基于最小/最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集模型

薛占熬 司小朦 王 楠 朱泰隆

(河南师范大学计算机与信息工程学院 新乡 453007)

("智慧商务与物联网技术"河南省工程实验室 新乡 453007)

摘 要 覆盖粗糙集和直觉模糊集都是处理不确定性问题的基础理论,它们有着很强的互补性,且覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合研究是一个新的热点。对多粒度覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合进行深入研究。首先将最小描述、最大描述从单一粒度推广到多个粒度,提出了多粒度的最小描述和最大描述,讨论了多粒度的融合;其次,分别给出了基于最小描述和最大描述的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度的概念,构建了两种新的模型即基于最小描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集和基于最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集,并讨论了它们的性质,同时举例说明;最后,分析和研究了两种模型的关系。该研究为多粒度覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合提供了一种方法。

关键词 多粒度覆盖粗糙集,直觉模糊集,最小描述,最大描述,融合

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.01.017

Multigranulation Covering Rough Intuitionistic Fuzzy Sets Model Based on Minimal and Maximal Descriptions

XUE Zhan-ao SI Xiao-meng WANG Nan ZHU Tai-long

(College of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

(Engineering Lab of Henan Province for Intelligence Business & Internet of Things, Xinxiang 453007, China)

Abstract Covering rough sets and intuitionistic fuzzy sets, which have strong complementary, are the basic theories of dealing with uncertainty. It is a hot research topic to combine covering rough sets and intuitionistic fuzzy sets. In this paper, the combination of multigranularity covering rough sets and intuitionistic fuzzy sets was studied. Firstly, minimal and maximal descriptions, which are extended from single granulation to multigranulation, were proposed based on multigranulation, and the fusion of multigranularity was discussed. Secondly, the concept of fuzzy covering rough membership and non-membership was defined on minimal and maximal descriptions respectively. Then, two new models were structured, which are multigranulation covering rough intuitionistic fuzzy sets based on minimal description and multigranulation covering rough intuitionistic fuzzy sets based on maximal description, and their properties were discussed and illustrated with examples. Finally, the relationships of the two models were researched. This study provides a new method for the combination of multigranulation covering rough sets and intuitionistic fuzzy sets.

Keywords Multigranulation covering rough sets, Intuitionistic fuzzy sets, Minimal description, Maximal description, Fusion

1 引言

Pawlak 教授于 1982 年提出了粗糙集,其是处理不完备、不精确和不相容信息的数学方法[1];Zadeh 教授于 1965 年提出模糊集,它是描述模糊现象和模糊概念的重要方法[2];1986 年,Atanassov 在模糊集的基础上提出了直觉模糊集的概念[3-5],直觉模糊集采用隶属度函数、非隶属度函数和犹豫度函数共同描述信息的不确定性,比传统的模糊集表达的信息更加丰富。经过了二十几年的发展,直觉模糊集理论和粗糙集理论已经在理论和实际应用领域上取得了可喜的成果,并在数据挖掘、模式识别、知识发现等领域取得了很大的成功[6-9]。粗糙集和直觉模糊集理论在处理不确定性和不精确性问题时,二者之间有很强的互补性,许多学者将其创造性地融合,已经成为了新的研究热点[10-17]。

近几年,多粒度粗糙集和直觉模糊集的研究引发了许多学者的关注,并取得了一些有意义的研究成果。钱宇华等从粒计算的角度出发,提出了多粒度粗糙集模型,并证明了多粒度粗糙集模型是经典粗糙集模型的一种拓展模型,给出乐观和悲观多粒度粗糙集模型[18-20]。多粒度粗糙集模型自提出以来,引起了不少学者的兴趣。张明通过分析乐观多粒度粗糙集和悲观多粒度粗糙集的不足之处,提出一种可变多粒度粗糙集模型[21]。刘财辉利用最大描述将传统的多粒度粗糙集拓展到覆盖空间,提出了两种新的多粒度粗糙集模型[22]。黄婧从多粒度的角度,建立了最小描述的多粒度覆盖粗糙集

