventual linear ranking functions established by our method is simpler.

Keywords Linear loop programs, Termination analysis, Eventual linear ranking functions, Mathematica

1 引言

近年来,随着计算机软件的飞速发展,软件响应时间越来越短,因此判断程序是否终止变得尤为重要。目前,国内外关于终止性问题的研究主要集中在 3 个方面:工具性开发[8,10,19,20]、探索秩函数来判断程序的终止性[1,2,5-7,9,11-13,14-16]、对终止性分析方法进行复杂度分析[3,5,17]。其中探索秩函数来分析终止性问题是较为普遍的分析方法,然而秩函数的存在只是程序终止的一个充分条件,即针对一个循环程序,如果存在一个满足条件的秩函数,则该程序是终止的;如果不存在这种秩函数,该程序的终止性问题不确定。

2001 年,Colón 和 Sipma 教授[12]基于多面体锥理论提出了一种算法来合成线性秩函数,进而证明线性循环程序的终止性问题。在此基础上,Podelski 和 Rybalcheko 于 2004 年首次提出一种完备的方法在实数或者有理数域上合成线性秩函数[16]。此后,Bradley 教授等人于 2005 年拓展了 Podelski 的工作[6,7],针对多分支线性循环程序进行研究,探索字典序线性秩函数进行终止性分析。陈应华等人[11]展示了一种生成非线性秩函数的技术,该技术针对多项式线性循环程序,通过求解半代数系统来构造非线性秩函数。Cook 等人[13]给出了一种自动方法来寻找使得循环程序终止的最弱条件,可以断定在此条件内的循环程序是终止的。

近年来,Chen Hongyi 等人[9]针对单路径线性循环程序,提出一种方法来生成析取关系的秩函数以判定全局终止性问题。他们的方法是文献[16]的扩展和泛化,有效拓展和延伸了秩函数的求解方法。2013 年,Ganty 和 Genaim[14]提出了一个方案,即通过划分转换关系,将必然终止的部分剔除,该方案在原定义域的子域上进行分析,成功应用到了条件终止性分析中,能够有效找到使循环终止的条件。同年,文献[1]对单分支线性循环程序进行了终止性分析,提出了一种最终线性秩函数(Eventual Linear Ranking Functions)的概念:若存在这种最终秩函数,那么整个循环程序终止,否则终止性待定。这种最终线性秩函数被看作是原定义域中某个子域上的传统线性秩函数。

本文针对线性循环程序进行分析,通过寻找文献[1]中提到的最终线性秩函数来进行终止性分析。这种最终线性秩函数可通过缩小定义域后在小范围内探索线性秩函数得到,如果这样的最终线性秩函数存在,那么整个循环程序终止。

到稿日期:2015-12-16 返修日期:2016-05-24 本文受国家自然科学基金(61572024,11471307),重庆市基础与前沿研究计划院士专项(cstc2015jcyjys40001)资助。

朱 广(1990-),男,硕士生,主要研究领域为程序验证;**李 轶**(1980-),男,博士,副研究员,主要研究领域为程序验证、符号计算,E-mail:zm_liyi@163.com(通信作者);**吴文渊**(1974-),男,博士,副研究员,主要研究领域为同伦方法、微分方程等。

Podelski 和 Rybalchenko[16] 提到了构造线性秩函数的方法,我们提出一种直接构造线性增函数的方法,该方法不需要设定线性增函数模板。最后,利用 Mathematica 工具通过实验对比不同的最终秩函数计算方法。实验结果验证了本文方法的优越性。

2 单分支线性循环程序

定义 1 引入单分支线性循环程序如下:

$$P:\begin{cases}\text{while}(\boldsymbol{Bx}\leqslant \boldsymbol{b})\,do\\ \boldsymbol{x}'\rhd \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{a}\end{cases} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{B}\in Q^{m\times n}$,$\boldsymbol{A}\in Q^{n\times n}$,$\boldsymbol{b}\in Q^m$,$\boldsymbol{a}\in Q^n$,$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in Q^n$,$\rhd\in\{=,\geqslant,>\}$,$m,n$ 分别表示 m 个条件和 n 个元素,$\boldsymbol{B}$ 表示有理数域上 $m\times n$ 的矩阵,$\boldsymbol{A}$ 表示有理数域上 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 的矩阵,b 和 a 分别表示有理数域上长度分别为 m 和 n 的向量。$\boldsymbol{Bx}\leqslant\boldsymbol{b}$ 是此循环程序的循环条件,$\boldsymbol{x}'\rhd\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{a}$ 是此循环程序的循环体,表示循环变量 $\boldsymbol{x}$ 并行赋值。令 $\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\{\boldsymbol{Bx}\leqslant\boldsymbol{b}\wedge \boldsymbol{x}'\rhd\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{a}\}$ 为循环程序的变迁系统。令 $\Omega=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{Bx}\leqslant\boldsymbol{b}\}$,$\overline{\Omega}=\{Q^n\backslash\Omega\}$。

线性循环程序(1)中的变迁系统 $\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 可以记为如下不等式组形式:

$$(\boldsymbol{HH}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{c} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{H}\in Q^{(m+n)\times n}$,$\boldsymbol{H}'\in Q^{(m+n)\times n}$,$\boldsymbol{c}\in Q^{(m+n)}$。

例 1 给定单分支线性循环程序 P_1:

$$P_1\begin{cases}\text{while }(x_1\geqslant 0)\text{ do}\\ x_1'\leqslant x_1+x_2;\\ x_2'\leqslant -x_2-1;\end{cases}$$

