

# 一种基于 ST-RFT 算法的数字调制信号识别方法

刘 丹 马秀荣 单云龙

(天津理工大学计算机与通信工程学院 天津 300384)

**摘 要** 将短时拉曼努金傅里叶变换(ST-RFT)应用于数字调制信号识别的研究中,以寻求提高低 SNR 条件下数字调制信号识别率的新方法。通过归一化 ST-RFT 谱图计算、特征参量提取以及阈值判别来实现调制信号的识别。针对 5 种常见的数字调制信号进行仿真分析,结果表明,在 SNR=0 dB 的信噪比条件下,基于 ST-RFT 算法的数字调制信号识别方法的平均识别率可以达到 90%,比基于谱图时频分析法的识别率提高了 10.4%;特别是相比于基于瞬时幅度和瞬时频率的特征方法,4FSK 调制信号的识别率可提高 9%。基于 ST-RFT 算法的数字调制信号识别方法能够在低 SNR 条件下有效识别数字调制信号,具有良好的工作性能。

**关键词** 数字调制信号识别,短时拉曼努金傅里叶变换,特征参数,识别率

**中图分类号** TN391.4 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.05.011

## Digital Modulation Signal Recognition Method Based on ST-RFT Algorithm

LIU Dan MA Xiu-rong SHAN Yun-long

(School of Computer and Communication Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China)

**Abstract** In this paper, the short-time Ramanujan Fourier transform(ST-RFT) algorithm was applied in the research of modulation signal recognition to obtain a new method which can improve the correct recognition rate in low signal-to-noise ratio(SNR) environment. The modulation signals recognition was achieved by normalized ST-RFT spectrogram calculation, characteristic parameters extraction and threshold decision. The simulation results show that when SNR is 0 dB, the average correct recognition rate of the method based on ST-RFT algorithm can reach 90%, which is increased by 10.4% compared with that based on spectrogram time-frequency analysis algorithm. Especially, the correct recognition rate of the proposed method for 4FSK signal can increased by 9% compared with that of the method based on instantaneous amplitude and instantaneous frequency features. The effectiveness and reliability of the proposed method in low SNR are proved by simulation results.

**Keywords** Digital modulation signal recognition, Short-time Ramanujan Fourier transform, Characteristic parameters, Recognition rate

## 1 引言

数字调制信号的识别是指在未知接收信号信息的前提下,确定数字信号的调制方式,从而为信号解调提供必要的信息。在信号类型日趋复杂多样、信号分布日趋密集的背景下,调制信号的识别无论是在军事方面还是民用方面,都起着举足轻重的作用<sup>[1-2]</sup>。在军事方面,调制信号的识别可被应用于电子侦查、通信干扰和电子对抗等领域<sup>[3-4]</sup>;在民用方面,其可被应用于干扰识别、信号证实和频率管理等领域<sup>[5]</sup>。

目前,国内外对数字调制方式识别方法的研究主要包含最大似然法和特征提取法<sup>[6]</sup>。基于特征提取的调制识别方法由于计算简单且易于实现,成为了目前调制识别领域的主流研究方法<sup>[7-12]</sup>。文献[9]基于瞬时幅度和瞬时频率两个特征

对 4FSK, QPSK 和 QAM 信号进行识别仿真,仿真结果证实,该方法在 SNR $\geq 2$  dB 时能够实现稳定识别。文献[12]利用谱图时频分析法对 ASK, FSK 和 PSK 信号进行识别,仿真结果证实,该技术在 SNR $\geq 2$  dB 时,信号的平均正确识别率可达 90%。

总结相关研究工作发现,目前已有的调制识别方法一般在接近零的低信噪比条件下识别性能较差,实际应用受限。因而,在低信噪比条件下仍能实现稳健识别的方法备受国际学术界的关注。

Sugavaneswaran 等<sup>[13]</sup>于 2012 年首次把拉曼努金傅里叶变换(Ramamujan Fourier Transform, RFT)引入到时频分析中。研究发现,相比于基于离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform, DFT)的时频变换,基于 RFT 的时频变换具有较

到稿日期:2017-02-10 返修日期:2017-04-28 本文受天津市科学技术委员会项目:天津市应用基础与前沿技术研究计划项目(15JCQNJC01100)资助。