到稿日期:2015-07-30 返修日期:2015-10-08 本文受国家自然科学基金计划项目(61273018),河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410174),河南省教育厅计划项目(14A520082),新乡市重点科技攻关计划项目(ZG14020)资助。

薛占熬(1963-),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能基础理论、粗糙集理论,E-mail:xuezhanao@163.com;**司小朦**(1989-),女,硕士生,主要研究方向为直觉模糊集理论、粗糙集;**王 楠**(1991-),男,硕士生,主要研究方向为模糊集理论;**朱泰隆**(1990-),男,硕士生,主要研究方向为博弈论、决策论和粗糙集理论。

模型，用最小描述建立了两类不同的上下近似算子，研究了其性质，给出了一种基于最小描述求属性约简的新算法[23]。郭郁婷将多粒度粗糙集与覆盖粗糙直觉模糊集结合，建立了多粒度覆盖粗糙直觉模糊集模型，并给出了该模型下的一些性质[24]。这些工作都极大地促进了多粒度粗糙集和直觉模糊集融合的研究。

本文在上述研究的基础上，进一步对多粒度覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合进行深入研究。首先，将最小描述、最大描述从单一粒度推广到多个粒度，提出了多粒度的最小描述和最大描述，讨论了多粒度的融合；其次，分别给出了基于最小描述和最大描述的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度的概念，构建了两种新的模型，讨论了它们的性质，并给出例子进行说明；最后，分析和研究了两种模型的关系。该研究为多粒度覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合提供了一种方法。

2　基础知识

2.1　粗糙集基础知识

定义 1(粗糙集)[1]　设 U 是一个论域，R 是 U 上的一个等价关系，$U/R=\{K_1,K_2,\cdots,K_n\}$ 是论域 U 上的一个划分，$x\in U$，则 X 关于 R 的下近似和上近似分别为：

$$\underline{R}(X)=\cup\{K_i\mid K_i\in U/R\wedge K_i\subseteq X\}$$

$$\overline{R}(X)=\cup\{K_i\mid K_i\in U/R\wedge K_i\cap X\neq\emptyset\}$$

当$\underline{R}(X)=\overline{R}(X)$时，称 X 是在 U 中关于 R 的精确集；

当$\underline{R}(X)\neq\overline{R}(X)$时，称 X 是在 U 中关于 R 的粗糙集。

定义 2(覆盖、覆盖近似空间)[25]　设 U 是一个论域，C 是 U 的一个子集族。如果 C 中的所有集合都非空，且 $\cup C=U$，则称 C 是 U 的一个覆盖，(U,C)为一个覆盖近似空间。

定义 3(最小描述)[25]　设(U,C)为一个覆盖近似空间，$x\in U$，则称 $Md(x)=\{K\in C\mid x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\subseteq K\Rightarrow K=S)\}$为 x 的最小描述。

定义 4(最大描述)[26]　设(U,C)为一个覆盖近似空间，$x\in U$，则称 $Maxd(x)=\{K\in C\mid x\in K\wedge(\forall S\in C\wedge x\in S\wedge S\supseteq K\Rightarrow K=S)\}$为 x 的最大描述。

定义 5(粗糙隶属度函数)[27]　设 U 是一个论域，R 是 U 上的一个等价关系。$\forall x\in U,X\in U$，定义 $\mu_X^R(x)=|[x]_R\cap X/[x]_R|$为 x 关于 R 的粗糙隶属度函数。其中，$|\cdot|$表示集合的基数，$[x]_R$ 表示元素 x 关于 R 的等价类。