记 P_1 的变迁系统为:

$\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$:$\{x_1\geqslant 0\wedge x_1'\leqslant x_1+x_2\wedge x_2'\leqslant -x_2-1\}$

那么 P_1 的变迁系统可记为形如系统(2)的不等式组:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\-1&-1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_1'\\x_2'\end{pmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

其中,$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{H}'=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{c}=(0,0,-1)^{\mathrm{T}}$。

定义 2(单分支线性循环程序的秩函数) 给定一个单分支线性循环程序 P,如果一个线性函数 $\rho(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}+r_0$ 满足以下公式:

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{x}')\geqslant 1) \tag{3}$$

那么该线性函数 $\rho(\boldsymbol{x})$ 是循环程序 P 的一个秩函数。其中 $\boldsymbol{r}\in Q^n$,$r_0\in Q$。

显然,如果存在这种线性秩函数,那么循环程序 P 是终止的。

注 1:式(3)中递减常数 1 可以被取代为一个任意的正数 δ。

定理 1(Farkas 引理) 给定由有理数域上的仿射不等式组构成的系统 S:

$$S:\begin{cases}a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n+\ b_1\geqslant 0\\ \cdots+\cdots+\cdots+\qquad\ \cdots\geqslant 0\\ a_{m,1}x_1+\cdots+a_{m,n}x_n+\ b_m\geqslant 0\end{cases}$$

如果系统 S 有解,系统 $\forall x_1,\cdots,x_n:S\Rightarrow c_1x_1+\cdots+c_nx_n+d\geqslant 0$成立,当且仅当 $\exists\lambda_1\geqslant 0,\cdots,\lambda_m\geqslant 0$,使得:

$$(d\geqslant\sum_{j=1}^{m}\lambda_jb_j)\wedge(\bigwedge_{i=1}^{n}(c_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_ja_{j,i}))$$

接下来,定理 2 展示了循环程序终止的充分条件,其中秩函数可根据下面系统中的变量合成,该定理由 Podelski 和 Rybalchenko 于文献[16]首次提出。

定理 2(单分支线性循环程序终止的充分条件) 给定一个单分支线性循环程序 P,记为$(\boldsymbol{HH}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{c}$ 形式,如果存在 $\lambda_1\geqslant 0\wedge\lambda_1\in Q$,$\lambda_2\geqslant 0\wedge\lambda_2\in Q$,且 λ_1,λ_2 满足半代数系统(4),那么该循环程序是终止的。

$$S_\rho:\begin{cases}\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0\\ \lambda_1\boldsymbol{H}'=0\\ (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{H}=0\\ \lambda_2(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\\ \lambda_2\boldsymbol{c}<0\end{cases} \tag{4}$$

注 2:如果存在 λ_1 和 λ_2 使半代数系统(4)有解,那么可以直接构造出线性秩函数:$\rho(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}=\lambda_2\boldsymbol{H}'$(证明详情见文献[16])。

例 2 针对例 1 中的循环程序 P_1,分别用不同方法求解秩函数。

1)利用定义 2 直接求解线性秩函数。

若按照定义 2 计算 P_1 的线性秩函数,令 $\rho(\boldsymbol{x})=r_1x_1+r_2x_2$,则该函数需满足蕴含式:

$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{x}')\geqslant 1)$

利用 Mathematica 进行量词消去计算,返回结果为 False,用时 46ms。

2)针对定义 2 利用 Farkas 引理求解线性秩函数。

令线性秩函数 $\rho(\boldsymbol{x})=r_1x_1+r_2x_2$,利用 Farkas 引理,将定义 2 中蕴含式等价转化为半代数系统:

$\exists\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23},(\lambda_{11}\geqslant 0\wedge\lambda_{12}\geqslant 0\wedge\lambda_{13}\geqslant 0\wedge\lambda_{21}\geqslant 0\wedge\lambda_{22}\geqslant 0\wedge\lambda_{23}\geqslant 0\wedge -r_1=-\lambda_{11}-\lambda_{12}\wedge -r_2=-\lambda_{12}+\lambda_{13}\wedge r_1=\lambda_{12}\wedge r_2=\lambda_{13}\wedge -1\geqslant -\lambda_{13}\wedge -r_1=-\lambda_{21}-\lambda_{22}\wedge -r_2=-\lambda_{22}+\lambda_{23}\wedge\lambda_{22}=0\wedge\lambda_{23}=0)$

然后使用 Mathematica 进行量词消去计算,返回结果为 False,用时 16ms。

3)利用定理 2 的方法合成线性秩函数。

按照定理 2 构造的半代数系统如下:

$\exists\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23},(\lambda_{11}\geqslant 0\wedge\lambda_{12}\geqslant 0\wedge\lambda_{13}\geqslant 0\wedge\lambda_{21}\geqslant 0\wedge\lambda_{22}\geqslant 0\wedge\lambda_{23}\geqslant 0\wedge\lambda_{12}=0\wedge\lambda_{13}=0\wedge -(\lambda_{11}-\lambda_{21})-(\lambda_{12}-\lambda_{22})=0\wedge -(\lambda_{12}-\lambda_{22})+\lambda_{13}-\lambda_{23}=0\wedge -\lambda_{21}=0\wedge -\lambda_{22}+2\lambda_{23}=0\wedge -\lambda_{23}<0)$。

