第 45 卷 第 2 期
2018 年 2 月

计 算 机 科 学
COMPUTER SCIENCE

Vol. 45 No. 2
Feb. 2018

基于直觉模糊可能性分布的三支决策模型的研究

薛占熬 辛现伟 袁艺林 吕敏杰

(河南师范大学计算机与信息工程学院 河南 新乡 453007)

(“智慧商务与物联网技术”河南省工程实验室 河南 新乡 453007)

摘 要 直觉模糊集理论和可能性理论的融合是不确定问题领域的一个研究热点。文中提出了一种基于直觉模糊可能性分布的直觉模糊可能性测度(Intuitionistic Fuzzy Probability Measurement,IFPM),并在此基础上构建了三支决策模型。首先,定义了直觉模糊决策空间及该空间上的直觉模糊可能性分布,并对其性质进行了证明,给出了论域对象的隶属度和非隶属度可能性均值的计算方法。然后,讨论了论域对象的隶属度和非隶属度可能性均值与决策阈值的关系,分析了它们之间的概率分布情况。根据概率分布—可能性分布的转换关系,给出决策规则和三支决策模型,提出了一种基于直觉模糊可能性分布的 IFPM 决策风险计算方法。最后,考虑论域中对象的增减变化引起的 IFPM 变化,给出对应公式并对动态决策过程进行分析,同时通过实例验证了该模型的有效性。

关键词 直觉模糊决策空间,直觉模糊可能性分布,IFPM,可能性均值,三支决策

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.02.024

Study on Three-way Decisions Based on Intuitionistic Fuzzy Probability Distribution

XUE Zhan-ao XIN Xian-wei YUAN Yi-lin LV Min-jie

(College of Computer and Information Engineering,Henan Normal University,Xinxiang,Henan 453007,China)

(Engineering Technology Research Center for Computing Intelligence & Data Mining of Henan Province,Xinxiang,Henan 453007,China)

Abstract The fusion of intuitionistic fuzzy sets theory and possibility theory is a hot spot for dealing with uncertain questions. This paper proposed a three-way decisions model based on the probability distribution of intuitionistic fuzzy probability measurement (IFPM). First of all, the intuitionistic fuzzy decision space and the possibility distribution of the space were defined, and the properties of them were proved. Then, the calculation method of possibility means value for domain object membership degree and the non-membership degree was given. Thirdly, by analyzing the relationship possibility mean value of domain object membership degree and the non-membership degree between decision threshold, its probability distribution was discussed. Thus the three-way decisions model based on the probability distribution to the possibility distribution of transformation relations was expanded. An IFPM decision-making risk calculation method was given. Finally, this paper provided the formulas and analyzed the dynamic decision process of the three-way decisions through analyzing the changing of IFPM under different domain elements, and validated the effectiveness of the model through examples.

Keywords Intuitionistic fuzzy decision space, Intuitionistic fuzzy possibility distribution, IFPM, Possibility mean-value, Three-way decisions

Zadeh[1]于 1965 年提出了 Fuzzy 集概念,用于处理模糊性和不确定性问题。Atanassov 于 1986 年针对模糊集只能描述“亦此亦彼”的缺陷,提出直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Set,IFS)的概念[2],该概念引起了学术界的高度关注[3-6]。

Zadeh[7]于 1978 年提出了可能性理论,将概率论中的点扩展到模糊集合中的[0,1]区间,分析可能性分布与概率分布间的关系,并对可能性分布和可能性测度进行了定义和讨论。随后,学者们不断对该理论进行完善与发展[8-10]。

Pawlak 于 1982 年提出了粗糙集理论[11]。由于经典粗糙集理论中的等价关系比较严格,从而导致了容噪能力较差、边界域的有用信息被掩盖等问题,因此如何扩展粗糙集理论引起了众多学者的关注[12-15]。Yao 基于决策粗糙集,于 2009 年

到稿日期:2017-03-29 返修日期:2017-05-18 本文受国家自然科学基金计划项目(61772176,61402153),河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410174),新乡市科技攻关计划项目(CXGG17002)资助。

薛占熬(1963-),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能基础理论、粗糙集理论,E-mail:xuezhanao@163.com(通信作者);**辛现伟**(1991-),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论、直觉模糊集理论和决策论;**袁艺林**(1991-),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论和直觉模糊集理论;**吕敏杰**(1993-),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集理论和直觉模糊集理论。