定义 6(乐观多粒度粗糙集)[18-20]　设 $T=(U,AT,f)$为一信息系统或数据表，其中，U 是论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，则对任意的 $X\subseteq U$，其关于 A_i 的乐观多粒度下近似集、上近似集分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i^O}(X)=\{x\in U\mid[x]_{A_1}\subseteq X\vee[x]_{A_2}\subseteq X\vee[x]_{A_3}\subseteq X\vee\cdots\vee[x]_{A_m}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i^O}(X)=\sim(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i^O}(\sim X))$$

其中，$[x]_{A_i}$ 为 m 个知识粒度$[x]_{A_1},[x]_{A_2},\cdots,[x]_{A_m}$ 中的某个知识粒，$\vee$ 是析取运算，$\wedge$ 是合取运算，下文相同，不再说明。若$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i^O}(X)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i^O}(X)$，称 X 是乐观多粒度粗糙集，否则称 X 是乐观多粒度可定义集。

定义 7(悲观多粒度粗糙集)[18-20]　$T=(U,AT,f)$为一信息系统或数据表，其中 U 是论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，则对任意的 $X\subseteq U$，其关于 A_i 的悲观多粒度下近似集、上近似集分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i^P}(X)=\{x\in U\mid[x]_{A_1}\subseteq X\wedge[x]_{A_2}\subseteq X\wedge[x]_{A_3}\subseteq X\wedge\cdots\wedge[x]_{A_m}\subseteq X\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i^P}(X)=\sim(\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i^P}(\sim X))$$

若$\underline{\sum_{i=1}^{m}A_i^P}(X)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}A_i^P}(X)$，称 X 是悲观多粒度粗糙集，否则称 X 是悲观多粒度可定义集。

2.2　直觉模糊集基础知识

定义 8(直觉模糊集、直觉模糊幂集)[3-5]　设在一个非空经典集合 U 上，具有如下形式的集合 $A=\{(x,\mu_A(x),v_A(x))\mid x\in U\}$称为 U 上的一个直觉模糊集(简写为 IFS)。其中函数 $\mu_A(x):U\rightarrow[0,1]$和 $v_A(x):U\rightarrow[0,1]$分别表示 U 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，并且满足 $0\leqslant\mu_A(x)+v_A(x)\leqslant1$，$\forall x\in U$。为了表达方便，通常将直觉模糊子集简称为直觉模糊集，称 U 上的直觉模糊子集的全体为直觉模糊幂集，记为 $IFS(U)$。

两个直觉模糊集的包含关系、相等关系、并、交、补集运算为：

(1)$A\subseteq B\Leftrightarrow\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x),v_A(x)\geqslant v_B(x),\forall x\in U$

(2)$A=B\Leftrightarrow\mu_A(x)=\mu_B(x),v_A(x)=v_B(x),\forall x\in U$

(3)$A\cup B=\{(x,\max(\mu_A(x),\mu_B(x)),\min(v_A(x),v_B(x)))\mid x\in U\}$

(4)$A\cap B=\{(x,\min(\mu_A(x),\mu_B(x)),\max(v_A(x),v_B(x)))\mid x\in U\}$

(5)$\sim A=\{(x,v_A(x),\mu_A(x))\mid x\in U\}$

3　基于最小描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集

本节根据最小描述的概念，给出多粒度的最小描述和基于最小描述的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度的定义。提出了基于最小描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集模型，对其性质进行了讨论，并用算例进行了验证。

定义 9(多粒度的最小描述)　设(U,C)是一个覆盖近似空间，其中 U 为非空有限论域，$C=\{C_i\mid1\leqslant i\leqslant m\}$，$C_i$ 为 U 的覆盖族。对任意 $x\in U$，$Md_{C_i}(x)$是 C_i 的最小描述，则多粒度的最小描述为：

$$Md^{\wedge}(x)=\{K'\in Md_{C_i}(x)\mid x\in K'\wedge(\forall S'\in Md_{C_i}(x)\wedge x\in S'\wedge S'\subseteq K'\Rightarrow K'=S')\}$$