其中,$\lambda_{11},\lambda_{12},\cdots,\lambda_{23}$ 均为非负有理数。根据定理 2,如果该系统有解,那么可通过 $\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23}$ 直接构造得到该循环程序的线性秩函数。利用 Mathematica 进行量词消去计算,返回结果为 False,用时 15ms。

综上所述,循环程序 P_1 不存在传统定义下的线性秩函数,因此仅利用定义 2 和定理 2 无法判断其终止性。

3 最终线性秩函数

由于例 2 没有定义 2 下的线性秩函数,因此基于传统定义下的秩函数终止性分析方法失效。接下来拓展秩函数的概念,引入首次在文献[1]中出现的最终线性秩函数的定义。因为探索最终线性秩函数需要先求解该循环程序的线性增函数,所以首先展示单分支线性循环程序的线性增函数的定义。

定义3(单分支线性循环程序的线性增函数) 给定一个单分支线性循环程序 P,形如 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}$ 的线性函数是 Ω 上的一个线性增函数,当其满足以下系统:

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant 1)\tag{5}$$

其中,$\boldsymbol{d}\in Q^n$。

令 $\Phi=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x}\geqslant k\}$,$\Psi=\{\boldsymbol{d}\in Q^n\mid\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant 1)\}$ 为线性增函数空间,即所有满足条件的增函数系数的集合。

注3:式(5)中的数字1可以替换为一个任意的正数 δ。

定理2给出了判断程序终止性的充分条件,其实质是构造出了线性秩函数的等价条件。与此类似,本文提出了一种新方法来构造线性增函数。

定理3(线性增函数存在的充要条件) 使用以上定义中的符号,给定一个形式为 $(\boldsymbol{HH}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{c}$ 的循环程序 P,其线性增函数存在的充要条件是存在向量 $\mu\geqslant 0,\mu\in Q^m$,使其满足以下半代数系统:

$$\boldsymbol{S}_{inc}:\begin{cases}\mu\geqslant 0\\\mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\\\mu\,\boldsymbol{c}<0\end{cases}\tag{6}$$

证明:给定一个单分支线性循环程序 P:$(\boldsymbol{HH}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{c}$,其中 $\boldsymbol{H}\in Q^{(m+n)\times n}$,$\boldsymbol{H}'\in Q^{(m+n)\times n}$,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in Q^n$,循环程序 P 可记为 $(\boldsymbol{Hx}+\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}')\leqslant\boldsymbol{c}$,即 $-\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{Hx}\geqslant-\boldsymbol{c}$。令 $\mu\geqslant 0\wedge\mu\in Q^m$。

充分性:假设循环程序 P 的线性增函数存在,那么 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant\delta>0)$。即 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(-\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{Hx}\geqslant-\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\delta>0)$。根据Farkas引理,该蕴含式等价于 $\exists\mu\geqslant 0,\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=-\mu\boldsymbol{H}',-\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=-\mu\boldsymbol{H},-\delta\geqslant\mu\boldsymbol{c}$,即 $\exists\mu\geqslant 0$ 使得 $\mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\wedge\mu\boldsymbol{c}<0$。

必要性:假设 $\exists\mu\geqslant 0$,使得 $\mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\wedge\mu\boldsymbol{c}<0$。令 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 为循环程序 P 的一个线性增函数,那么下列系统成立:

$$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',((HH')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{c}\Rightarrow f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant\delta>0)$$

由于 $\exists\mu\geqslant 0$,使得 $\mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\wedge\mu\boldsymbol{c}<0$,因此系统 $-\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{Hx}\geqslant-\boldsymbol{c}$ 可转化为:$-\mu\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}'-\mu\boldsymbol{Hx}\geqslant-\mu\boldsymbol{c}$,$-\mu\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}'-(-\mu\boldsymbol{H}')\boldsymbol{x}\geqslant-\mu\boldsymbol{c}>0$。

令 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=-\mu\boldsymbol{H}'$,$\delta=-\lambda c$,则 $-\mu\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}'-(-\mu\boldsymbol{H}')\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\delta>0$,即 $f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant\delta>0$。因此 $f(\boldsymbol{x})$ 是循环程序 P 上的线性增函数。证毕。

如果存在一个向量 μ 使得半代数系统(6)有解,那么线性增函数可以直接构造为 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=-\mu\boldsymbol{H}'$。

例3 针对例1中的循环程序 P_1,根据定理3,可通过构造增函数存在的等价系统合成线性增函数。直接构造出 P_1 的线性增函数:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=-\mu\boldsymbol{H}'\boldsymbol{x}\\&=-(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\&=-\mu_2x_1-\mu_3x_2\end{aligned}$$

其中,$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=(-\mu_2,-\mu_3)$,$\mu_1,\mu_2,\mu_3$ 均为非负有理数。根据定理3,μ_2 和 μ_3 需满足条件:

S_{inc}:

$$\begin{cases}\mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\\0&2\end{pmatrix}=(-\mu_1,-\mu_2+2\mu_3)=0\\\mu\,\boldsymbol{c}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)(0,0,-1)^{\mathrm{T}}=-\mu_3<0\end{cases}$$

因此,构造出 P_1 的线性增函数为 $f(\boldsymbol{x})=-\mu_2x_1-\mu_3x_2$,其中 $\{\mu_1\geqslant 0\wedge\mu_2\geqslant 0\wedge\mu_3\geqslant 0\wedge-\mu_1=0\wedge-\mu_2+2\mu_3=0\wedge-\mu_3<0\}$。