最先给出了三支决策的概念[16]，赋予了粗糙集新的语义；Yao于2010年提出了三支决策理论[17]，该理论成为了一个新的研究热点[18-22]。

本文基于上述理论和前期研究，首先，运用直觉模糊集理论和可能性理论，给出直觉模糊决策空间和该空间上的直觉模糊可能性分布，定义了基于直觉模糊可能性分布的IFPM，并对它的性质进行了证明。然后，讨论论域对象隶属度和非隶属度的可能性均值与决策阈值的关系，分析其概率分布情况，通过概率分布－可能性分布的转换，给出一种新的三支决策模型，并提出了基于可能性分布的IFPM决策风险代价计算方法。最后，通过分析论域中对象的增减变化引起的IFPM变化，给出相应公式，对动态决策过程进行分析，并通过实例讨论了该模型的有效性。本文为解决直觉模糊知识框架下的多属性决策问题提供了一种新的思路与方法。

1 基础概念

定义1[23] 设U为有限非空论域，R是定义在论域U上的一个等价关系，$R\in U\times U$，记$apr=(U,R)$为论域U上的一个近似空间。论域U在等价关系R下的划分为$U/R=\{[x]_R|x\bigcup U\}$，其中$[x]_R$是包含x的等价类。$\forall X\in U$，它的上、下近似集合为：

$\overline{apr_R}(X)=\{x\in U|[x]_R\bigcap X\neq\emptyset\}$

$\underline{apr_R}(X)=\{x\in U|[x]_R\subseteq X\}$

根据上、下近似的定义，将论域U划分为3个部分：正域、边界域与负域。分别将其定义如下：

$POS(X)=\underline{apr_R}(X)$

$NEG(X)=U-\overline{apr_R}(X)$

$BND(X)=\overline{apr_R}(X)-\underline{apr_R}(X)$

通过引入一对阈值α和β来定义正域、负域和边界域中的决策对象，并生成三支决策的3条决策规则。设$0\leqslant\beta<\alpha\leqslant1$，$P(X|[x])=\frac{|X\bigcap[x]|}{|[x]|}$，则分别定义$(\alpha,\beta)$-正域、负域和边界域为：

$POS_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U|P(X|[x])\geqslant\alpha\}$

当$\{x\in U|P(X|[x])\geqslant\alpha\}$时，$x$属于$X$的概率不小于$\alpha$，将$x$划分到$X$的正域中，执行正域决策，即接受决策。

$NEG_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U|P(X|[x])\leqslant\beta\}$

当$\{x\in U|P(X|[x])\leqslant\beta\}$时，$x$属于$X$的概率不大于$\beta$，将$x$划分到$X$的负域中，执行负域决策，即拒绝决策。

$BND_{(\alpha,\beta)}(X)=\{x\in U|\beta<P(X|[x])<\alpha\}$

当$\{x\in U|\beta<P(X|[x])<\alpha\}$时，$x$属于$X$的概率介于$\alpha$与$\beta$之间，将$x$划分到$X$的边界中，执行边界域决策，即延缓决策。

定义2[2] 设U为有限非空论域，X为U的非空子集，则称$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$为论域$U$中的一个直觉模糊集，其中$\mu_A(x)$和$\nu_A(x)$分别表示$x$属于$A$的隶属度和非隶属度，记为$\mu_A(x):U\to[0,1]$和$\nu_A(x):U\to[0,1]$，并满足关系：$0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant1$。$IF(U)$表示论域$U$上的所有直觉模糊子集。若$\nu_A(x)=1-\mu_A(x)$，则直觉模糊集退化为一般模糊集。

定义3[2] 设$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$，$B=\{\langle x,\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle|x\in X\}$是两个直觉模糊集合，则$A$与$B$的并、交与积运算为：

$A\bigcup B=\{\langle x,\mu_A(x)\vee\mu_B(x),\nu_A(x)\wedge\nu_B(x)\rangle|\forall x\in U\}$

$A\bigcap B=\{\langle x,\mu_A(x)\wedge\mu_B(x),\nu_A(x)\vee\nu_B(x)\rangle|\forall x\in U\}$

$AB=\{\langle x,\mu_A(x)\mu_B(x),\nu_A(x)+\nu_B(x)-\nu_A(x)\nu_B(x)\rangle|\forall x\in U\}$

定义4[2] 设$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$，$B=\{\langle x,\mu_B(x),\nu_B(x)\rangle|x\in X\}$是两个直觉模糊集合，则$A$与$B$的相等关系和包含关系为：

$A=B$当且仅当，$\mu_A(x)=\mu_B(x)$且$\nu_A(x)=\nu_B(x)$；

$A\subseteq B$当且仅当，$\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)$且$\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)$。

定义5[9] 设X是在论域U上取值的变量，由模糊集合K产生的关于变量X的模糊约束为$R(X)$，与变量X有关的可能性分布用π_X表示。$\forall x\in U$，若$\pi_X=R(X)$，$\pi_X=\mu_K(x)=Poss(X=x)$，则称变量X取值为x的可能性分布为$\pi_X(x)$。