定义 10(基于最小描述的模糊多粒度覆盖粗糙隶属度和非隶属度)　设(U,C)为一个覆盖近似空间，U 是非空有限论域，$C=\{C_i\mid1\leqslant i\leqslant m\}$为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，$A\in IFS(U)$，$x\in U$，定义 x 关于 A 的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度分别为：

$$\mu_A^{\wedge}(x)=\sum_{y\in\cup Md^{\wedge}(x)}\mu_A(y)/|\cup Md^{\wedge}(x)|$$

$$\nu_A^{\wedge}(x)=\sum_{y\in\cup Md^{\wedge}(x)}\nu_A(y)/|\cup Md^{\wedge}(x)|$$

定义 11(基于最小描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集)　设(U,C)为一个覆盖近似空间，U 是非空有限论域，$C=\{C_i\mid1\leqslant i\leqslant m\}$为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，$A\in IFS(U)$，$x\in U$，定义 A 关于覆盖近似空间(U,C)上基于最小描述的多粒度下、上近似直觉模糊算子分别为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\{(x,\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}A}(x),\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}A}(x))\mid x\in U\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\{(x,\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}A}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}A}(x))\mid x\in U\}$$

其中，

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_A^{\wedge}(x))$$

$$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\max(\nu_A(x),\nu_A^{\wedge}(x))$$

$$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_A^{\wedge}(x))$$

$$\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\min(\nu_A(x),\nu_A^{\wedge}(x))$$

将该模型简称为 I 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集。若 $\forall x\in U$，有 $\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$，则称 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 是可定义的，否则称 A 是粗糙的。

当 $m=1$ 时，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$ 退化为基于最小描述的覆盖粗糙直觉模糊集。

当 A 为分明集时，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$ 退化为基于最小描述的多粒度覆盖粗糙集。

当 A 为模糊集时，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$ 退化为基于最小描述的多粒度覆盖粗糙模糊集。

定理 1 设 (U,C) 为覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$C=\{C_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，$|C|=m$，$A,B\in IFS(U)$，$x\in U$。则基于最小描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集具有以下性质：

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(U)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(U)=U$。

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(\varnothing)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(\varnothing)=\varnothing$。

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)\subseteq A\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$。

(4) 若 $A\subseteq B$，则 $\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(B)$。

证明：

(1) U 为直觉模糊全集，对于 $x\in U$，存在 $\mu_U(x)=1$，$\nu_U(x)=0$。

由定义 10 得 $\mu_U^{\wedge}(x)=1$，$\nu_U^{\wedge}(x)=0$。

由定义 11 得：

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}U}(x)=\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}U}(x)=1,\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}U}(x)=\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}U}(x)=0。$$

因此，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(U)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(U)=U$。

(2) 证明方法同(1)。

(3) 由定义 11，对于 $\forall x\in U$，$\mu_A(x)\leqslant\mu_A^{\wedge}(x)$ 或者 $\mu_A(x)>\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\leqslant\nu_A^{\wedge}(x)$ 或者 $\nu_A(x)>\nu_A^{\wedge}(x)$。

有以下 4 种情况：

1) $\mu_A(x)\leqslant\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\leqslant\nu_A^{\wedge}(x)$。

2) $\mu_A(x)\geqslant\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\leqslant\nu_A^{\wedge}(x)$。

3) $\mu_A(x)\leqslant\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\geqslant\nu_A^{\wedge}(x)$。

4) $\mu_A(x)\geqslant\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\geqslant\nu_A^{\wedge}(x)$。

在此只证明 1) 和 2)。

当 $\mu_A(x)\leqslant\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\leqslant\nu_A^{\wedge}(x)$ 时，$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\mu_A(x)$，$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\mu_A^{\wedge}(x)$；$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\nu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\nu_A(x)$。则，$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)\leqslant\mu_A(x)\leqslant\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)$，$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)\geqslant\nu_A(x)\geqslant\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)$。