刘 丹(1992—),女,硕士生,主要研究领域为信号处理、信号识别;马秀荣(1961—),女,教授,博士生导师,主要研究领域为信号处理、光纤通信、移动通信,E-mail:lunwentoudi@163.com(通信作者);单云龙(1986—),男,博士生,主要研究领域为信号处理、信号识别。

高的抗噪声性能和计算效率。RFT 法在信号分析方面的相关研究引起了广泛关注<sup>[14-16]</sup>,然而加入窗函数的相关工作尚待深入探究。短时 RFT (Short-Time Ramanujan Fourier Transform, ST-RFT)作为一种以 RFT 为基函数的时频变换,在 RFT 的基础上考虑了滑动窗函数,可以建立时间和频率的定位功能,分析频率随时间的变化特性,因此相关研究值得重视。

本文尝试将 ST-RFT 引入到数字调制信号识别领域,应用计算机仿真技术探究基于 ST-RFT 的数字调制识别的可行性,为提高低信噪比条件下调制信号的识别率探索有效的方法。

## 2 归一化 ST-RFT 谱图的获取

### 2.1 RFT 与 ST-RFT

拉曼努金和 (Ramanujan Sums, RS) 被定义为单位圆上  $q$  阶本原根  $n$  次幂的和,表达式如下<sup>[17]</sup>:

$$c_q(n) = \sum_{p=1, (p,q)=1}^q \exp(2j\pi \frac{p}{q}n) \quad (1)$$

其中,  $(p, q) = 1$  表示  $p$  和  $q$  互质。

相比于 DFT, RS 不仅反映了单位复根  $\exp(2j\pi \frac{p}{q})$  (其中  $p=1, \dots, q$ ) 上的频谱特征,而且也反映了与其互质的所有频点上的特征。

将 RS 作为变换基, RFT 的表达式如下<sup>[18]</sup>:

$$s_q = \frac{1}{\phi(q)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n)c_q(n) \quad (2)$$

其中,  $\phi(q)$  为欧拉函数。

ST-RFT 为加窗的 RFT, 表达式如下:

$$ST-RFT_s(k, q) = \frac{1}{\phi(q)} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n)\varphi^*(n-k)c_q(n) \quad (3)$$

其中,  $\varphi(k)$  为窗函数, 令  $\varphi(0) = 1$ 。

将 ST-RFT 谱定义为 ST-RFT 绝对值的平方, 其表达式如下:

$$S_s(k, q) = |ST-RFT_s(k, q)|^2 \quad (4)$$

### 2.2 数字调制信号归一化 ST-RFT 谱图

选取常用的 CW, 2ASK, BPSK, 2FSK 和 4FSK 这 5 种信号作为数字调制信号。对 2ASK, CW 和 BPSK 信号用  $\max(S_s(k, q)|_{q=T_1})$  进行归一化, 而对 2FSK 和 4FSK 信号用  $\max(\max(S_s(k, q_i)|_{q_i=T_i}))$  (其中  $T_i = \frac{f_s}{f_{c_i}}$  表示周期  $T_{c_i} = \frac{1}{f_{c_i}}$  内的采样点数,  $f_s$  表示采样频率,  $f_{c_i}$  表示第  $i$  个载波频率) 进行归一化, 从而得到调制信号的  $S_s(k, q)$  幅度归一化 ST-RFT 谱图  $P_s(k, q)$ , 如图 1 所示。图 1 中, 横坐标  $q$  表示频率, 纵坐标  $k$  表示时间。

窗长和窗形状将直接影响调制信号的 ST-RFT 时频分布, 从而影响归一化 ST-RFT 时频分布图所反映出的信号的调制信息, 进而影响后续提取的特征参量的分布范围, 最终影响识别效果。因此, 必须确定窗长和窗形状。通过对比实验发现, 在长度为  $N/7$  ( $N$  表示信号长度) 的高斯窗下, 调制信号  $P_s(k, q)$  谱图的形状差异较为明显, 即显示信号的调制特