引入单分支线性循环程序的最终线性秩函数的概念,该概念由Bagnara和Mesnard于2013年在文献[1]中提出。

定义4(单分支线性循环程序的最终线性秩函数) 使用定义中的符号,针对一个线性循环程序 P,令 $f(\boldsymbol{x})$ 为 Ω 上的线性增函数,如果形如 $\rho(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}+r_0$ 的线性函数满足系统(7),那么 $\rho(\boldsymbol{x})$ 是一个最终线性秩函数。

$$\exists k,\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',((\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\wedge f(\boldsymbol{x})\geqslant k)\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{x}')\geqslant 1)\tag{7}$$

如果循环程序 P 中存在定义4中的最终线性秩函数,那么 P 是终止的(证明详情参见文献[1])。

注4:使用定义3中的符号,针对一个单分支线性循环程序 P,令 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}$ 为 P 的线性增函数,将 $f(\boldsymbol{x})\geqslant k$ 加入 P 的变迁系统中得到系统 S':

$$S':(\boldsymbol{MM}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{e}$$

S' 对应循环程序 P':

$$P':\begin{cases}\text{while}(\boldsymbol{Bx}\leqslant\boldsymbol{b}\ \&\&\ f(\boldsymbol{x})\geqslant k)\ \text{do}\\\boldsymbol{x}'\triangleright\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{a}\end{cases}$$

显然,如果 $\rho(\boldsymbol{x})$ 为程序 P 上的最终线性秩函数,那么 $\rho(\boldsymbol{x})$ 可以视为 P' 上形如定义2中的线性秩函数。系统 S' 中的符号分别为:$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}\\-\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\in Q^{(m+n+1)\times n}$,$\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}'\\0\end{pmatrix}\in Q^{(m+n+1)\times n}$,$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\-k\end{pmatrix}\in Q^{m+n+1}$。

例4 针对例1中的循环程序 P_1,例3中已合成线性增函数 $f(\boldsymbol{x})=-\mu_2x_1-\mu_3x_2$,将 $f(\boldsymbol{x})\geqslant k$ 加入到 P_1 的变迁系统中得到的系统 $S_1{}'$ 为:

$$S_1{}':(\boldsymbol{MM}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant\boldsymbol{e}$$

其中,$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}\\-\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&-1\\0&1\\\mu_2&\mu_3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}'\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\-k\end{pmatrix}=(0,0,-1,-k)^{\mathrm{T}}$。

$S_1{}'$ 对应的循环程序为 $P_1{}'$:

$$P_1{}'\begin{cases}\text{while}\ (x_1\geqslant 0\&\&-\mu_2x_1-\mu_3x_2\geqslant k)\ \text{do}\\x_1{}'\leqslant x_1+x_2;x_2{}'\leqslant -x_2-1\end{cases};$$

因此求解 P_1 的最终线性秩函数可视为求解 $P_1{}'$ 的线性秩函数。

定义4给出了最终线性秩函数的定义,通过本文分析,即根据注4可知,循环程序 P 上的最终线性秩函数可视为新的循环程序 P' 上的线性秩函数。定理4提出了一种新的方法来探测最终线性秩函数。

定理4(最终线性秩函数存在的充要条件) 给定一个单

分支线性循环程序 P，其形式记为 $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant \boldsymbol{c}$，令 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}$ 为 Ω 上的线性增函数，将 $f(\boldsymbol{x})\geqslant k$ 加入 P 中形成新的变迁系统 P'：$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}')\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}\leqslant \boldsymbol{e}$，其中 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}\\ -\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\in Q^{(m+1)\times n}$，$\boldsymbol{M}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}'\\ 0\end{pmatrix}\in Q^{(m+1)\times n}$，$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ -k\end{pmatrix}\in Q^{m+1}$。$P$ 的最终线性秩函数存在的充要条件是存在非负有理数向量 λ_1,λ_2，使其满足下列半代数系统，即 $\boldsymbol{S}_{inc}\wedge\boldsymbol{S}_\rho$ 有解。

$$\boldsymbol{S}_{inc}:\begin{cases}\mu\geqslant 0\\ \mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\\ \mu\,\boldsymbol{c}<0\end{cases}\quad \boldsymbol{S}_\rho:\begin{cases}\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0\\ \lambda_1\boldsymbol{M}'=0\\ (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{M}=0\\ \lambda_2(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}')=0\\ \lambda_2\boldsymbol{e}<0\end{cases}\tag{8}$$

其中，$\lambda_1\in Q^{m+1}$，$\lambda_2\in Q^{m+1}$。

证明：因为循环程序 P 有最终线性秩函数等价于程序 P' 有线性秩函数，所以根据定理 2，如果 P' 有线性秩函数的充要条件是半代数系统(8)成立。证毕。

注 5：如果存在 λ_1 和 λ_2 使半代数系统(8)有解，那么可以直接构造出线性秩函数：$\rho(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}=\lambda_2\boldsymbol{M}'$。此外，定理 4 中的方法具有完备性，即如果循环程序中有最终线性秩函数，那么通过该方法一定能够找到；如果该方法找不到最终线性秩函数，那么该循环程序中没有最终线性秩函数。