当 $\mu_A(x)\geqslant\mu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_A(x)\leqslant\nu_A^{\wedge}(x)$ 时，$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\mu_A^{\wedge}(x)$，$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\mu_A(x)$，$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\nu_A^{\wedge}(x)$，$\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)=\nu_A(x)$。则，$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)\leqslant\mu_A(x)\leqslant\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)$，$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)\geqslant\nu_A(x)\geqslant\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)}(x)$。

同理可得 3) 和 4)。

因此，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)\subseteq A\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)$。

(4) 证明方法同(3)。

例 1 设 (U,C) 为覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$C=\{C_1,C_2\}$，$C_1=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\},\{x_1,x_4,x_5\}\}$，$C_2=\{\{x_1\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_4,x_5\}\}$。

直觉模糊集 A 为：

$A=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.4,0.3),(x_3,0.8,0.1),(x_4,0.2,0.3),(x_5,0.3,0.6)\}$

计算 A 的 I 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集。

步骤 1 计算元素 x 基于多粒度下的最小描述。

$Md^{\wedge}(x_1)=\{\{x_1\}\}$

$Md^{\wedge}(x_2)=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3\}\}$

$Md^{\wedge}(x_3)=\{\{x_2,x_3\}\}$

$Md^{\wedge}(x_4)=\{\{x_2,x_3,x_4\},\{x_4,x_5\}\}$

$Md^{\wedge}(x_5)=\{\{x_4,x_5\}\}$

步骤 2 计算 A 的 I 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊的下、上近似为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.4,0.3),(x_3,0.6,0.2),(x_4,0.2,0.33),(x_5,0.25,0.6)\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.6,0.23),(x_3,0.8,0.1),(x_4,0.43,0.3),(x_5,0.3,0.45)\}$$

4 基于最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集

与第 3 节类似，根据最大描述的概念，定义了多粒度的最大描述和基于最大描述的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度。提出了基于最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集模型，对其性质进行了讨论，并用算例进行了验证。

定义 12(多粒度的最大描述) 设 (U,C) 是一个覆盖近似空间，其中 U 为非空有限论域，$C=\{C_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 U 的覆盖族，C_i 为 U 的一个覆盖。对任意 $x\in U$，$Maxd_{C_i}(x)$ 是 C_i 的最大描述，则多粒度的最大描述为：

$$Maxd^{\vee}(x)=\{K'\in Maxd_{C_i}(x)\mid x\in K'\wedge(\forall S'\in Maxd_{C_i}(x)\wedge x\in S'\wedge S'\supseteq K'\Rightarrow K'=S')\}$$

定义 13(基于最大描述的模糊多粒度覆盖粗糙隶属度和非隶属度) 设 (U,C) 为一个覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$C=\{C_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，

$A\in IFS(U)$，$x\in U$，定义 x 关于 A 的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度分别为：

$$\mu_A^{\vee}(x)=\sum_{y\in\bigcup Maxd^{\vee}(x)}\mu_A(y)/|\bigcup Maxd^{\vee}(x)|$$

$$\nu_A^{\vee}(x)=\sum_{y\in\bigcup Maxd^{\vee}(x)}\nu_A(y)/|\bigcup Maxd^{\vee}(x)|$$

定义 14（基于最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集） 设 (U,C) 为一个覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$C=\{C_i|1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，$A\in IFS(U)$，$x\in U$，定义 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 上基于最大描述的多粒度下、上近似直觉模糊算子分别为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)=\{(x,\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x),\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x))|x\in U\}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)=\{(x,\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x))|x\in U\}$$

其中，

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_A^{\vee}(x))$$

$$\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x)=\max(\nu_A(x),\nu_A^{\vee}(x))$$

$$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_A^{\vee}(x))$$

$$\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}}(x)=\min(\nu_A(x),\nu_A^{\vee}(x))$$