征较为突出, 有利于信号的有效识别。因此, 本文选定长度为  $N/7$  的高斯窗。

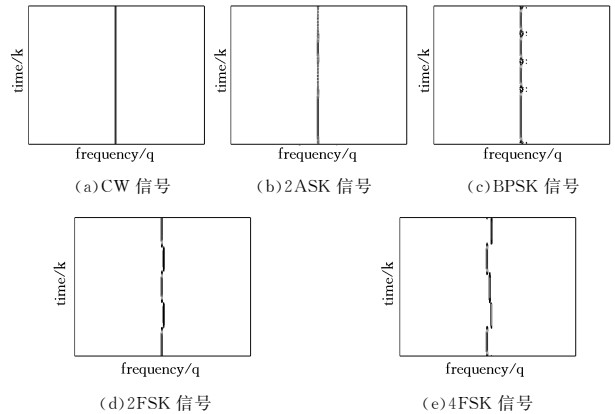


图 1 数字调制信号在无噪声条件下的  $P_s(k, q)$  图

Fig. 1  $P_s(k, q)$  spectrograms of digital modulation signals without noise

## 3 基于归一化 ST-RFT 谱图的特征参量提取

合理提取特征是准确识别信号调制类型的关键。本文拟提取的是归一化 ST-RFT 谱中幅值最大谱线自相关函数的平均过零点数目  $MC_z$  以及归一化 ST-RFT 谱脊线直方图相对幅值的均值  $C_M$  这两大特征。最终, 利用不同调制信号的这两个特征分布的差异实现信号的识别。

### 3.1 归一化 ST-RFT 谱中幅值最大谱线自相关函数的平均过零点数目的提取

定义  $f_s(k)$  表示  $P_s(k, q)$  中幅值的最大谱线。对于 CW, 2ASK 和 BPSK 调制信号:

$$f_{CW/2ASK/BPSK}(k) = (P_{CW/2ASK/BPSK}(k, T_1)) \quad (5)$$

而对于 2FSK 和 4FSK 调制信号:

$$f_{2FSK/4FSK}(k) = (P_{2FSK/4FSK}(k, T_i)) \quad (6)$$

定义  $R_{f_s}(\tau)$  表示  $f_s(k)$  的自相关函数, 其表达式如下:

$$R_{f_s}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_s(k) - \bar{f}_s)(f_s(k+\tau) - \bar{f}_s) \quad (7)$$

其中,  $\tau$  为移位或滞后参数;  $\bar{f}_s$  表示  $f_s(k)$  的均值。

5 种数字调制信号在无噪声条件下的  $R_{f_s}(\tau)$  曲线如图 2 所示。

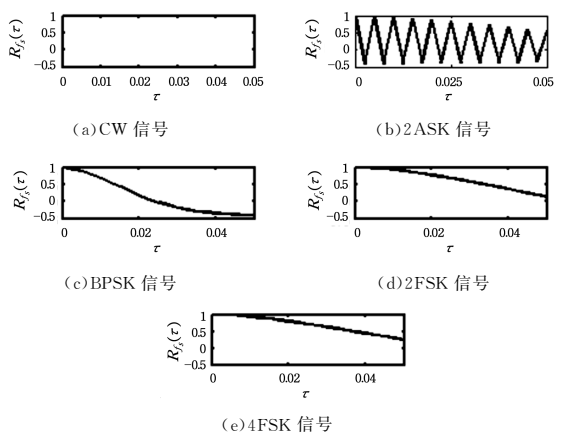


图 2 数字调制信号在无噪声条件下的  $R_{f_s}(\tau)$  图

Fig. 2  $R_{f_s}(\tau)$  graphs of digital modulation signals without noise

图2显示了无噪声条件下5种数字调制信号的 $R_{f_s}(\tau)$ 在 $\tau=0\sim 0.05$ 之间的变化特征; $R_{f_{CW}}(\tau)$ 呈现“NaN”的形式; $R_{f_{2ASK}}(\tau)$ 呈现锯齿波动变化; $R_{f_{BPSK}}(\tau)$ , $R_{f_{2FSK}}(\tau)$ 和 $R_{f_{4FSK}}(\tau)$ 均单调下降,其中 $R_{f_{2FSK}}(\tau)$ 下降梯度最大,而 $R_{f_{4FSK}}(\tau)$ 下降梯度次之, $R_{f_{BPSK}}(\tau)$ 下降梯度最小,且 $R_{f_s}(\tau)$ 均大于零。