2 基于直觉模糊可能性分布的三支决策模型

2.1 直觉模糊可能性分布及其IFPM

定义6 设四元组(U,C,λ,D)表示一个直觉模糊决策空间(Intuitionistic Fuzzy Decision Space，IFDS)，决策阈值为(α,β)。U为相互独立的被决策对象组成的非空有限集合；λ为决策风险函数；$\forall x\in U$，在决策属性集C下有：

$\mu_c(x):x\to[0,1]$，$\nu_c(x):x\to[0,1]$，$0\leqslant\mu_c(x)+\nu_c(x)\leqslant1$

对象x的决策分类结果为D，$D=\{D_{Pos},D_{Neg},D_{Bnd}\}$，即$x$属于正域$D_{Pos}$、负域$D_{Neg}$或边界域$D_{Bnd}$。IFDS中所有决策对象组成的集合个数用$2^n$表示，$n$为被决策对象的个数。

定义7 设$\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个IFDS，其中$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是$IF(U)$上的非空直觉模糊子集，并有映射关系$F\to[0,1]$，且满足：

(1) $\bigvee_{x\in A}\{F_\mu(x)\}\leqslant1$，$\bigvee_{x\in A}\{F_\nu(x)\}\leqslant1$；

(2) $0\leqslant\bigvee_{x\in A}\{F_\mu(x)\}+\bigvee_{x\in A}\{F_\nu(x)\}\leqslant1$。

则称F是IFDS上的一个直觉模糊可能性分布。

定义8 设$\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个IFDS，决策阈值为(α,β)，其中$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是$IF(U)$上的非空直觉模糊子集。对于$\forall A\in U$，在属性集$C=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$下，论域对象$x_i\in U$的隶属度和非隶属度可能性均值为：

$$\begin{cases}\mu(x_i)=Ps(A)+\left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mu_j(x_i)-Ps(A)\right|\\ v(x_i)=Ng(A)-\left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}v_j(x_i)-Ng(A)\right|\end{cases}\tag{1}$$

其中，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$。设F为A上的直觉模糊可能性分布函数，当$A=\{\langle x_i,\mu_A(x_i),v_A(x_i)\rangle|x_i\in A\}$时，根据Zadeh概率-可能性分布一致性原则，给出IFPM为：

$$\begin{cases}Ps(A)=\bigwedge_{i=1}^{n}\{u_A(x_i)\vee F_\mu(x_i)\}\\ Ng(A)=\bigvee_{i=1}^{n}\{(v_A(x_i)\wedge F_\nu(x_i))\}\end{cases}\tag{2}$$

定理1 设U为论域，A和B是$IF(U)$上的非空直觉模

糊子集，且 $B\subseteq A$，则有：

(1)$0\leqslant Ps(A)+Ng(A)\leqslant 1$；

(2)$Ps(A\cup B)\geqslant Ps(A)\cup Ps(B)-Ps(A\cap B)$；

(3)$Ng(A\cap B)\leqslant Ng(A)\cap Ng(B)+Ps(A\cup B)$。

证明：(1)由定义 8 易证，下面证明(2)和(3)。

(2)$Ps(A\cup B)$

$$
\begin{aligned}
&=\bigwedge_{i=1}^{n}\{(\mu_A(x_i)\vee\mu_B(x_i))\vee F_\mu(x_i)\}\\
&=\bigwedge_{i=1}^{n}\{(\mu_A(x_i)\vee F_\mu(x_i))\vee(\mu_B(x_i)\vee F_\mu(x_i))\}\\
&=\bigwedge_{i=1}^{n}\{(\mu_A(x_i)\vee F_\mu(x_i))\}\vee(\bigwedge_{i=1}^{n}\{\mu_B(x_i)\vee F_\mu(x_i)\})\\
&=Ps(A)\vee Ps(B)
\end{aligned}
$$

同理可证：$Ps(A\cap B)=Ps(A)\wedge Ps(B)$。

$$
\begin{aligned}
&Ps(A)\cup Ps(B)-Ps(A\cap B)\\
&\quad=\max(Ps(A),Ps(B))-\min(Ps(A),Ps(B))\\
&\quad\leqslant Ps(A\cup B)=\max(Ps(A),Ps(B))
\end{aligned}
$$

因此，$Ps(A\cup B)\geqslant Ps(A)\cup Ps(B)-Ps(A\cap B)$。

(3)同理可证：$NG(A\cap B)=Ng(A)\wedge Ng(B)$，得 $Ng(A\cap B)\leqslant Ng(A)\cap Ng(B)+Ps(A\cup B)$。