将该模型简称为 II 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集。若 $\forall x\in U$，有 $\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$，则称 A 关于覆盖近似空间 (U,C) 是可定义的，否则称 A 是粗糙的。

当 $m=1$ 时，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$ 退化为基于最大描述的覆盖粗糙直觉模糊集。

当 A 为分明集时，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$ 退化为基于最大描述的多粒度覆盖粗糙集。

当 A 为模糊集时，$\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$ 退化为基于最大描述的多粒度覆盖粗糙模糊集。

定理 2 设 (U,C) 为覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$C=\{C_i|1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，$|C|=m$，$A,B\in IFS(U)$，$x\in U$，则基于最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集具有以下性质：

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(U)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(U)=U$。

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(\emptyset)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(\emptyset)=\emptyset$。

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)\subseteq A\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$。

(4) 如果 $A\subseteq B$，则 $\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(B)$，$\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(B)$。

证明：证明方法同定理 1。

例 2　设 (U,C) 为覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$C=\{C_1,C_2\}$，$C_1=\{\{x_1,x_2,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\},\{x_2,x_5\}\}$，$C_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_4\},\{x_1,x_5\}\}$。

直觉模糊集 A 为：

$A=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.4,0.3),(x_3,0.8,0.1),(x_4,0.2,0.3),(x_5,0.3,0.6)\}$

计算 A 的 II 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集。

步骤 1　计算元素 x 基于多粒度下的最大描述。

$Maxd^{\vee}(x_1)=\{\{x_1,x_2,x_5\}\}$

$Maxd^{\vee}(x_2)=\{\{x_1,x_2,x_5\},\{x_2,x_3,x_4\}\}$

$Maxd^{\vee}(x_3)=\{\{x_2,x_3,x_4\}\}$

$Maxd^{\vee}(x_4)=\{\{x_2,x_3,x_4\}\}$

$Maxd^{\vee}(x_5)=\{\{x_1,x_2,x_5\}\}$

步骤 2　计算 A 的 II 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊的下、上近似为：

$\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)=\{(x_1,0.43,0.4),(x_2,0.4,0.32),(x_3,0.47,0.23),(x_4,0.2,0.3),(x_5,0.3,0.6)\}$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.46,0.3),(x_3,0.8,0.1),(x_4,0.47,0.23),(x_5,0.43,0.4)\}$

5　I 型和 II 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集的关系

定理 3 设 (U,C) 为覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$C=\{C_i|1\leqslant i\leqslant m\}$ 为 U 的覆盖族，C_i 是 U 的一个覆盖，$|C|=m$，$A\in IFS(U)$，$x\in U$。若 $\bigcup Md^{\wedge}(x)=\bigcup Maxd^{\vee}(x)$，则

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\underline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A),\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i}(A)$$

证明：由定义 10、定义 11、定义 13 和定义 14，容易得证，过程略。

例 3（续例 2）　设 (U,C_i) 为覆盖近似空间，U 为非空有限论域，$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$C=\{C_1,C_2\}$，$C_1=\{\{x_1,x_2,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_3,x_4\},\{x_2,x_5\}\}$，$C_2=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_4\},\{x_1,x_5\}\}$。

直觉模糊集 A 为：

$A=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.4,0.3),(x_3,0.8,0.1),(x_4,0.2,0.3),(x_5,0.3,0.6)\}$

计算 A 的 I 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集。

步骤 1　计算元素 x 在多粒度下的最小描述。

$Md^{\wedge}(x_1)=\{\{x_1,x_2\},\{x_1,x_5\}\}$

$Md^{\wedge}(x_2)=\{\{x_1,x_2\},\{x_2,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_2,x_4\}\}$

