

# CT 图像重建滤波反投影算法中指数滤波器的研究

骆岩红

(西北民族大学电气工程学院 兰州 730030) (兰州大学核科学与技术学院 兰州 730000)

**摘 要** CT技术的核心是图像重建,而图像重建的决定因素是重建算法,其优劣直接影响对重建结果准确性的判断。CT图像重建算法可以分为迭代法和解析法两大类,其中解析法具有比较严密的数学理论基础,且处理速度快,所以在CT技术领域得到广泛应用。在解析重建算法中,滤波反投影算法拥有较高的运算效率,能获得较好的图像重建质量,而且滤波反投影算法的成本低,易于通过并行实现,便于进一步提高其重建速度,所以该算法为解析法中的主流算法。根据滤波反投影算法的实现原理,其中滤波函数的选取对重建结果、重建速度等方面有着举足轻重的作用。针对滤波函数的选择进行研究,首先在分析常用R-L和S-L滤波函数的基础上,引入指数滤波函数的研究,并借助调整指数参数的取值,分析了该函数在无噪声和有噪声情况下对图像重建的影响。通过实验仿真的方法,验证了指数滤波函数在保证较好的空间分辨率的情况下,保持了良好的图像重建特性。

**关键词** CT图像重建,滤波反投影算法,滤波函数

中图法分类号 TP391 文献标识码 A

## Study on Exponential Filter of Filter Back Projection Algorithm for CT Image Reconstruction

LUO Yan-hong

(College of Electrical Engineering, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030, China)

(The School of Nuclear Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract** Computed Tomography(CT) image reconstruction playing the core role in CT technique, the performance of reconstruction algorithm is of vital importance to the judgement of accuracy of monitor results. The image of the object is reconstructed from projection data by using algebraic or analytic algorithms. Analytical algorithms are deduced based on rigorous mathematic theories, and have the advantages of fast processing speed. So the analytical algorithms are used widely on CT detection equipment. In the analytic reconstruction algorithms, filter back projection algorithm is the mainstream. The main reason is the filter back projection algorithm has higher operation efficiency, and better reconstructed image quality. It is low cost, easy to realize parallel processing, so it is used in many industrial CT machine. In the process of analytical algorithms, the selection of the filter function playing a decisive role in reconstruction result and efficiency. This paper firstly introduced R-L and S-L filter function, and analyzed their natures. Secondly, it put forward exponential filter function, and analyzed the influence of exponential function in the absence of noise and noise conditions on image reconstruction by adjusting index value of parameter. Lastly, proved by experimental simulation that the exponential filter function can obtain not only better spatial resolution, but also better image properties.

**Keywords** CT image reconstruction, Filter back projection algorithm, Filter function

### 1 引言

计算机断层成像(Computed Tomography, 简称CT)图像重建,是按照一定的算法将检测到的投影数据进行数学运算处理,从而获得断层图像的过程。奥地利数学家Radon系统论证了由积分值(即投影)确定被积函数(即重建图像)的整套理论方法,为CT技术的形成和发展提供了可靠的理论依据<sup>[1]</sup>。作为一种逆问题求解的方法,研究从投影重建图像的理论有普遍的适用性。

CT图像重建的核心技术是算法,其中解析法是利用解析公式进行计算来完成图像重建的方法。解析法中最常用的

是滤波反投影(Filter Back Projection, FBP)算法。该算法与其他算法相比,有较高的运算效率,而且重建图像质量较好,并能够采用硬件实现并行处理,所以它是图像重建中应用较为广泛的一种算法。

根据CT成像的原理,断层平面中某一点的密度值是这一平面内所有经过该点射线投影和的平均值。由此在反投影重建思想中,整幅重建图像就可以看作所有方向下的投影累加而成。但是采用反投影算法重建出的图像,会表现出明显的“星”状伪影。产生这种状况的主要原因是反投影的本质是把取自优先物体空间的投影均匀地回抹(反投影)到射线所及的无限空间的各个点上,包括原来为零的点。为了消除“星”