2.2　三支决策模型的构造

定义 9　设 $\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个 IFDS，其中，$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$。$\forall x\in U$，$\mu_A(x):x\to[0,1]$，$\nu_A(x):x\to[0,1]$，决策阈值为(α,β)。若将 IFDS 中每个对象在不同属性 $c\in C$ 下的隶属度可能性均值 $\mu_A(x_i)$和非隶属度可能性均值 $v_A(x_i)$看成二维平面上的随机变量，则关于对象 $x_i\in U$ 的隶属度 $\mu_A(x_i)$和非隶属度 $v_A(x_i)$可能性均值的概率分布情况如表 1 所列。

表 1　关于对象的隶属度和非隶属度可能性均值和决策阈值的概率分布情况

Table 1　The probability distribution of possibility mean and decision threshold value between the membership and non-membership of the objects

隶属度和非隶属度可能性均值与决策阈值的关系		概率分布情况
$\mu(x_i)>\alpha$	$v(x_i)>\beta$	$P_1(\mu,v)=\{(\mu(x_i)>\alpha)\cap(v(x_i)>\beta)\}$
	$v(x_i)=\beta$	$P_2(\mu,v)=\{(\mu(x_i)>\alpha)\cap(v(x_i)=\beta)\}$
	$v(x_i)<\beta$	$P_3(\mu,v)=\{(\mu(x_i)>\alpha)\cap(v(x_i)<\beta)\}$
$\mu(x_i)=\alpha$	$v(x_i)>\beta$	$P_4(\mu,v)=\{(\mu(x_i)=\alpha)\cap(v(x_i)>\beta)\}$
	$v(x_i)=\beta$	$P_5(\mu,v)=\{(\mu(x_i)=\alpha)\cap(v(x_i)=\beta)\}$
	$v(x_i)<\beta$	$P_6(\mu,v)=\{(\mu(x_i)=\alpha)\cap(v(x_i)<\beta)\}$
$\mu(x_i)<\alpha$	$v(x_i)>\beta$	$P_7(\mu,v)=\{(\mu(x_i)<\alpha)\cap(v(x_i)>\beta)\}$
	$v(x_i)=\beta$	$P_8(\mu,v)=\{(\mu(x_i)<\alpha)\cap(v(x_i)=\beta)\}$
	$v(x_i)<\beta$	$P_9(\mu,v)=\{(\mu(x_i)<\alpha)\cap(v(x_i)<\beta)\}$

根据定义 1 可得论域 U 的正域 $D_{\rm Pos}$、负域 $D_{\rm Neg}$ 和边界域 $D_{\rm Bnd}$ 的概率分布。

正域 $D_{\rm Pos}$ 的概率分布为：

$$
\begin{aligned}
POS(\mu,v)&=\{(\mu(x_i)\geqslant\alpha)\cap(v(x_i)\leqslant\beta)\}\\
&\triangleq\{\mu(x_i)\geqslant\alpha,v(x_i)\leqslant\beta\}
\end{aligned}\tag{3}
$$

负域 $D_{\rm Neg}$ 的概率分布为：

$$
\begin{aligned}
NEG(\mu,v)&=\{(\mu(x_i)<\alpha)\cap(v(x_i)>\beta)\}\\
&\triangleq\{\mu(x_i)<\alpha,v(x_i)>\beta\}
\end{aligned}\tag{4}
$$

边界域 $D_{\rm Bnd}$ 的概率分布为：

$$
\begin{cases}
BND^1(\mu,v)=\{(\mu(x_i)<\alpha)\cap(v(x_i)\leqslant\beta)\}\\
\qquad\triangleq\{\mu(x_i)<\alpha,v(x_i)\leqslant\beta\}\\
BND^2(\mu,v)=\{(\mu(x_i)\geqslant\alpha)\cap(v(x_i)>\beta)\}\\
\qquad\triangleq\{\mu(x_i)\geqslant\alpha,v(x_i)>\beta\}
\end{cases}\tag{5}
$$

定义 10　设 $\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个 IFDS，阈值为(α,β)，其中，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是 $IF(U)$上的非空直觉模糊子集。$\forall x\in U$，若把 IFDS 中每个对象在不同属性 $c\in C$ 下的隶属度 $\mu(c_j)$和非隶属度 $\nu(c_j)$看作二维平面上的随机变量，则 $\kappa(\mu(c_j),\nu(c_j))$在$(\mu(c_j),\nu(c_j))$点处的函数值为：

$$
\kappa(\mu(c_j),\nu(c_j))=\frac{\mu(c_j)}{\kappa_u+\kappa_\nu}\cdot\frac{\nu(c_j)}{\kappa_u+\kappa_\nu}\tag{6}
$$