$Md^{\wedge}(x_3)=\{\{x_2,x_3\}\{x_3,x_4\}\}$

$Md^{\wedge}(x_4)=\{\{x_3,x_4\}\{x_2,x_4\}\}$

$Md^{\wedge}(x_5)=\{\{x_1,x_5\}\{x_2,x_5\}\}$

步骤 2　显然可以得到：

$\bigcup Md^{\wedge}(x_1)=\bigcup Maxd^{\vee}(x_1)$

$\bigcup Md^{\wedge}(x_2)=\bigcup Maxd^{\vee}(x_2)$

$\bigcup Md^{\wedge}(x_3)=\bigcup Maxd^{\vee}(x_3)$

$\bigcup Md^{\wedge}(x_4)=\bigcup Maxd^{\vee}(x_4)$

$\bigcup Md^{\wedge}(x_5)=\bigcup Maxd^{\vee}(x_5)$

步骤 3　计算 A 的 I 型多粒度覆盖粗糙直觉模糊集。

$\underline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\{(x_1,0.43,0.4),(x_2,0.4,0.32),(x_3,0.47,0.23),(x_4,0.2,0.3),(x_5,0.3,0.6)\}$

$\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i}(A)=\{(x_1,0.6,0.3),(x_2,0.46,0.3),(x_3,0.8,0.1),(x_4,0.47,0.23),(x_5,0.43,0.4)\}$

步骤 4　通过以上 3 步计算，当 $\bigcup Md^{\wedge}(x)=\bigcup Maxd^{\vee}(x)$ 时，可以得到：

$$\sum_{i=1}^{m}\underline{CK_i}(A)=\sum_{i=1}^{m}\underline{CX_i}(A),\overline{\sum_{i=1}^{m}CK_i(A)}=\overline{\sum_{i=1}^{m}CX_i(A)}$$

本节主要讨论了Ⅰ型和Ⅱ型的两种多粒度覆盖粗糙直觉模糊集的关系(定理3),同时进行举例说明。

结束语 覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合研究是一个新的热点。在覆盖粗糙直觉模糊集中,最小描述、最大描述的概念是在单一粒度的基础上建立起来的。本文首先将最小描述、最大描述概念从单一粒度推广到多个粒度上,给出了多粒度的最小描述和最大描述,讨论了多粒度的融合;其次,分别给出了基于最小描述和最大描述的模糊覆盖粗糙隶属度、非隶属度的概念,构建了两种新的模型即基于最小描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集和基于最大描述的多粒度覆盖粗糙直觉模糊集,讨论了它们的性质,并进行举例说明;最后,分析和研究了两种模型的关系。该研究为多粒度覆盖粗糙集和直觉模糊集的融合提供了一种方法。

参 考 文 献

[1] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[2] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and control,1965,8(3):338-353.

[3] ATANSSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1986,20(1):87-96.

[4] ATANSSOV K T. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1994,61(2):137-142.

[5] ATANSSOV K T. More on intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1989,33(1):37-45.

[6] YU H,LIU Z G,WANG G Y. An automatic method to determine the number of clusters using decision-theoretic rough set [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55(1):101-115.

[7] WANG S P,ZHU Q X, ZHU W,et al. Graph and matrix approaches to rough sets through matroids [J]. Information Sciences,2014,288:1-11.

[8] MEI J P,CHEN L H. Fuzzy clustering with weighted Medoids for relational data [J]. Pattern Recognition,2010,43(5):1964-1974.

[9] YAO Y Q,MI J S,LI Z J. A novel variable precision (θ,σ)-fuzzy rough set model based on fuzzy granules [J]. Fuzzy Sets and Systems,2014,236(1):58-72.

[10] LIN Y. Intuitionistic fuzzy rough set model based on conflict distance and applications [J]. Applied Soft Computing, 2015, 31(2):266-273.

[11] ZHANG X H,BING Z,PENG L. A general frame for intuitionistic fuzzy rough sets [J]. Information Sciences,2012,216(24):34-49.

[12] ZHANG Z M. A rough set approach to intuitionistic fuzzy soft set based decision making [J]. Applied Mathematical Modelling,2012,36(10):4605-4633.