将过零点定义为 $R_{f_s}(\tau)=0$ 的点。用 $C_Z$ 表示过零点的数目。分析图2的曲线,可得调制信号的 $C_Z$ ,如表1所列。

表1 无噪声条件下数字调制信号的 $C_Z$ 值

Table 1  $C_Z$  values of digital modulation signals without noise

Type	2ASK	CW	BPSK	2FSK	4FSK
$C_Z$	20	NaN	1	0	0

由表1可知, $\tau$ 在 $0\sim 0.05$ 范围内,对于CW信号, $C_Z$ 为“NaN”;对于2ASK信号, $C_Z$ 值为20;对于BPSK信号, $C_Z$ 值为1;而对于2FSK信号和4FSK信号,它们的 $C_Z$ 值均为0。由此可知,在无噪声条件下,对应CW,2ASK和BPSK调制信号的 $C_Z$ 值与两种FSK调制信号的 $C_Z$ 值之间有明显的差异。因此,可将 $C_Z$ 作为无噪声条件下的信号识别的特征参量。但是在噪声存在的条件下, $R_{f_s}(\tau)$ 会受到噪声的影响而呈现很大的波动,尤其对于2ASK信号来说,由于噪声序列的自相关性, $R_{f_{2ASK}}(\tau)$ 也将会在 $0\sim 0.05$ 之间呈现波动。因此,本文尝试将 $-5\sim 5$  dB噪声条件下的 $R_{f_s}(\tau)$ 的平均过零点数目 $MC_Z$ 作为识别特征参量。

通过蒙特卡洛实验得出5种数字调制信号在 $-5\sim 5$  dB噪声条件下的 $MC_Z$ 特征量曲线,如图3所示。

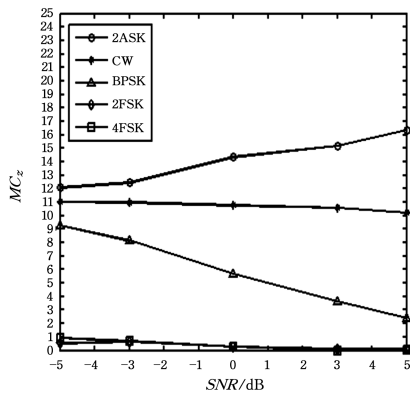


图3 数字调制信号的 $MC_Z$ 特征随SNR变化的曲线图

Fig. 3 Relationship curves between SNR and  $MC_Z$  of digital modulation signals

图3为重复1000次实验得到的调制信号的 $MC_Z$ 曲线图。由该图可以看出,对应2ASK信号的 $MC_Z$ 曲线的变化方向与其他调制信号的曲线相反,即随着信噪比的增加而增大,并在 $-5$  dB处存在最小值11.8。因此,确定阈值 $b_1(MC_Z)=11.8$ 作为区分2ASK与其余调制信号的特征值。

图3明显显示,对应两种FSK信号的 $MC_Z$ 曲线处于其他调制信号曲线之下,且在 $-5$  dB处存在最大值1.2。因此,本文确定阈值 $b_2(MC_Z)=1.2$ 作为将FSK信号与其余调制信号区分的特征值。

注意到,对应CW与BPSK调制信号的 $MC_Z$ 曲线,不仅两者之间区分明显,而且它们与其他调制信号的 $MC_Z$ 曲线之间也明显分开。BPSK调制信号曲线在 $-5$  dB处存在最小值

9.5。据此,设定阈值 $b_3(MC_Z)=9.5$ 作为识别CW与BPSK及其他调制信号的特征值。

通过上述分析可知,在噪声存在的条件下,利用基于ST-RFT算法的方法提取的各数字调制信号的 $MC_Z$ 值之间存在明显差异。因此,利用特征参量 $MC_Z$ 能够在低信噪比条件下的CW,2ASK,BPSK以及FSK信号的识别。

### 3.2 归一化ST-RFT谱脊线直方图相对幅值的均值的提取

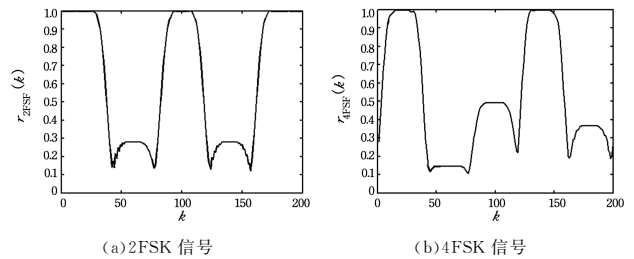
由以上分析可以看出, $MC_Z$ 特征无法实现FSK信号之间的识别。鉴于归一化ST-RFT谱脊线包含FSK信号特性的重要信息,本文作如下分析。