本文受中央高校项目(319201300160)资助。

骆岩红(1973-),女,博士生,主要研究方向为CT图像处理技术,E-mail:luoyh-H@163.com。

状伪影,在重建算法中需要引入一种特殊的函数——滤波函数。

在FBP算法中,常见的滤波函数有R-L滤波函数<sup>[2]</sup>和S-L滤波函数<sup>[3]</sup>。R-L滤波函数采用矩形窗,该滤波函数实现简单、计算方便,用它完成的重建图像,具有较清晰的轮廓,而且空间分辨率高,但是却伴随着严重的Gibbs现象。S-L滤波函数采用sinc函数来抑制投影中的高频成分,很好地抑制了Gibbs现象,对于含有噪声的投影数据,它的重建图像质量比R-L滤波函数的好。

FBP算法中,滤波器一直以来都是研究的热点,很多学者在这方面做了工作。例如范慧荣提出一种新的窗函数<sup>[4]</sup>,利用该滤波函数完成的重建图像保证了较好的空间分辨率,同时也克服了Gibbs现象。张斌、翟静提出一种R-L、S-L混合的滤波函数,他们通过乘以不同的权系数对滤波函数进行折中处理<sup>[5,6]</sup>,从而获得质量较好的重建图像。刘晓等利用多点平均法对R-L滤波函数进行改进<sup>[7]</sup>,用其完成的图像,质量有所改善。

本文引入指数窗函数,通过指数参数的调整完成图像滤波。经实验验证,得到了较好的图像重建效果。

## 2 滤波反投影算法实现思想

反投影重建算法因为引入“星”状伪影而导致重建的图像失真。为了消除其伪影,根据投影定理,可以在反投影重建之前进行数据的修正(即滤波),最后对修正后的投影数据进行反投影,这样就可获得没有伪影的重建图像,我们把这种算法称为滤波反投影算法。

滤波反投影算法实现的具体步骤:

1) 对某角度下的投影数据  $p_\theta(t)$  作一维傅立叶变换,记作  $S_\theta(\omega)$ ;

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(t) e^{-j2\pi\omega t} dt \quad (1)$$

2) 对  $S_\theta(\omega)$  乘以一维权重因子  $|\rho|$ ;

3) 对第2)步结果作一维傅立叶反变换,记作  $Q_\theta(t)$ ;

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega) H(\omega) e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (2)$$

4) 将  $0^\circ \sim 180^\circ$  的所有修正过的投影函数  $Q_\theta(t)$  作直接反投影计算,得到断层图像  $f(x, y)$ 。

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(t) d\theta = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos\theta + y \sin\theta) d\theta \quad (3)$$

## 3 滤波器的设计原则

滤波反投影算法从理论上解决了由投影重建图像的问题,但在该算法实现的过程中滤波的选择起到关键性作用,滤波设计的好坏会直接影响重建图像的质量。

在滤波反投影重建算法的实现中,理论上要求滤波器的系统函数  $H_R(\rho) = |\rho|$ ,但因为滤波函数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(\rho)|^2 ds = \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho|^2 ds \rightarrow \infty \quad (4)$$

是一个频带无限宽的函数,按照佩利-维纳准则,这个理想的滤波器实际中是很难实现的。但是在实际应用中,考虑到窄小的探测器单元,它的作用在一定程度上相当于降低了投影频谱中的高频能量,而且也降低了混叠效应。在实际中,投影

是由有限分辨率的设备所观察到的密度分布,投影的频谱能量主要集中在低频区域,超出某个截止频率的可以忽略不计,所以滤波函数可选取:

$$H(\rho) = |\rho| W(\rho) \quad (5)$$

滤波函数的实现,其实质就是对窗函数  $W(\rho)$  的选取。为了选择得到较好的重建图像分辨率,要求窗函数的选择应该遵守一定的原则:

- 1) 主瓣宽度窄,以获得较陡的过渡带;
- 2) 最大旁瓣相对主瓣尽可能小,以改善通常的平稳度和增大阻带的衰减。

但一般有高而窄的中央突出的窗函数,它的旁瓣也很突出。所以,实际中不能一味地要求分辨率高,否则会引起严重的Gibbs现象。另外,窗函数的选择还取决于实际构件内部和重建目标。