4 实验结果与分析

4.1 实例研究

针对例 1 中的循环程序 P_1，由例 2 可知，P_1 的线性秩函数不存在。因此，例 5 通过验证 P_1 中是否有最终线性秩函数来判断该循环程序是否终止。

例 5　以下通过不同的计算方法求解 P_1 的最终线性秩函数，并对每种计算方法进行比较分析。

方法 1：根据定义 4，利用工具直接求解最终线性秩函数。

按照定义 3 计算 P_1 的线性增函数，令 $f(\boldsymbol{x})=d_1x_1+d_2x_2$，则该函数需满足蕴含式：$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant 1)$。利用 Mathematica 进行量词消去计算，返回结果为 $\{d_1=2d_2,d_2\leqslant -1\}$，用时 327ms。通过以上计算，得到线性增函数空间为 $\Psi=\{(d_1,d_2)\mid d_1=2d_2,d_2\leqslant -1\}$。

按照定义 4 计算循环程序 P_1 的最终线性秩函数，令 $\rho(\boldsymbol{x})=r_1x_1+r_2x_2$，将 $\Phi=\{f(\boldsymbol{x})\geqslant k\}$ 加入 P_1 的循环条件中，则函数 $\rho(\boldsymbol{x})$ 需满足蕴含式：

$\exists d_1,d_2,k,\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',((\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\wedge d_1x_1+d_2x_2\geqslant k\wedge d_1=2d_2\wedge d_2\leqslant -1)\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{x}')\geqslant 1)$

利用 Mathematica 进行正确性检验，返回结果为 True，用时 264ms。

方法 2：利用 Farkas 引理求解最终线性秩函数。

首先，按照定义 3 计算 P_1 的线性增函数，令 $f(\boldsymbol{x})=d_1x_1+d_2x_2$，那么 $f(\boldsymbol{x})$ 是线性增函数需满足蕴含式：$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',(\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\Rightarrow f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x})\geqslant 1)$，利用 Farkas 引理将其转换为对应的半代数系统：

$\exists\mu_1,\mu_2,\mu_3,(\mu_1\geqslant 0\wedge\mu_2\geqslant 0\wedge\mu_3\geqslant 0\wedge d_1=-\mu_1-\mu_2\wedge d_2=-\mu_2+\mu_3\wedge -d_1=\mu_2\wedge -d_2=\mu_3\wedge -1\geqslant -\mu_3)$

其次，按照定义 2 计算 P_1 的最终线性秩函数，令 $\rho(\boldsymbol{x})=r_1x_1+r_2x_2$，那么 $\rho(\boldsymbol{x})$ 是最终线性增函数需满足蕴含式：

$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',((\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\wedge f(\boldsymbol{x})\geqslant k)\Rightarrow\rho(\boldsymbol{x})\geqslant 0\wedge\rho(\boldsymbol{x})-\rho(\boldsymbol{x}')\geqslant 1)$

利用 Farkas 引理可以将此蕴含式转换为等价的半代数系统：

$\exists\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{14},\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23},\lambda_{24},\mu_1,\mu_2,\mu_3,k,d_1,d_2,(\lambda_{11}\geqslant 0\wedge\lambda_{12}\geqslant 0\wedge\lambda_{13}\geqslant 0\wedge\lambda_{14}\geqslant 0\wedge\lambda_{21}\geqslant 0\wedge\lambda_{22}\geqslant 0\wedge\lambda_{23}\geqslant 0\wedge\lambda_{24}\geqslant 0\wedge -r_1=-\lambda_{11}-\lambda_{12}-d_1\lambda_{14}\wedge -r_2=-\lambda_{12}+\lambda_{13}-d_2\lambda_{14}\wedge r_1=\lambda_{12}\wedge r_2=\lambda_{13}\wedge -1\geqslant -\lambda_{13}-k\lambda_{14}\wedge -r_1=-\lambda_{21}-\lambda_{22}-d_1\lambda_{24}\wedge -r_2=-\lambda_{22}+\lambda_{23}-d_2\lambda_{24}\wedge\lambda_{22}=0\wedge\lambda_{23}=0\wedge 0\geqslant -\lambda_{23}-k\lambda_{24}\wedge\mu_1\geqslant 0\wedge\mu_2\geqslant 0\wedge\mu_3\geqslant 0\wedge d_1=-\mu_1-\mu_2\wedge d_2=-\mu_2+\mu_3\wedge -d_1=\mu_2\wedge -d_2=\mu_3\wedge -1\geqslant -\mu_3)$

利用 Mathematica 进行量词消去计算，返回结果为 $r_1>0\wedge r_2=0$，用时 94ms。不难看出，取 $r_1=1,r_2=0$ 时，可得到一个最终线性秩函数 $\rho(\boldsymbol{x})=x_1$。

下面利用本文提出的新方法求解最终线性秩函数。

方法 3：利用定理 3 和定理 4(本文方法)合成最终线性秩函数。

首先构造线性增函数空间(如例 3 所示)，然后将 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant k$ 加入到循环程序 P_1 的变迁系统中构成新的变迁系统 $P_1{}'$(如例 4 所示)。根据定理 4，构建最终线性秩函数存在的充要条件：$\exists\lambda_1,\lambda_2,\mu,k$，使得 $\boldsymbol{S}_{inc}\wedge\boldsymbol{S}_\rho$ 有解。

$$\boldsymbol{S}_{inc}:\begin{cases}\mu\geqslant 0,\\ \mu(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}')=0\\ \mu\,\boldsymbol{c}<0\end{cases}\quad S_\rho\begin{cases}\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0\\ \lambda_1\boldsymbol{M}'=0\\ (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{M}=0\\ \lambda_2(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}')=0\\ \lambda_2\boldsymbol{e}<0\end{cases}$$