定义 $r_{s_j}(k)$ 为FSK信号归一化ST-RFT谱脊线,其表达式如下:

$$r_{s_j}(k) = \arg \max_q [P_{s_j}(k, q)], j=1, 2 \quad (8)$$

其中, $s_1=2FSK$ , $s_2=4FSK$ 。

两种FSK信号分别对应的 $r_{s_j}(k)$ 曲线如图4所示。



(a) 2FSK 信号

(b) 4FSK 信号

图4 两种FSK信号对应的 $r_{s_j}(k)$

Fig. 4  $r_{s_j}(k)$  of FSK modulation signals

由图4(a)可以看出,2FSK信号的 $r_{2FSK}(k)$ 含有两个局部极大值,分别为1和0.2776,表示该信号含有两个不同的载波频率。由图4(b)可以看出,4FSK信号的 $r_{4FSK}(k)$ 含有4个不同的局部极大值,分别为1,0.4911,0.3648和0.1445,表示其含有4个不同的载波频率。由此可知,在无噪声的条件下,基于ST-RFT谱图提取的FSK信号的 $r_{s_j}(k)$ 所包含的局部极大值个数存在明显差异,反映出FSK信号不同的频率特性。因此, $r_{s_j}(k)$ 曲线所包含的局部极大值的个数可以作为识别无噪声条件下的2FSK信号和4FSK信号的特征参量。

值得注意的是,由于噪声的影响, $r_{s_j}(k)$ 所包含的局部极大值的个数会发生变化,从而反映不出正确的FSK信号频率特性。因此,本文尝试以FSK信号的归一化ST-RFT谱脊线直方图相对幅值的均值 $C_M$ 作为识别低信噪比条件(同上采用 $-5$  dB~ $5$  dB噪声条件)下FSK信号的特征参量。

获取对应FSK信号的 $C_M$ 的步骤如下:首先,寻找 $r_{s_j}(k)$ 的最大值和最小值,确定 $r_{s_j}(k)$ 的区间范围 $[\min r_{s_j}, \max r_{s_j}]$ ;在 $[\min r_{s_j}, \max r_{s_j}]$ 内以 $\Delta r = (\max r_{s_j} - \min r_{s_j}) / M_r$ (本文选取 $M_r=100$ )为元素个数绘制 $r_{s_j}(k)$ 直方图 $Dr_{s_j}(k)$ ;采用公式

$$\text{norm}Dr_{s_j}(k) = \frac{Dr_{s_j}(k)}{\max(Dr_{s_j}(k))} \quad (9)$$

对 $Dr_{s_j}(k)$ 进行归一化,得到 $\text{norm}Dr_{s_j}(k)$ ;求 $\text{norm}Dr_{s_j}(k)$ 的均值 $\text{Mean}(\text{norm}Dr_{s_j}(k))$ ,从而得到FSK信号的 $C_M$ 。

通过蒙特卡洛实验得到的对应2FSK信号和4FSK信号的 $C_M$ 曲线如图5所示。

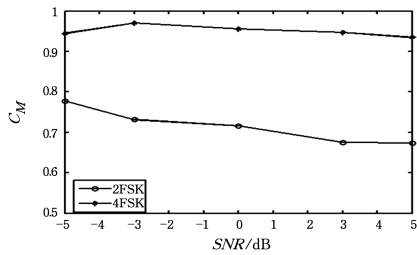


图 5 FSK 信号的  $C_M$  随 SNR 变化的分布图

Fig. 5 Relationship curves between SNR and  $C_M$  of FSK modulation signals

图 5 给出的是重复 1000 次实验而获得的 FSK 调制信号的  $C_M$  随 SNR 变化的曲线。由该图可以看出,对应两种 FSK 信号的  $C_M$  曲线均大体随 SNR 的增大而下降,且两者明显分开;同时,对应 4FSK 调制信号的  $C_M$  曲线在 -5 dB 处存在最大值 0.85。由此,确定阈值  $b_4(C_M)=0.85$  为识别 4FSK 调制信号与 2FSK 调制信号的特征值。