其中，$\kappa_\mu=\max\{\mu_j(x_i),\mu_k(x_i)\}$，$\kappa_\nu=\min\{\nu_j(x_i)+\nu_k(x_i)-\nu_j(x_i)\cdot\nu_k(x_i)\}$，$j=1,2,\cdots,m$；$k=1,2,\cdots,n$。规定，$\kappa(0,0)=0$。

通过定义 9，得到了关于正域 $D_{\rm Pos}$、负域 $D_{\rm Neg}$ 和边界域 $D_{\rm Bnd}$ 的概率分布。为避免概率分布转化为直觉模糊可能性分布过程中出现信息丢失，借鉴文献[24-25]的思想，给出概率分布到直觉模糊可能性分布的转换关系：

$$
\begin{cases}
F_i=\min(\kappa\{\kappa_\mu(x_i),\kappa_\nu(x_i)\})\\
H(P_i)=E(F_i)
\end{cases}\tag{7}
$$

其中，$H(P_i)=-P(\mu(x_i),v(x_i))\log_2 P(\mu(x_i),v(x_i))$为概率分布 P_i 的信息熵，熵值越大，可能性越小。$E(F_i)$为直觉模糊可能性分布 F_i 的不确定性，且有 $E(F(x_i))=\dfrac{H(F_i)}{H(x_i)}$，$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,m$。则正域 $D_{\rm Pos}$、负域 $D_{\rm Neg}$ 和边界域 $D_{\rm Bnd}$ 的均熵值分别表示如下。

正域 $D_{\rm Pos}$ 的均熵值：

$$
H(D_{\rm Pos})=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H(POS(\mu,v))\tag{8}
$$

负域 $D_{\rm Neg}$ 的均熵值：

$$
H(D_{\rm Neg})=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H(NEG(\mu,\nu))\tag{9}
$$

边界域 $D_{\rm Bnd}$ 的均熵值：

$$
H_{(\rm Bnd)}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H(BND^1(\mu,\nu))+H(BND^2(\mu,\nu))\tag{10}
$$

定义 11　设 $\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个 IFDS，$x_i\in U$ 在属性集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$下的隶属度和非隶属度可能性均值为$(\mu(x_i),v(x_i))$，则由此生成的三支决策规则如下。

接受决策规则 $D_{\rm Pos}$：

$$
\frac{H(F_i)}{m\sum_{j=1}^{m}H(\kappa(\mu_i(x_i),\nu_j(x_i)))}>H(D_{\rm Pos})\tag{11}
$$

拒绝决策规则 $D_{\rm Neg}$：

$$
\frac{H(F_i)}{m\sum_{j=1}^{m}H(\kappa(\mu_i(x_i),\nu_j(x_i)))}<H(D_{\rm Neg})\tag{12}
$$

延迟决策规则 $D_{\rm Bnd}$：

$$
H(D_{\rm Neg})\leqslant\frac{H(F_i)}{m\sum_{j=1}^{m}H(\kappa(\mu_i(x_i),\nu_j(x_i)))}\leqslant H(D_{\rm Pos})\tag{13}
$$

定义 12　设 $\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个 IFDS，决策风险函数如表 2 所列。

表 2 决策风险代价函数

Table 2 Decision risk cost function

D	λ	
	X	X^c
D_{Pos}	λ_{PPs}	λ_{PNg}
D_{Neg}	λ_{NPs}	λ_{NNg}
D_{Bnd}	λ_{BPs}	λ_{BNg}

D_{Pos}接受决策的风险代价函数为：

$$L(POS|x)=\lambda_{PPs}\cdot Ps(D_{Pos})+\lambda_{PNg}\cdot Ng(D_{Pos}) \tag{14}$$

D_{Neg}拒绝决策的风险代价函数为：

$$L(NEG|x)=\lambda_{NPs}\cdot Ps(D_{Neg})+\lambda_{NNg}\cdot Ng(D_{Neg}) \tag{15}$$

D_{Bnd}延缓决策域的风险代价函数为：

$$L(BND|x)=\lambda_{BPs}\cdot(Ps(D_{Bnd}^1)+Ps(D_{Bnd}^2))+\lambda_{BNg}\cdot(Ng(D_{Bnd}^1)+Ng(D_{Bnd}^2)) \tag{16}$$