其中，$\lambda_1=(\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{14})$，$\lambda_2=(\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23},\lambda_{24})$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=(-\mu_2,-\mu_3)$。等价地，上述条件可写为如下的量词公式：

$\exists\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{14},\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23},\lambda_{24},\mu_1,\mu_2,\mu_3,k,(\lambda_{11}\geqslant 0\wedge\lambda_{12}\geqslant 0\wedge\lambda_{13}\geqslant 0\wedge\lambda_{14}\geqslant 0\wedge\lambda_{21}\geqslant 0\wedge\lambda_{22}\geqslant 0\wedge\lambda_{23}\geqslant 0\wedge\lambda_{24}\geqslant 0\wedge\mu_1\geqslant 0\wedge\mu_2\geqslant 0\wedge\mu_3\geqslant 0\wedge -\mu_1=0\wedge\mu_2=2\mu_3=0\wedge -\mu_3<0\wedge\lambda_{12}=0\wedge\lambda_{13}=0\wedge -(\lambda_{11}-\lambda_{21})-(\lambda_{12}-\lambda_{22})+\mu_2(\lambda_{14}-\lambda_{24})=0\wedge -(\lambda_{12}-\lambda_{22})+\lambda_{13}-\lambda_{23}+\mu_3(\lambda_{14}-\lambda_{24})=0\wedge -\lambda_{21}+\mu_2\lambda_{24}=0\wedge -\lambda_{22}+2\lambda_{23}+\mu_3\lambda_{24}=0\wedge -\lambda_{23}-k\lambda_{24}<0)$

利用 Mathematica 对上述量词公式的真伪进行正确性检验，返回结果为 True，用时 16ms。根据定理 4，$\rho(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}\boldsymbol{x}=\lambda_2\boldsymbol{M}'\boldsymbol{x}=\lambda_{22}x_1+\lambda_{23}x_2$。构造最终线性秩函数时，只需消去变量 $\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{14},\lambda_{21},\lambda_{24},\mu_1,\mu_2,\mu_3,k$，得到的结果为 $\lambda_{22}>0$，$\lambda_{23}=0$，用时 31ms。不难看出，取 $\lambda_{22}=1,\lambda_{23}=0$ 时，可得到一个最终线性秩函数 $\rho(\boldsymbol{x})=x_1$。

根据上述 3 种方法所得结果可知，循环程序 P_1 有最终线性秩函数，因此该循环程序一定终止。

4.2 结果分析

例 5 给出了求解最终线性秩函数的 3 种不同方法。通过对比发现，实际求解的代数公式复杂程度有所差异，实际运行时间差别很大，实验结果对比如表 1 所列。

表 1　例 5 中实验结果对比表

	方法 1	方法 2	方法 3 (本文方法)
计算时间(ms)	591	94	16
只含存在性量词	否	是	是
求解系统中变量个数	9	14	12
求解系统中(不)等式个数	7	15	10

由表 1 可知，利用方法 1—方法 3 求解最终线性秩函数所用时间呈递减趋势，且有 6 倍左右的差距。究其原因，可分两方面：1)方法 1 中含有全称量词和蕴含符号，直接利用工具进行量词消去时，运算量较大，所用时间较长；而方法 2 和方法 3 中需要进行量词消去的系统只含存在性量词，因此求解速度相对较快。2)方法 2 中需要进行量词消去的系统共含有 14 个变量、12 个等式、3 个不等式；方法 3 中需要进行量词消去的系统共含有 12 个变量、8 个等式、2 个不等式。与方法 2 相比，方法 3 中变量个数减少两个，不等式和等式个数共减少 5 个(1/3)，因此方法 3 中系统较为精简，计算时间较少。

4.3 其他案例研究

按照上述求解最终线性秩函数的方法，针对不同实例，使用 Mathematica 进行量词消去运算，得到如表 2 所列的结果。

表 2 线性循环程序的最终线性秩函数计算表

程序编号	循环程序	方法 1 (ms)	方法 2 (ms)	方法 3 (ms)	秩函数	最终秩函数

1	while(x>=0){
	x'<=x+y;
	y'≤-y-1;}
		327+264	94	16	无	有

2	while(2x-
	3y>=0){
	x'<=-x+3y;
	y'>=y+1;}
		234+47596	187	15	无	有

3	while(-2x+
	y>=1){
	x'>=x-2y;
	y'<=2x;}
		187+13400	217	32	无	有

4	while(-2x+
	y>=1){
	x'=x-2y;
	y'=2x;}
		718+8830	343	47	无	有

5	while(x>=1&&
	y>=0){
	x'=x+z;
	y'=y-x;
	z'=z-x;}
		崩溃	崩溃	4259	无	有

注 6：本表中的例子均使用 Mathematica 工具进行计算，时间单位为 ms，其中方法 3 为本文提出的方法。

通过表 2 可以看出，在求解最终线性秩函数的过程中，方法 1 计算用时最长，而且遇到较为复杂的循环程序时所花费的时间难以估计，甚至由于内存不足等原因导致计算崩溃；对比方法 2 与方法 3 可知，方法 3 计算时间较少，其原因在于方法 3 能够减少变量个数，简化半代数系统的规模，特别是在某些含较多程序变量的例子中优势突出。通过上述实例体现了本文方法在计算方面的优越性。

结束语 本文针对无初始条件的线性循环程序，建立了该类程序有最终线性秩函数的等价半代数系统，通过探索其最终线性秩函数研究了该类循环的终止性问题。利用Mathematica工具，对比分析方法 1、方法 2、方法 3(本文方法)求解最终线性秩函数所用的时间，体现了本文方法在计算方面的优越性。

参 考 文 献

[1] BAGNARA R,MESNARD F. Eventual linear ranking functions [C]// Proceedings of the 15th Symposium on Principles and Practice of Declarative Programming. Madrid, Spain, ACM, 2013:229-238.