通过以上对图 5 的分析可知,在噪声存在的条件下,利用 ST-RFT 算法获得的对应两种 FSK 调制信号的  $C_M$  值存在明显不同。因此,可以将  $C_M$  作为低信噪比条件下有效区分 2FSK 和 4FSK 信号的特征参量。

综上所述,结合  $MC_Z$  与  $C_M$  两个特征,可以实现低信噪比下 5 种数字调制信号的有效识别。

## 4 调制方式的识别

### 4.1 调制方式识别的流程

基于 ST-RFT 的数字调制信号识别的流程如图 6 所示。

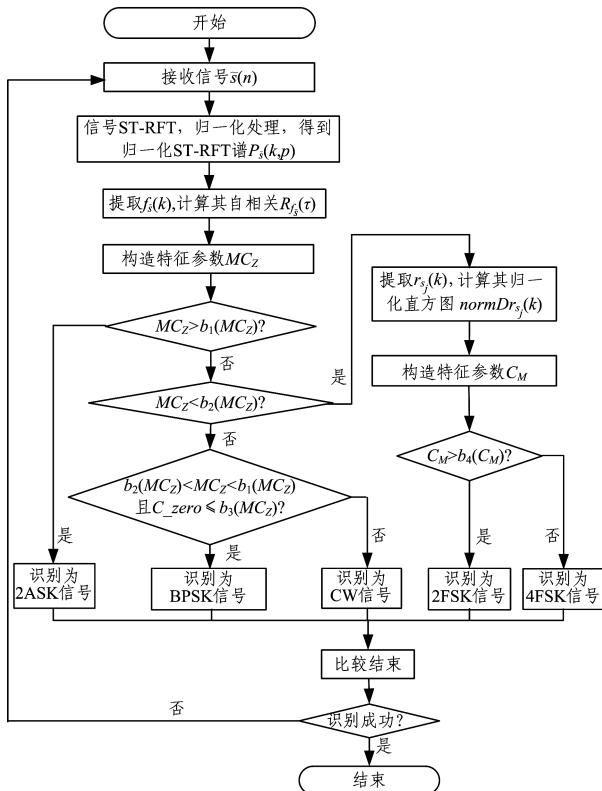


图 6 调制方式识别的流程

Fig. 6 Recognition process of modulation system

首先,对叠加高斯白噪声的接收信号  $\tilde{s}(n)$  进行 ST-RFT, 得到接收信号 ST-RFT 谱,对其进行归一化,得到接收信号的归一化 ST-RFT 谱;

然后,从归一化 ST-RFT 谱中提取幅值最大的谱线  $f_{\tilde{s}}(k)$ ,并计算自相关函数  $R_{f_{\tilde{s}}}(\tau)$ ,构造特征参数  $MC_Z$ ,根据阈值  $b_1(MC_Z), b_2(MC_Z)$  以及  $b_3(MC_Z)$  对调制方式进行分类识别;

接着,根据 FSK 信号的归一化 ST-RFT 谱脊线  $r_{\tilde{s}}(k)$  计算归一化直方图  $normDr_{\tilde{s}}(k)$  并构造特征参数  $C_M$ ,根据阈值  $b_4(C_M)$  对调制方式进行分类识别;

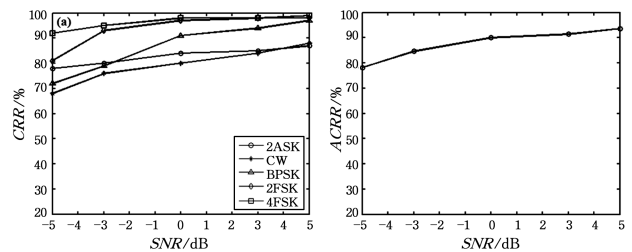
最后,输出调制识别的结果,流程结束。

### 4.2 调制方式识别中仿真参数的设定

为验证基于 ST-RFT 的数字调制信号识别方法在低信噪比下的有效性,采用 MATLAB 平台进行仿真,5 种调制信号参数如下:脉宽为  $1 \mu s$ ,载波频率为 100 MHz,采样频率为 400 MHz,信号采样点数为 200。2ASK, BPSK, 2FSK, 4FSK 信号所采取的编码方式如下:2ASK 采用  $[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$  的编码方式;BPSK 采用 5 位固定编码方式,即  $[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$ ;2FSK 采用 5 位固定编码方式,即  $[1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$ ;4FSK 采用 5 位阶梯式编码方式,即  $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0]$ 。仿真选用长度为  $200/7$  的高斯窗。