近年来,不少学者提出许多滤波函数,并对一些滤波函数做了分析和改进。最典型的滤波函数为R-L滤波函数、S-L滤波函数等。

### 3.1 常用滤波器

#### 3.1.1 R-L滤波器

印度学者 Ramachandran 和 Lakshmi Inarayana 提出了一种滤波器,该滤波函数为:

$$H_{R-L}(\rho) = |\rho| W(\rho) = |\rho| \text{rect}(\rho/2B) \quad (6)$$

其中:

$$\text{rect}(\rho/2B) = \begin{cases} 1, & |\rho| < B = \frac{1}{2d} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

与滤波函数  $H_{R-L}(\rho)$  相对应的卷积函数  $h_{R-L}(R)$  为:

$$h_{R-L}(R) = 2B^2 \text{sinc}(2RB) - B^2 \text{sinc}^2(RB) \quad (8)$$

其中  $B = 1/(2d)$ ,  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ 。

其离散表达式为:

$$h_{R-L}(nd) = \begin{cases} 1/(4d^2), & n=0 \\ 0, & n=\text{偶数} \\ -1/(n^2 \pi^2 d^2), & n=\text{奇数} \end{cases} \quad (9)$$

R-L滤波函数形式简单、实用,用它重建的图像轮廓清晰,但是有明显的Gibbs现象,表现为明显的震荡响应。另外,如果投影数据中含有噪音,重建质量就会较差,其原因在于当  $\rho = 1/(2d)$  时,  $H(\rho) = |\rho|$ ,理想的矩形窗是产生吉布斯现象的根源所在。

#### 3.1.2 S-L滤波器

为了缓解R-L滤波函数的振荡,Shepp和Logan提出了S-L滤波函数:

$$h_{S-L}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{4B}{\pi}\right)^2 \frac{1 - 4Bt \sin(\frac{\pi}{2} 4Bt)}{1 - (4Bt)^2} \quad (10)$$

其离散式为:

$$h_{S-L}(nd) = \frac{-2}{\pi^2 d^2 (4n^2 - 1)}, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11)$$

用S-L滤波函数重建图像,其震荡响应减小,对含有噪音的投影数据,它的重建质量也比R-L滤波函数的要好。但由于  $h_{S-L}(\rho)$  在低频段也偏离了  $|\rho|$  的缘故,因此低频段图像重

建的质量不及 R-L 滤波函数的重建质量高。

根据 R-L 滤波函数、S-L 滤波函数各自的优缺点,有人提出将两个滤波函数结合的一种新的滤波函数。除此之外,窗函数还有海宁滤波器、汉明窗滤波器、三角滤波器等。

### 3.2 图像评价指标

为了评价各个图像的质量,用以下两个图像评价判据来表示,其公式分别如下:

1) 归一化均方距离  $d$ , 即:

$$d = \left[ \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - \bar{t})^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

其中,  $t_{u,v}$ 、 $r_{u,v}$  分别表示物体模型和重建图像中第  $u$  行、 $v$  列的像素密度。 $\bar{t}$  为物体模型密度的平均值, 图像的像素为  $N \times N$ 。 $d=0$  表示重建后的图像能够真实地反映原物体模型图像。 $d$  值越大, 表示两者的误差越大。归一化均方距离  $d$  较敏感地反映了少数点出现较大误差的情况, 个别点出现较大的偏差会使  $d$  较大。

2) 归一化平均绝对距离  $r$ , 即:

$$r = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v}|} \quad (13)$$

$r=0$ , 说明没有误差,  $r$  越大, 说明误差越大。归一化平均绝对距离  $r$  则反映了许多点都存在一些小误差的情况。

根据上面的指标, 对提到的部分窗函数作比较, 如表 1 所示。

表 1 加窗滤波函数的误差比较

像素点数	误差	矩形窗	三角窗	S-L 窗	汉明窗
100×100	d	0.78	0.65	0.68	0.69
	r	0.95	0.67	0.69	0.69
200×200	d	0.68	0.56	0.58	0.59
	r	0.95	0.7	0.72	0.78
300×300	d	0.66	0.45	0.47	0.51
	r	1.01	0.56	0.58	0.51
400×400	d	0.66	0.47	0.49	0.71
	r	1.02	0.66	0.66	0.51

