第 41 卷 第 6A 期
2014 年 6 月

计 算 机 科 学
Computer Science

Vol. 41 No. 6A
Jun 2014

(V,R)-语言

师海忠[1] 师 越[2]

(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)[1] (北京工业大学经济与管理学院 北京 100022)[2]

摘 要 V 是一个字母表。F_V 是 V 上的一个自由半群，R 是 F_V 的一个子集。首先，提出了 (V,R)-半群的概念，证明了图半群和有向图半群都是 (V,R)-半群。其次，提出了超图半群的概念，证明了超图半群是 (V,R)-半群，超图半群把超图理论和自由半群理论联系起来。以此为基础，提出了 (V,R)-语言和超图语言两个概念。超图语言把超图理论和形式语言理论联系起来。进而，证明了超图语言、无向图语言和有向图语言都是特殊的 (V,R)-语言。第三，证明了无向图语言和有向图语言都是正则语言。这就回答了文献"无向图语言"和"有向图语言"中提出的开问题。(V,R)-半群和 (V,R)-语言是研究自由半群和形式语言的新理论和新方法。

关键词 (V,R)-半群，(V,R)-语言，超图半群，超图语言，无向图语言，有向图语言，正则语言，Rees 同余

中图法分类号 TP301.2 **文献标识码** A

(V,R)-Languages

SHI Hai-zhong[1] SHI Yue[2]

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)[1]

(College of Economics and Management, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)[2]

Abstract V is an alphabet. F_V is a free semigroup on V. R is a subset of F_V. At first, we proposed a concept—(V,R)-semigroup and proved that graph-semigroup and digraph-semigroup are both(V,R)-smigroups. Second, we proposed a concept—hypergraph semigroup. The theories of hypergraphs and free semigroups are connected by the hypergraph semigroups. On this base, we proposed two concepts--(V,R)-languages and hypergraph language. The theories of hypergraphs and formal languages are connected by the hypergraph languages. Furthermore, we proved that the hypergraph language, undirected graph and digraph language are all(V,R)-languages. Third, we proved that the undirected graph language and the digrapg language are both regular languages, which answers the open problems in references of "undirected graph languages" and "digraph languages ". $(V,R$-$)$ semigroups and (V,R)-languages are new theories and methods of studying free semigroups and formal languages.

Keywords (V,R)-semigroup, (V,R)-language, Hypergraph semigroup, Hypergraph language, Undirected graph language, Digraph language, Regular language, Rees congruence

1 引言

形式语言与自动机理论是计算机科学技术学科的重要基础理论。对语言的研究包括 3 个方面，即语言的表示、语言是否存在有穷描述以及语言的结构。用文法作为相应语言的有穷描述，不仅可以描述出语言的结构特征，而且可以产生这个语言的所有句子。按乔姆斯基体系，语言分为短语结构语言、上下文有关语言、上下文无关语言以及正则语言 4 类，而正则语言一定是上下文无关语言，上下文无关语言一定是上下文有关语言，上下文有关语言一定是短语结构语言[1-3]。图是图论中的一个基本概念[4]。半群和自由半群是半群理论的两个基本概念[5]。Rees 同余是一类重要的同余[5]。图半群是为证明图的重构猜想而提出的一个概念，图半群把图与自由半群联系起来[6-9]。无向图语言和有向图语言借助图半群和有向图半群这座桥梁把无向图与形式语言、有向图与形式语言联系起来[10,11]。

V 是一个字母表，F_V 是 V 上的一个自由半群[5]（也称为 V 的正闭包[6]），R 是 F_V 的一个子集。在本文中，主要结果如下：

1. 提出了 (V,R)-半群的概念，并证明了：图半群和有向图半群都是 (V,R)-半群；

2. 提出了超图半群的概念，并证明了：超图半群是 (V,R)-半群，超图半群把超图[12]和自由半群联系起来；

3. 借助于 (V,R)-半群和超图半群，提出了 (V,R)-语言和超图语言的概念，超图语言把超图理论和形式语言理论联系起来；

4. 证明了：无向图语言和有向图语言都是正则语言，回答了文献[10,11]中提出的开问题。

(V,R)-半群和 (V,R)-语言预示着两种新理论、新方法的诞生。

师海忠(1962—)，男，博士，教授，主要研究方向为互连网络设计与分析、无(有)向图语言、图半群等，E-mail: haizhong.shi@163.com；师 越(1991—)，男，主要研究方向为经济网络等。

本文第 2 节是预备知识；第 3 节介绍 (V,R)-半群；第 4 节介绍超图半群；第 5 节介绍 (V,R)-语言；第 6 节介绍超图语言；第 7 节介绍无向图语言与正则语言；第 8 节介绍有向图语言与正则语言，最后是结束语。

2 预备知识

定义 1 设 X 是非空集合，则称 $X\times X$ 的一个子集为 X 上的一个二元关系。

定义 2 一个二元关系如果满足自反性、对称性和传递性，则称它为等价关系。

定义 3 设 $\langle S,\cdot\rangle$ 是一个半群，集 S 上的一个二元关系称为相容的，如果

$(\forall s,t,s',t'\in S)((s,s')\in\Delta)$ 且 $(t,t')\in\Delta\Rightarrow(st,s't')\in\Delta$。

定义 4 半群 $\langle S,\cdot\rangle$ 上的相容的等价关系称为 S 上的同余。

定义 5 如果 V 是一个非空字母表，F_V 是由 V 上的所有非空有限字 $a_1a_2\cdots a_m$ 组成的集合。在 F_V 上定义一个“毗连”的二元运算：