## 5 仿真结果及分析

为验证本文识别方法的有效性和准确性,在 SNR 取值为  $-5 \sim 5$  dB、处理点数为 200 的条件下,重复进行 1000 次蒙特卡罗实验。调制识别的结果如图 7 所示。



(a) 5 种数字调制信号的正确识别率 (b) 数字调制信号的平均正确识别率

图 7 正确识别率随 SNR 变化的曲线图

Fig. 7 Curves of correct recognition rate with changing SNR

图 7(a) 显示了 5 种数字调制信号的正确识别率随 SNR 变化的曲线。可以看出,5 种数字调制信号的正确识别率均随 SNR 的增加而提高,特别在  $SNR=0$  dB 的条件下,5 种数字调制信号的正确识别率分别达到 84%, 80%, 91%, 97% 和 98%。相比于其他信号,FSK 信号的识别效果最优。CW 信号的正确识别率虽然稍低,但是结果依旧达到 80%。

图 7(b) 显示了 5 种数字调制信号的平均正确识别率随 SNR 变化的曲线。可以看出,5 种数字调制信号的平均正确识别率曲线均随着 SNR 的增大而升高,且在 0 dB 的低信噪比下,平均正确识别率均达到 90%。根据文献[12]的分析,基于谱图时频分析的方法在 0 dB 条件下的正确识别率为 79.6%。与此相比,基于 ST-RFT 算法的识别方法的正确识别率提高了 10.4%,表明了该方法的有效性和准确性。

针对 4FSK 调制信号,图 8 给出在处理点数为 200 以及重复 1000 次蒙特卡罗实验的条件下,应用基于 ST-RFT 的方

法与文献[9]的基于瞬时幅度和瞬时频率特征的方法的实验结果对比。特别注意到,虽然在使用两种调制方式识别方法下的识别率均随着 SNR 的增加而增加,但在 SNR=0 dB 条件下,后者仅达到 89%,而本文所提的基于 ST-RFT 算法的方法的识别提高了 9%,达到了 98%,优势明显。

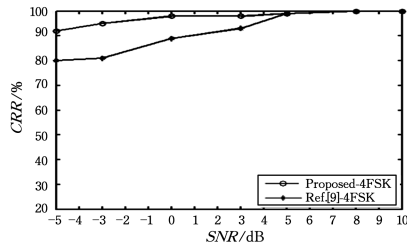


图8 在使用两种调制方式识别方法时 4FSK 调制信号的正确识别率  
Fig. 8 Curves of correct recognition rate of 4FSK modulation signals for different algorithms

**结束语** 本文首先通过对 CW, 2ASK, BPSK, 2FSK 和 4FSK 这 5 种常用的数字调制信号进行 ST-RFT 归一化, 得到归一化 ST-RFT 谱; 接着从中提取幅值最大谱线相关函数的平均过零点数目 ( $MC_z$ ) 和直方图相对幅值的均值 ( $C_M$ ) 这两个特征参量; 最后利用阈值判决法实现调制信号的识别。实验发现, 在噪声存在的条件下, 提取的调制信号的  $MC_z$  值之间存在明显不同, 可以用来识别 CW, 2ASK, BPSK 以及 FSK 信号; 而  $C_M$  值可以用来识别 2FSK 和 4FSK 信号。与此同时, 在 SNR=0 dB 的条件下, 相比于基于谱图时频的分析法, 基于 ST-RFT 算法的方法对调制信号的正确识别率提高了 10.4%; 特别是相比于基于瞬时幅度和瞬时频率的特征方法, 4FSK 调制信号的识别率可提高 9%。实验结果表明, 应用基于 ST-RFT 算法的方法能够在低信噪比条件下有效识别调制信号。