由表 1 可知, 加三角窗的重建误差要小于加 S-L 窗和汉明窗的重建误差。

## 4 指数滤波函数

### 4.1 指数窗函数性质分析

本文选取指数窗函数作为研究对象, 其表达式为:

$$W(\rho) = \begin{cases} e^{-a|\frac{\rho}{2B}|}, & |\rho| < B \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $a$  为参数, 当  $a$  取不同的值时, 可以得到不同的窗函数, 从而得到具有不同调节功能的滤波函数。从表达式可以获知, 当  $a$  取 0 时, 得到的是 R-L 滤波函数; 而当  $a$  取 0.64 时, 可以近似获得 S-L 滤波器。所以通过对指数窗函数的研究, 可以完成不同滤波函数的功能。

为了研究  $a$  取不同值时得到的滤波函数对图像重建质的影响, 图 1 对各滤波函数的特性进行比较和分析。

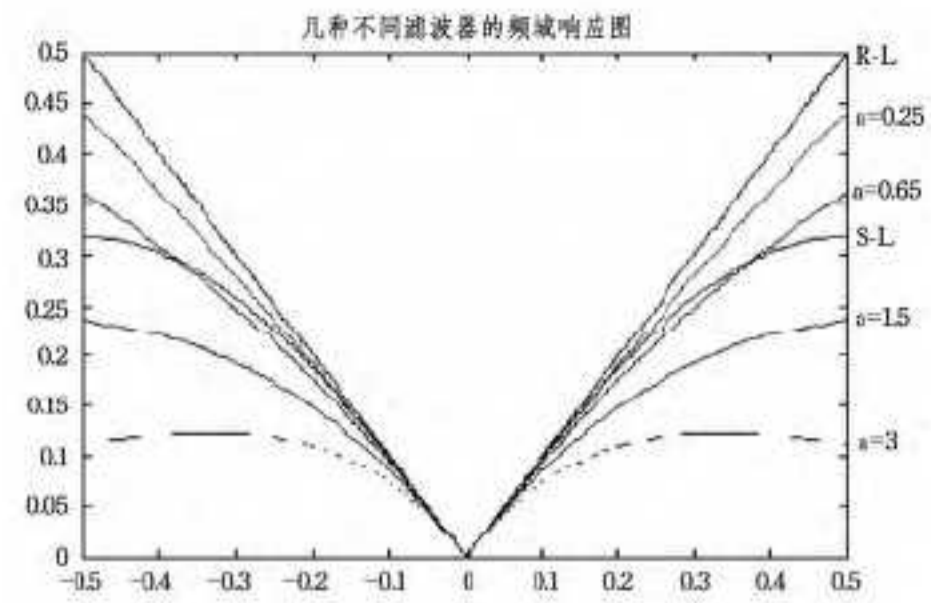


图 1 频率响应函数

各函数在时域中的主瓣和第一旁瓣的幅值和宽度如表 2 所列。

表 2 主瓣与第一旁瓣的幅值与宽度

滤波函数	主瓣宽	主瓣幅值	第一旁瓣幅值	第一旁瓣宽
R-L	1.556	0.26	-0.1015	0.330
S-L	1.653	0.2036	-0.0685	0.275
a=0.25	1.590	0.2260	-0.0857	0.294

由上表可以看出,  $a=0.25$  对应的指数函数的主瓣比 S-L 滤波函数的主瓣高而且窄, 旁瓣幅值又比 R-L 滤波函数小, 因此可以看出它是一种相对 R-L 和 S-L 滤波函数较为折中的滤波函数。根据滤波函数对图像重建误差影响因素的分析, 主瓣高而窄, 空间分辨率较好, 旁瓣幅度和幅值较小时, 可以减小 Gibbs 效应。因此, 可以得出指数滤波函数在保证较好的空间分辨率的同时, 相对提高了密度分辨率, 从而利用该函数完成的重建图像具有良好的特性。