[2] BAGNARA R,MESNARD F,PESCETTI A,et al. A new look at the automatic synthesis of linear ranking functions[J]. Information and Computation,2012,215(3):47-67.

[3] BEN-AMRAM A M,GENAIM S,MASUD A. On the Termination of Integer Loops[M]. Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. V. Kuncak and A. Rybalchenko, Springer Berlin Heidelberg,2012,7148:72-87.

[4] BEN-AMRAM A M,GENAIM S. On the linear ranking problem for integer linear-constraint loops[C]// Proceedings of the 40th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'13). Rome, Italy, ACM. 2013:51-62.

[5] BEN-AMRAM A M,GENAIM S. Ranking Functions for Linear-Constraint Loops[J]. Journal of the ACM,2014,61(4):1-55.

[6] BRADLEY A,MANNA Z,SIPMA H. Linear Ranking with Reachability. Computer Aided Verification[M]. Etessami K, Rajamani S. Springer Berlin Heidelberg,2005,3576:491-504.

[7] BRADLEY A,MANNA Z,SIPMA H. The Polyranking Principle. Automata, Languages and Programming[M]. Caires L, Italiano G, Monteiro L, et al. eds., Springer Berlin Heidelberg, 2005,3580:1349-1361.

[8] CHEN C B,MAZA M M. Quantifier Elimination by Cylindrical Algebraic Decomposition Based on Regular Chains[C]// Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM,2014:91-98.

[9] CHEN H Y,FLUR S,MUKHOPADHYAY S. Termination Proofs for Linear Simple Loops[M]// Static Analysis. A. Miné and D. Schmidt, Springer Berlin Heidelberg, 2012, 7460: 422-438.

[10] CHEN Y H,XIA B C,YANG L,et al. Discovering Non-linear Ranking Functions by Solving Semi-algebraic Systems[M]// Theoretical Aspects of Computing(ICTAC 2007). Springer Berlin Heidelberg,2007:34-49.

[11] CHEN Y H,XIA B X,YANG L,et al. Generating Polynomial Invariants with DISCOVERER and QEPCAD[M]. Formal Methods and Hybrid Real-Time Systems. CliffB Jones, Zhiming Liu and Jim Woodcock, Springer Berlin Heidelberg,2007,4700: 67-82.

[12] COLÓN M,SIPMA H. Synthesis of Linear Ranking Functions. Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems[M]. T. Margaria and W. Yi, Springer Berlin Heidelberg, 2001,2031:67-81.

[13] COOK B,GULWANI S,LEV-AMI T,et al. Proving Conditional Termination. Computer Aided Verification[M]. A. Gupta and S. Malik, Springer Berlin Heidelberg,2008,5123:328-340.

[14] GANTY P,GENAIM S. Proving Termination Starting from the End. Computer Aided Verification[M]. Sharygina N, Veith H. Springer Berlin Heidelberg,2013,8044:397-412.

[15] HEIZMANN M,HOENICKE J,LEIKE J,et al. Linear Ranking for Linear Lasso Programs[M]. Automated Technology for Verification and Analysis. Van Hung D, Ogawa M. Springer International Publishing,2013,8172:365-380.

[16] PODELSKI A,RYBALCHENKO A. A Complete Method for the Synthesis of Linear Ranking Functions[M]. Verification, Model Checking, and Abstract Interpretation. Steffen B, Levi G. Springer Berlin Heidelberg,2004,2937:239-251.

[17] TIWARI A. Termination of Linear Programs. Computer Aided Verification[M]. R. Alur and D. Peled, Springer Berlin Heidelberg,2004,3114:70-82.

(下转第 213 页)

基于本文提出的能耗预测模型，可以达到为数据库负载估算能量消耗的目的，但是如何挑选节能的查询计划以及如何在满足系统性能需求的同时最小化能耗，需要充分考虑性能与功率之间的折中问题。

本文下一步工作要点：

(1)以关系型数据库为基础，进一步研究 MBRC 值与模型稳定性的关系及在不同的数据库配置环境下是否存在一个最优的 MBRC 值。

(2)将本文提出的能耗预测模型扩展到动态环境下(MPL>2)，研究如何进一步提高模型的精确度与健壮性。

(3)以本文提出的能耗预测模型为基础，研究如何捕获系统在动态情况下对性能退化所能容忍的最大限度，进而指导查询优化器挑选性能较优且功耗低的节能查询计划。

参考文献

[1] POESS M, NAMBIAR R O. Energy cost, the key challenge of today's data centers: a power consumption analysis of TPC-C results[J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2008, 1(2): 1229-1240.

[2] KURP P. Green Computing[J]. Communications of the ACM, 2008, 51(10): 11-13.