### 参考文献

- [1] LIU M S, LI B B, ZHAO L. Feature Optimization for Digital Modulation Signals Recognition[J]. Computer Science, 2011, 38(11):79-82. (in Chinese)  
刘明寿, 李兵兵, 赵雷. 数字调制信号识别的特征参数优化方法[J]. 计算机科学, 2011, 38(11):79-82.
- [2] GRIMALDI D, RAPUANO S, VITO L D. An Automatic Digital Modulation Classifier for Measurement on Telecommunication Networks[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(5):1711-1720.
- [3] LIU X W, JIANG L, XU H, et al. Ultra-wideband Signal Detection Method Based on Hilbert-Huang and Wavelet Packet[J]. Computer Science, 2016, 43(6):102-105. (in Chinese)  
刘潇文, 蒋磊, 许华, 等. 基于希尔伯特-黄和小波包的 UWB 信号检测方法[J]. 计算机科学, 2016, 43(6):102-105.
- [4] ZHANG Y S, LI S X. Natural Sciences[J]. Natural Science Journal of Harbin Normal University, 2011, 27(6):50-52. (in Chinese)  
张玉山, 李双喜. 数字通信信号的调制与识别[J]. 哈尔滨师范大学(自然科学学报), 2011, 27(6):50-52.
- [5] LI N, GAO X J, TIAN R L. Research on Improving the Identification Algorithm of Digital Communication Signals[J]. Journal of Jilin University(Information Science Edition), 2010, 28(3):250-255. (in Chinese)  
李娜, 高宪军, 田润澜. 数字通信信号调制方式识别算法的改进研究[J]. 吉林大学学报(信息科学版), 2010, 28(3):250-255.
- [6] DOBRE O A, ABDI A, BAR-NESS Y, et al. Survey of automatic modulation classification techniques; classical approaches and new trends[J]. Communications Lett, 2007, 1(2):137-156.
- [7] XU Z, HU S A, WU Q, et al. A modulation Classification Algorithm Based on Differential Constellation Shape[J]. Computer Simulation, 2009, 26(11):182-185. (in Chinese)  
徐哲, 胡世安, 吴钦, 等. 一种基于差分星座图的调制体制识别算法[J]. 计算机仿真, 2009, 26(11):182-185.
- [8] HSUE S Z, SOLIMAN S S. Automatic modulation classification using zero crossing[J]. Radar & Signal Processing IEEE Proceedings F, 1990, 137(6):459-464.
- [9] LIANG W X, FENG Y X, QIAN B. An Optimization Recognition Algorithm of Amplitude-Frequency Modulation Signals[J]. Computer Simulation, 2016, 33(8):415-420. (in Chinese)  
梁伟鑫, 冯永新, 钱博. 幅频调制信号优化识别算法研究[J]. 计算机仿真, 2016, 33(8):415-420.
- [10] SCHREYOGG C, KITTEL K, KRESSEL U, et al. Robust classification of modulation types using spectral features applied to HMM[C]//MILCOM 97 Proceedings. 1997:1377-1381.
- [11] HO K C, PROKOPIW W, CHAN Y T. Modulation identification by the wavelet transform[C]//MILCOM 95 Proceedings. 1995:886-890.
- [12] LYNN T J, SHA'AMERR A Z. Automatic analysis and classification of digital modulation signals using spectrogram time frequency analysis[C]//Proceedings of International Symposium on Communications & Information Technologies. 2007:916-920.
- [13] SUGAVANESWARAN L, XIE S, UMAPATHY K, et al. Time-Frequency Analysis via Ramanujan Sums[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(6):352-355.
- [14] MAINARDI L T, PATTINI L, CERUTTI S. Application of the Ramanujan Fourier transform for the analysis of secondary structure content in amino acid sequences[J]. Methods of Information in Medicine, 2007, 46(2):126-129.
- [15] CHEN G, KRISHNAN S, BUI T D. Ramanujan sums for image pattern analysis[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2014, 12(1):109-112.
- [16] SAMADI S, AHMAD M O, SWAMY M N S. Ramanujan sums and discrete Fourier transforms[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(4):293-296.
- [17] RAMANUJAN S. On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers [J]. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1918, 22(13):259-276.
- [18] CARMICHAEL R D. Expansions of arithmetical functions in infinite series[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1930, 34(13):1-26.