[13] HUANG B,LI H X,WEI D K. Dominance-based rough set model in intuitionistic fuzzy information systems [J]. Knowledge-Based Systems,2012,28(28):115-123.

[14] WEI Lai,MIAO Duo-qian,XU Fei-fei,et al. Research on a covering rough fuzzy set model [J]. Journal of Computer Research and Development,2006,43(10):1719-1723. (in Chinese)
魏莱,苗夺谦,徐菲菲,等. 基于覆盖的粗糙模糊集模型研究[J]. 计算机研究与发展,2006,43(10):1719-1723.

[15] HU Jun,WANG Guo-yin,ZHANG Qing-hua. Covering based generalized rough fuzzy set model [J]. Journal of Software,2010,21(5),968-977. (in Chinese)
胡军,王国胤,张清华. 一种覆盖粗糙模糊集模型[J]. 软件学报,2010,21(5):968-977.

[16] TANG Jian-guo,SHE Kun,ZHU Feng. A new type of overing-based rough fuzzy set model [J]. Control and Decision,2012,27(11):1652-1662. (in Chinese)
汤建国,佘堃,祝峰. 一种新的覆盖粗糙模糊集模型[J]. 控制与决策,2012,27(11):1652-1662.

[17] ZHANG Zhi-ming,BAI Yun-chao,TIAN Jing-feng. Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy coverings [J]. Control and Decision,2010,25(9):1369-1373. (in Chinese)
张植明,白云超,田景峰. 基于覆盖的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策,2010,25(9):1369-1373.

[18] QIAN Y H,LIANG J Y,YAO Y Y,et al. MGRS:A multi-granulation rough set [J]. Information Sciences,2010,180(6):949-970.

[19] QIAN Y H,LIANG J Y,DANG C Y. Incomplete multi-granulation rough set [J]. IEEE Transactions on Systems,Man and Cybernetics,Part A:Systems and Humans,2010,40(2):420-431.

[20] QIAN Y H,LIANG J Y,WEI W. Pessimistic rough decision [J]. Zhejiang Ocean University (Natural Science),2010,20(5):440-449.

[21] ZHANG Ming,TANG Zhen-ming,XU Wei-yan,et al. Variable multigranulation rough set model [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2012,25(4):709-720. (in Chinese)
张明,唐振民,徐维艳,等. 可变多粒度粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能,2012,25(4):709-720.

[22] LUI Cai-hui. Covering-based multigranulation rough set model based on minimal description of elements [J]. Computer Science,2013,40(12):64-67. (in Chinese)
刘财辉. 一种元素最大描述下的多粒度覆盖粗糙集模型[J]. 计算机科学,2013,40(12):64-67.

[23] HUANG Jing,LI Jin-jin. Covering rough sets model based on multi-granulation of minimal description [J]. Computer engineering and Application,2013,49(9):134-149. (in Chinese)
黄婧,李进金. 最小描述的多粒度覆盖粗糙集模型[J]. 计算机工程与应用,2013,49(9):134-149.

[24] GUO Yu-ting,LI Jin-jin,LI Ke-dian,et al. Multi- granulation covering rough-intuitionistic fuzzy set model [J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences),2015,51(2):438-446. (in Chinese)
郭郁婷,李进金,李克典,等. 多粒度覆盖粗糙直觉模糊集模型[J]. 南京大学学报(自然科学版),2015,51(2):438-446.

[25] BONIKOWSKI Z, BRYNIARSKI E, WYBRANIEC-SKARDOWSKA U. Extensions and intentions in the rough set theory [J]. Information Sciences,1998,107(1):149-167.

[26] ZHU W,WANG F Y. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets [J]. Information Sciences,2003,152(1):217-230.

[27] PAWLAK Z. Rough sets:Theoretical aspects of reasoning about data [M]. Boston:Kluwer Academic Publishers,1991:1-79.