[3] HARIZOPOULOS S, SHAH M, MEZA J, et al. Energy efficiency: The new holy grail of data management systems research [J]. arXiv preprint arXiv: 0909. 1784, 2009.

[4] BRILL K G. Data center energy efficiency and productivity[J]. the Uptime Insititute-White Paper, 2007(5): 176-184.

[5] LIAO Bin, YU Jiong, ZHANG Tao, et al. Energy-Efficient Algorithms for Distributed File System HDFS[J]. Chinese Journal of Computers, 2013, 36(5): 1047-1064. (in Chinese)
廖彬，于炯，张陶，等. 基于分布式文件系统 HDFS 的节能算法研究[J]. 计算机学报，2013，36(5)：1047-1064.

[6] LIAO Bin, YU Jiong, SHUN Hua, et al. Energy-Efficient Algorithms for Distributed Storage System Based on Data Storage Structure Reconfiguration [J]. Journal of Computer Research and Development, 2013, 50(1): 3-18. (in Chinese)
廖彬，于炯，孙华，等. 基于存储结构重配置的分布式存储系统节能算法[J]. 计算机研究与发展，2013，50(1)：3-18.

[7] LIAO Bin, YU Jiong, ZHANG Tao, et al. Novel Energy-efficient Metadata Dynamic Modeling and Management Approach for Cloud Storage System[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2013, 10(34): 2407-2412. (in Chinese)
廖彬，于炯，张陶，等. 一种适应节能的云存储系统元数据动态建模与管理方法[J]. 小型微型计算机系统，2013，10(34)：2407-2412.

[8] GRAY J. Tape is dead, disk is tape, flash is disk, RAM locality is king[OL]. http://signallate. com/signallake. com/innovation/Flash_is_Good. pdf.

[9] WANG Jiang-tao, LAI Wen-yu, MENG Xiao-feng. Flash-Based Database: Studies, Techniques and Forecasts [J]. Chinese Journal of Computers, 2013, 36(8): 1549-1567. (in Chinese)
王江涛，赖文豫，孟小峰. 闪存数据库：现状，技术与展望[J]. 计算机学报，2013，36(8)：1549-1567 .

[10] RODRIGUEZ-MARTINEZ M, VALDIVIA H, SEGUEL J, et al. Estimating Power/Energy consumption in Database Servers[J]. Procedia Computer Science, 2011, 6(1): 112-117.

[11] XU Z. Building a power-aware database management system [C]// Proceedings of the Fourth SIGMOD PhD Workshop on Innovative Database Research. ACM, 2010: 1-6.

[12] XU Z, TU Y C, WANG X. Exploring power-performance tradeoffs in database systems[C]// 2010 IEEE 26th International Conference on Data Engineering (ICDE). IEEE, 2010: 485-496.

[13] XU Z, TU Y C, WANG X. PET: reducing database energy cost via query optimization[J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2012, 5(12): 1954-1957.

[14] TSIROGIANNIS D, HARIZOPOULOS S, SHAH M A. Analyzing the energy efficiency of a database server[C]// Proc. of SIGMOD '10 Indianapolis. IN, USA, 2010: 231-242.

[15] JIN Pei-quan, XING Bao-ping, JIN Yong, et al. Survey on energy-aware green databases[J]. Journal of Computer Application, 2014, 34(1): 46-53. (in Chinese)
金培权，邢宝平，金勇，等. 能耗感知的绿色数据库研究综述[J]. 计算机应用，2014，34(1)：46-53.

[16] YANG Liang-huai, ZHU Hong-yan. Whole system realtime power profiling and modeling[J]. Journal of Computer Science, 2014, 41(9): 32-37. (in Chinese)
杨良怀，朱红燕. 整机系统实时功率剖析与建模[J]. 计算机科学，2014，41(9)：32-37.

[17] GUO Bing-lei, YU Jiong, LIAO Bin, et al. SQL Energy Consumption Modeling and Optimization Research[J]. Journal of Computer Science, 2015, 42(10): 202-207. (in Chinese)
国冰磊，于炯，廖彬，等. SQL 能耗建模及优化研究[J]. 计算机科学，2015，42(10)：202-207.

[18] LANG W, PATEL J. Towards eco - friendly database management systems[J]. arXiv preprint arXiv: 0909. 1767, 2009.

[19] ZHU Yi, XIAO Fang-xiong, ZHOU Hang, et al. Method for Modeling and Analyzing Software Energy Consumption of Embedded Real-Time System[J]. Journal of Computer Reserach and Development, 2014, 51(4): 848-855. (in Chinese)
祝义，肖芳雄，周航，等. 一种嵌入式实时系统软件能耗建模与分析的方法[J]. 计算机研究与发展，2015，51(4)：848-855.

(上接第 198 页)

[18] LI K, SHAN Z G, WANG J, et al. Overview on Major Research Plan of Trustworthy Software[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2008, 22(3): 145-151. (in Chinese)
李克，单志广，王戟，等. 可信软件基础研究重大研究计划综述[J]. 中国科学基金，2008，22(3)：145-151.

[19] YANG L, ZHANG J Z, HOU X R. Nonlinear Systems of Algebraic Equations and Automated Theorem Proving[M]. Beijing: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996. (in Chinese)
杨路，张景中，侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明[M]. 北京：上海科技教育出版社，1996.

[20] YANG L, XIA B C. Inequality Machine Proving and Automated Discovery[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
杨路，夏壁灿. 不等式机器证明与自动发现[M]. 北京：科学出版社，2008.