### 4.2 指数窗函数实验结果分析

为了说明指数函数对图像重建的有效性, 实验中利用了二维扇束滤波反投影算法进行仿真实验。采用的模型是典型的 Shepp-Logan, 射线源到物体中心的距离是 800 像素, 物体到探测器的距离是 200 像素, 所得到的投影数据为  $250 \times 360$ , 重建图像的大小为  $250 \times 250$ , 结果如图 2 所示。



图 2 不同滤波函数的重建结果

表 3 不同滤波函数重建的  $d$  和  $r$  值

滤波函数	归一化均方距离 $d$	归一化平均绝对距离 $r$
指数滤波函数	0.349045	0.295513
R-L 滤波函数	0.402496	0.384356
S-L 滤波函数	0.378006	0.35621

由表 3 可以看出, 指数滤波函数重建图像, 其归一化均方距离和归一化绝对距离都比常用的 R-L、S-L 滤波函数小, 从而可得到较好的图像重建效果。

### 4.3 参数 $a$ 在噪声环境下对重建结果的影响分析

在滤波函数对图像重建效果的分析中, 常常需要模拟噪声, 分析其对重建图像质量的影响。为此, 实验中加入了泊松噪声。

$$P'(t, \theta) = P(t, \theta) + g(\lambda) \quad (15)$$

通过改变泊松噪声参数,改变模拟噪声的大小。实验中设  $\lambda$  分别为 0.1, 0.5, 2 来模拟,结果如图 3—图 5 所示。

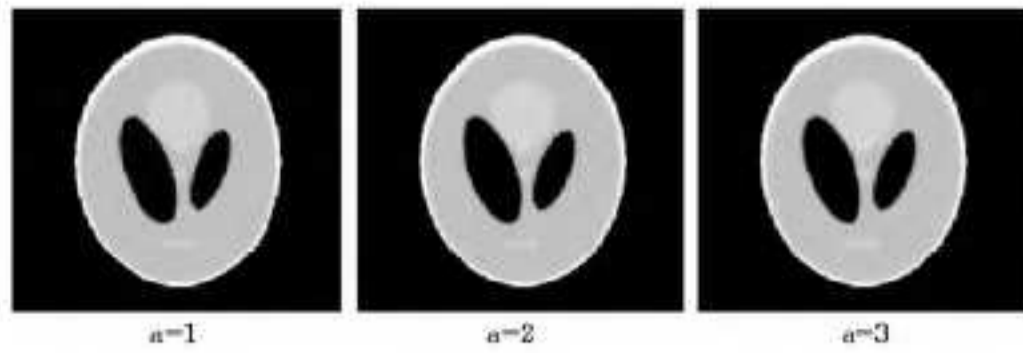


图 3  $\lambda=0.1$  时不同的指数滤波函数重建结果

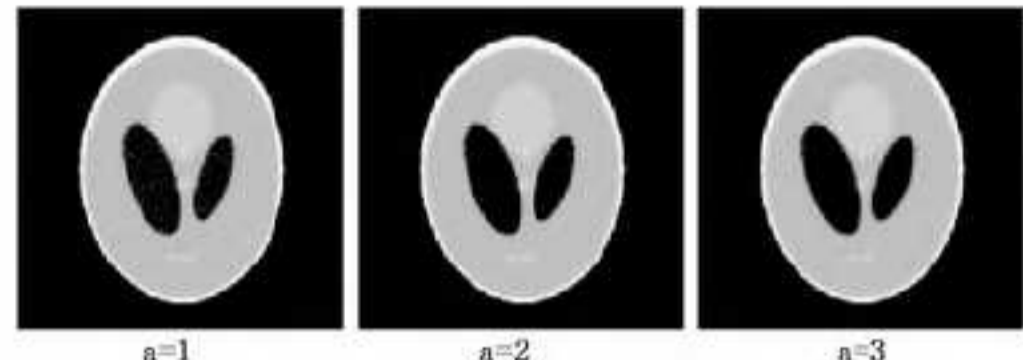


图 4  $\lambda=0.5$  时不同的指数滤波函数重建结果

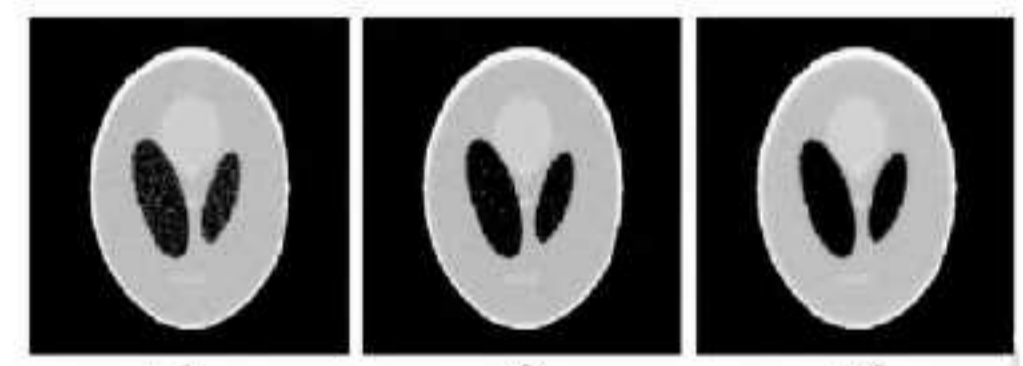
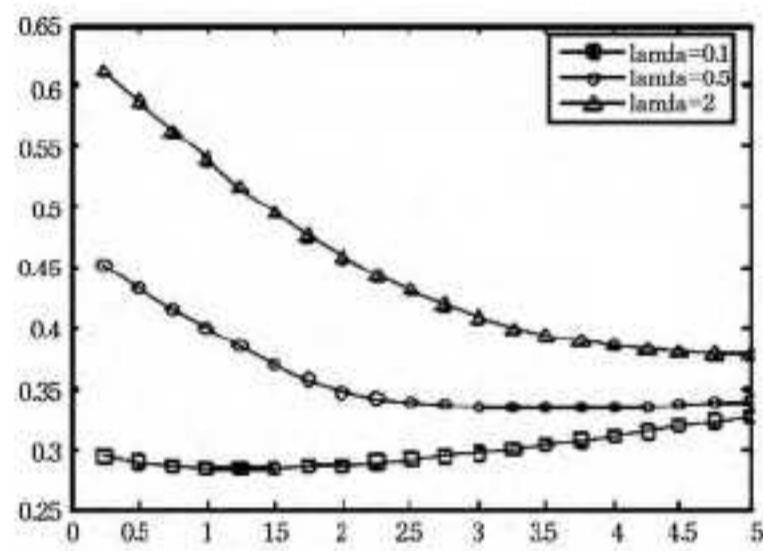
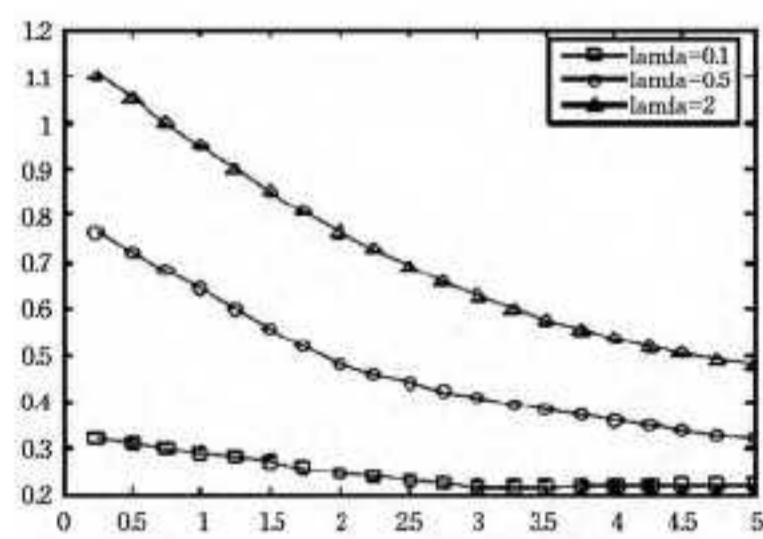