其中，X 是决策正确分类对象的集合，X^c 是决策错误分类对象的集合。λ_{PPs}和 λ_{PNg}分别表示实体对象 x 在接受决策 D_{Pos}时正确分类和错误分类的代价；λ_{BPs}和 λ_{BNg}分别表示实体对象 x 在延迟决策 D_{Pos}时正确分类和错误分类的代价；λ_{NPs}和 λ_{NNg}分别表示实体对象 x 在拒绝决策 D_{Pos}时正确分类和错误分类的代价。$L(POS|x)$，$L(NEG|x)$和 $L(BND|x)$表示实体对象 x 在接受决策、延迟决策和拒绝决策的风险代价函数。

2.3 动态决策过程分析

本文中的“动态”指建立模型对象的动态变化，而不是指阈值(α,β)或者模型结构的动态变化。

设 $\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个 IFDS，$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$，论域 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$。当论域 U 中的元素对象发生变化时，论域 U 的 IFPM 的变化情况如下。

加入一个新的元素对象 $x_{i+1}\notin U$：

$$\begin{cases}Ps^+(U)=(\mu(x_{i+1})\vee F_{i+1})\wedge(\bigwedge_{i=1}^{n}\{\mu_U(x_i)\vee F_i\})\\ Ng^+(U)=(\nu(x_{i+1})\wedge F_{i+1})\vee(\bigvee_{i=1}^{n}\{\nu_U(x_i)\vee F_i\})\end{cases} \tag{17}$$

删除一个原有元素对象 $x_i\in U$：

$$\begin{cases}Ps^-(U)=(\bigwedge_{i=1}^{i-1}\{\mu_U(x_i)\vee F_i\}\wedge(\bigwedge_{i+1}^{n}\{\mu_U(x_i)\vee F_i\})\\ Ng^-(U)=(\bigvee_{i=1}^{i-1}\{\nu_U(x_i)\wedge F_i\}\vee(\bigvee_{i+1}^{n}\{\nu_U(x_i)\wedge F_i\})\end{cases} \tag{18}$$

动态决策过程分析：首先，在属性集 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$下，根据论域对象的变化类型，由直觉模糊可能性分布函数 F 和式(1)确定 IFPM，若添加了一个新的元素对象 $x_{i+1}\notin U$，则选择式(17)，若删除一个原有元素对象 $x_i\in U$，则选择式(18)；然后，运用式(2)计算新元素的隶属度和非隶属度可能性均值，并确定它所属的概率分布；最后，采用式(6)和式(11)－式(13)确定其所属的决策域。

3 实例分析

下面将通过一个风险投资实例来讨论和验证本模型的有效性。

例 1 设 $\Omega=(U,C,\lambda,D)$是一个 IFDS，决策阈值为(0.56,0.18)。论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$表示 5 种不同的投资方案，属性集 $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$分别表示财务风险、利率风险、市场风险、能力风险、实现风险和事件风险。综合考虑投资的风险，在 5 种不同的方案中选择风险较低的方案，实例分析数据如表 3 所列。

表 3 实例分析的具体数据

Table 3 The specific data of instance analysis

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
x_1	(0.6,0.2)	(0.6,0.1)	(0.5,0.2)	(0.6,0.2)	(0.4,0.25)	(0.6,0.1)
x_2	(0.5,0.2)	(0.7,0.2)	(0.7,0.25)	(0.5,0.1)	(0.4,0.3)	(0.7,0.2)
x_3	(0.5,0.1)	(0.4,0.3)	(0.4,0.2)	(0.8,0.2)	(0.6,0.15)	(0.5,0.2)
x_4	(0.6,0.15)	(0.7,0.2)	(0.5,0.4)	(0.6,0.2)	(0.5,0.2)	(0.2,0.6)
x_5	(0.4,0.2)	(0.8,0.1)	(0.4,0.2)	(0.7,0.2)	(0.6,0.3)	(0.6,0.15)

下面采用基于可能性分布的 IFPM 三支决策动态模型来确定风险较低的方案。

步骤 1 计算对象 x_i 的隶属度和非隶属度可能性均值。

(1)计算对象 x_i 在属性集 $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$下的隶属度和非隶属度均值：$x_1$(0.55,0.18)，$x_2$(0.58,0.21)，$x_3$(0.53,0.23)，$x_4$(0.52,0.29)，$x_5$(0.58,0.19)。

(2)由公式 $F_i=\kappa\{\kappa_\mu(x_i),\kappa_\nu(x_i)\}$以及式(1)、式(2)和式(6)，计算论域 U 的 IFPM：$F(x_1)=0.2$，$F(x_2)=0.08$，$F(x_3)=0.13$，$F(x_4)=0.16$，$F(x_5)=0.13$。可得，$Ps(U)=0.52$，$Ng(U)=0.18$。因此，对象 x_i 在属性集 $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$下的隶属度和非隶属度可能性均值为：$x_1$(0.58,0.14)，$x_2$(0.61,0.17)，$x_3$(0.56,0.19)，$x_4$(0.55,0.25)，$x_5$(0.61,0.15)。