图 5  $\lambda=2$  时不同的指数滤波函数重建结果

图 6 是以  $a$  为横坐标,以评价函数为纵坐标,分析在不同噪声情况下各指数滤波函数对图像重建质量的影响曲线图。



(a) 归一化均方距离  $d$  的变化曲线



(b) 归一化平均绝对距离  $r$  的变化曲线

图 6 参数变化曲线图

由图 6 可以看出,在  $\lambda=0.1$  噪声情况下,归一化均方距离在  $a=1.2$  处取得最小值,而归一化平均绝对距离在  $a=3.5$  处取得最小值。当  $\lambda=0.5$  时,图像随着参数  $a$  的增大,归一化均方距离和归一化绝对距离两个指标都呈下降趋势,而且通过重建结果可以看出随着  $a$  值的增大,图像质量得到逐渐改善。在  $\lambda=2$  的噪声情况下,同样遵守上述的原则,而且

可以获得较好质量的图像。

但经实验验证,当  $a$  值取得过大时,会造成图像模糊现象,而且边缘不很清晰。至于在实际中  $a$  取多少,才能获得较好质量的图像,这取决于多个方面因素,比如数据的采集方法、采集中的噪声情况、图像重建工件的类型以及评价标准等。

**结束语** 在滤波反投影算法中,通过窗函数的使用完成了滤波的功能。本文通过指数滤波函数与常用的 R-L、S-L 函数的比较,验证了其归一化均方距离和归一化绝对距离都比常用的 R-L、S-L 滤波函数小,从而获得较好的图像重建效果。另外本文还通过调整指数参数  $a$ ,分析了在有噪声的情况下该函数对图像重建的影响,经实验验证,在实际中要想获得较好质量的图像,不仅要适当调整参数  $a$  的取值,而且还要考虑其他多方面的因素。

对于滤波反投影算法中窗函数的选择,一直以来都是研究热点,人们也在不断地探索中,寻找更加合适的滤波函数,以获得更好质量的重建图像。

## 参 考 文 献

- [1] 张朝宗,郭志平等.工业 CT 技术与原理[M].北京:科学出版社,2009
- [2] Ramachandran G N, Lakshminaryanan A V. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: Application of Fourier transforms[C]//Proc. Nat. Acad. Sci. 1971, 68:2236-2240
- [3] Shepp L A, Logan B F. The fourier reconstruction of a head section[J]. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1974, 21:21-43
- [4] 范慧荣,等.关于 CBP 算法中的一种新型滤波函数和它的性质[J].电子学报,2004,32(2):232-235
- [5] 张斌.滤波反投影图像重建算法中插值和滤波器研究[D].太原:中北大学,2009
- [6] 翟静.三维锥束 CT 中滤波反投影算法的研究[D].太原:中北大学,2008
- [7] 刘晓,杨朝文. RL 滤波函数的改进对卷进反投影图像重建的影响[J].四川大学学报,自然科学版,2004,41(1):112-117
- [8] Kwoh Y S, Reed I S. Back projection speed improvement for 3-D reconstruction[J]. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1977, 24(5): 1999-2005
- [9] Chye H-Y, Whalen R T, Bequire G S, et al. Reconstruction Algorithm for Polychromatic CT Imaging: Application to Beam Hardening Correction [J]. IEEE Trans. Med. Imag., 2000, 19(1):1-14
- [10] Henrik T. Cone-Beam Reconstruction using Filtered Backprojection[M]. Linkoping Studies in Science and Technology Dissertation, 2001, 672:19-21
- [11] 庄天戈. CT 原理和算法[M].上海:上海交通大学出版社,1992: 1-99
- [12] 马晨欣. CT 图像关键技术研究[D].郑州:解放军信息工程大学,2011