步骤 2 根据式(3)－式(5)计算概率分布情况，由式(8)－式(10)计算正域 D_{Pos}、负域 D_{neg} 和边界域 D_{Bnd} 的均熵值：$H(D_{Pos})=0.863$，$H(D_{Neg})=0.808$，$H(D_{Bnd})=0.708$。

步骤 3 由式(7)计算论域对象 x_i 的熵值：$x_1=0.914$，$x_2=0.668$，$x_3=0.854$，$x_4=0.895$，$x_5=0.894$。

步骤 4 由式(11)－式(13)进行三支决策分类，即正域 D_{Pos}：$\{x_1,x_4,x_5\}$，负域 D_{Neg}：$\{x_2\}$，边界域 D_{Bnd}：$\{x_3\}$。

根据专家建议，风险评估函数 λ 如表 4 所列。

表 4 风险评估函数

Table 4 Risk assessment function

评估函数	λ_{PPs}	λ_{BPs}	λ_{NPs}	λ_{NNg}	λ_{BNg}	λ_{PNg}
函数值	0.1	0.65	1.2	0.08	0.35	0.96

步骤 5 从正域中选出风险较小的方案。

(1)由式(1)计算正域 D_{Pos} 的 IFPM：$Ps(D_{Pos})=0.52$，$Ng(D_{Pos})=0.18$。

(2)由式(2)计算正域 D_{Pos} 内对象的隶属度和非隶属度可能性均值：$\mu(x_1)=0.58$，$\nu(x_1)=0.17$；$\mu(x_4)=0.52$，$\nu(x_4)=0.28$；$\mu(x_5)=0.65$，$\nu(x_5)=0.14$。

3)由式(14)计算正域 D_{Pos} 的决策风险代价：$L(POS|x_1)=0.22$，$L(POS|x_4)=0.32$，$L(POS|x_5)=0.2$。$L(POS|x_1)>L(POS|x_4)>L(POS|x_5)$，因此选择方案 x_5 的风险较小。

结束语 为了使三支决策的理论研究跳出粗糙集的圈子，发挥出其更大的优势，将三支决策理论与其他领域知识不断结合，是一项重要内容。本文针对直觉模糊知识框架下的信息如何进行三支决策建模的问题，提出了一种基于直觉模糊分布的三支决策模型。通过论域对象的隶属度和非隶属度的直觉模糊可能性分布，构建其 IFPM，分析论域对象的概率分布，进而根据概率分布－可能性分布的转化关系和对应的熵值变化给出三支决策规则，并讨论了论域对象增减变化下的动态决策过程，最后用实例讨论了本模型的有效性。下一

步，将对直觉模糊知识框架中的动态阈值等问题进行研究。

参 考 文 献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control，1965，8(65)：338-353.

[2] ATANSSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and Systems，1986，20(1)：87-96.

[3] MENG F，CHEN X. Entropy and similarity measure of Atanassov's intuitionistic fuzzy sets and their application to pattern recognition based on fuzzy measures[J]. Pattern Analysis and Applications，2016，19(1)：11-20.

[4] ZHOU L. On Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Sets in the Complex Plane and the Field of Intuitionistic Fuzzy Numbers[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2016，24(2)：253-259.

[5] SONG Y，WANG X，LEI L，et al. A novel similarity measure on intuitionistic fuzzy sets with its applications[J]. Applied Intelligence，2015，42(2)：252-261.

[6] XUE Z A，SI X M，ZHU T L，et al. Study on model of covering-based rough intuitionistic fuzzy sets[J]. Computer Science，2016，43(1)：44-48，68. (in Chinese)
薛占熬，司小朦，朱泰隆，等. 覆盖粗糙直觉模糊集模型的研究[J]. 计算机科学，2016，43(1)：44-48，68.

[7] ZADEH L A. Possibility theory and its application to information analysis[C]// Proceedings of International Colloquium on Information Theory. Cachan：Juillet，1978：173-182.

[8] DUBOIS D，ESTEVA F，GODO5 L，et al. An information-based discussion of vagueness[C]// The 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems，2001. IEEE，2001：781-784.

[9] JI L N. Research on fusion theory of possibility distribution and its engineer application[D]. Taiyuan：North University of China，2015. (in Chinese)
吉琳娜. 可能性分布合成理论及其工程应用研究[D]. 太原：中北大学，2015.

[10] ZADEH L A. A note on modal logic and possibility theory[J]. Information Sciences，2014，279：908-913.

[11] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences，1982，11(5)：341-356.

[12] YAO Y Y，WONG S K M，LINGRAS P. A decision- theoretic rough set model[C]// Proceedings of the 5th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems. Tennessee：North-Holland，1990：17-25.

[13] ZIARKO W. Variable precision rough set model[J]. Journal of Computer and System Sciences，1993，46(1)：39-59.

[14] SLE D，ZIARKO W. The investigation of the Bayesian rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2005，40(1)：81-91.

[15] YAO Y Y. Probabilistic rough set approximations[J]. International Journal of Approximate Reasoning，2008，49(2)：255-271.

[16] YAO Y. Three-Way Decision：An Interpretation of Rules in Rough Set Theory[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer-Verlag，2009：642-649.

[17] YAO Y Y. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences，2010，180(3)：341-353.

[18] LIU D，LI T，LIANG D. Three-way Decisions in dynamic decision-theoretic rough sets[C]// International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology. Springer Berlin Heidelberg，2013：291-301.

[19] ZHANG Y P，ZOU H J，ZHAO S. Cost-sensitive Three-way Decisions model based on CAA[J]. Journal of NanJing University (Natural Sciences)，2015，51(2)：447-452. (in Chinese)
张燕平，邹慧锦，赵姝. 基于 CCA 的代价敏感三支决策模型[J]. 南京大学学报(自然科学版)，2015，51(2)：447-452.

[20] XUE Z A，ZHU T L，XUE T Y，et al. Three-way Decisions model based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Computer Science，2016，43(6)：285-288，297. (in Chinese)
薛占熬，朱泰隆，薛天宇，等. 基于直觉模糊集的三支决策模型[J]. 计算机科学，2016，43(6)：285-288，297.

[21] YU H，WANG G Y，LI T Y，et al. Three-way decisions：Methods and practices for complex problem solving[M]. Beijing：Science Press，2015：20-48. (in Chinese)
于洪，王国胤，李天瑞，等. 三支决策：复杂问题求解方法与实践[M]. 北京：科学出版社，2015：20-48.

[22] YAO Y Y. Three-Way Decisions and Cognitive Computing[J]. Cognitive Computation，2016(4)：1-12.

[23] 刘盾，李天瑞，苗夺谦，等. 三支决策和粒计算[M]. 北京：科学出版社，2013：1-13.

[24] KLIR G J，BEHZAD P，GEOREG J，et al. Probability-possibility transformations：a comparison[J]. International Journal of General Systems，1993，21(3)：291-310.

[25] DUBOIS D，PRADE H，SANDRI S. On Possibility Probability Transformations[M]// Fuzzy Logic. Netherlands：Springer，1997：103-112.

(上接第 102 页)

[10] XIA X W，LIU J N，HU Z B. An Improved Particle Swarm Optimizer based on Tabu Detecting and Local Learning Strategy in a Shrunk Search Space [J]. Applied Soft Computing，2014，23(1)：76-90.

[11] PARSOPOULOS K E. Parallel Cooperative Micro-Particle Swarm Optimization：A Master-slave Model [J]. Applied Soft Computing，2012，12(11)：3552-3579.

[12] ALFI A. PSO with Adaptive Mutation and Inertia Weight and its Application in Parameter Estimation of Dynamic Systems [J]. Acta Automatica Sinica，2011，37(5)：541-549.

[13] ZHANG Y，GONG D W. Feature Selection Algorithm based on Bare Bones Particle Swarm Optimization [J]. Neurocomputing，2015，148(1)：150-157.

[14] ZHANG Y，GONG D W，SUN X Y. Adaptive Bare Bones Particle Swarm Optimization Algorithm and its Convergence Analysis [J]. Soft Computing，2014，18(7)：1337-1352.

[15] TENG X Y，DONG H B，SUN J. Co-evolution Algorithm for Feature Selection [J]. Journal of CAAI Transactions on Intelligent Systems，2017，12(1)：1-9. (in Chinese)
滕旭阳，董红斌，孙静. 面向特征选择问题的协同演化方法[J]. 智能系统学报，2017，12(1)：1-9.

[16] DONG H B，YANG X，TENG X Y. A Diversity Reserved Quantum Particle Swarm Optimization Algorithm for MMKP[C]// IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science (ICIS). 2016：1-7.

[17] LI X J，XU J，ZHU E Z. A Novel Computation Method for Adaptive Inertia Weight of Task Scheduling Algorithm [J]. Journal of Computer Research and Development，2016，53(9)：1990-1999. (in Chinese)
李学俊，徐佳，朱二周. 任务调度算法中新的自适应惯性权重计算法[J]. 计算机研究与发展，2016，53(9)：1990-1999.