$(a_1a_2\cdots a_m)(b_1b_2\cdots b_n)=a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$

F_V 关于“毗连”构成一个半群，称为自由半群。V 成为 F_V 的生成集或字母表。

定义 6 设 I 是半群 $\langle S,\cdot\rangle$ 的子半群，若对任意 $s,s'\in S$ 都有 $sIs'\subseteq I$，则称 I 为 $\langle S,\cdot\rangle$ 的理想。

定义 7 设 I 是半群 $\langle S,\cdot\rangle$ 的一个理想，则 $\rho_I=(I\times I)\cup 1_S$ 是 S 上的一个同余，称 ρ_I 为 S 上的一个 Rees 同余。

也就是说，$(x,y)\in\rho_I\Leftrightarrow$ 要么 $x=y$ 要么 $x,y\in I$。

由此产生商半群 $S/\rho_I=\{I\}\cup\{\{x\}:x\in S\backslash I\}=(S\backslash I)\cup\{0\}$

3 $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{R})$-半群

定义 8 设 V 是一个非空字母表，F_V 是 V 上的自由半群，F_V^* 是 V 上的自由幺半群，R 是 F_V 的一个子集，则 $F_V^*RF_V^*$ 是 F_V 的一个理想，ρ_R 为由此理想产生的 Rees 同余，则称商半群 F_V/ρ_R 为 (V,R)-半群，记为 $F(V,R)$。

注意，当 R 为空集时，F_V/ρ_R 即为 F_V，记为 $F(V,\phi)$；当 $R=F_V$ 时，F_V/ρ_R 仅有一个元素 $\{F_V\}$，记为 $F(V,0)$。

定义 9[6,7] 设 V 是一个非空字母表，F_V 是 V 上的自由半群，F_V^* 是 V 上的自由幺半群，E 是 V^2 的子集且若 $xy\in E$ 则 $yx\in E$，$\overline{E}=V^2-E$，那么 $F_V^*\overline{E}F_V^*$ 是 F_V 的一个理想，$\rho_{\overline{E}}$ 为由此理想产生的 Rees 同余，则称商半群 $F_V/\rho_{\overline{E}}$ 为由顶点集 V 和边集 E 产生的图半群，记为 $F_V/\rho_{\overline{E}}$。

注意，当 E 为空集时，$F_V/\rho_{\overline{E}}$ 即为空图半群，$\{v\mid v\in V\}\cup\{0\}$；当 $E=V^2$ 时，$F_V/\rho_{\overline{E}}$ 为拟完全图半群，即为 $F(V,\phi)$。

定理 1 图半群 $F_V/\rho_{\overline{E}}$ 是 $(V,\overline{E})$-半群 $F(V,\overline{E})$。

定义 10[7] 设 V 是一个非空字母表，F_V 是 V 上的自由半群，F_V^* 是 V 上的自由幺半群，A 是 V^2 的子集，$\overline{A}=V^2-A$，那么 $F_V^*\overline{A}F_V^*$ 是 F_V 的一个理想，$\rho_{\overline{A}}$ 为由此理想产生的 Rees 同余，则称商半群 $F_V/\rho_{\overline{A}}$ 为由顶点集 V 和弧集 A 产生的有向图半群，记为 $F_V/\rho_{\overline{A}}$。

定理 2 有向图半群 $F_V/\rho_{\overline{A}}$ 是 $(V,\overline{A})$-半群 $F(V,\overline{A})$。

4 超图半群

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个有限集，关于 XI 上的一个简单超图 $H=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$ 是 X 上的一个有限子集簇，使得

(1) $E_i\neq\phi,i=1,2,\cdots,m$；

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{m}E_i=X$；

(3) $E_i\subset E_j\Rightarrow i=j$。

这里不考虑类似于图中孤点的顶点[12]。

$E_1,E_2,\cdots,E_m$ 可重写为 $E_{11},\cdots,E_{1i_1},E_{11},\cdots,E_{1i_2},\cdots,E_{11},\cdots,E_{1i_r}$，这里 E_{jk_j} 表示含 j 个顶点的第 k_j 条边，$0\leqslant k_j\leqslant i_j\leqslant m,1\leqslant j\leqslant r\leqslant n,\sum\limits_{j=1}^{r}i_j=m$，只有当 $i_j=0$ 时 $k_j=0$，意味着没有含 j 个顶点的边。

设 $E_{jk_j}^*$ 是 E_{jk_j} 上的克林闭包，$E_{jk_j}^+$ 是 E_{jk_j} 上的正闭包，

$\overline{E}(\mathrm{I})=\bigcup_{p=1}^{r}(X^p-\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}E_{jk_j}^p)$；

$\overline{E}(\mathrm{II})=\bigcup_{p=1}^{r}(X^p-\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}(E_{jk_j}^p-\{x_l^p\mid 1\leqslant l\leqslant n\}))$；

$\overline{E}(\mathrm{III})=\bigcup_{p=1}^{r}(X^p-\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}E_{jk_j}^+)$；

$\overline{E}(\mathrm{IV})=\bigcup_{p=1}^{r}(X^p-\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}(E_{jk_j}^+-\{x_l^p\mid 1\leqslant l\leqslant n\}))$

$\overline{E}(\mathrm{V})=\bigcup_{p=1}^{r}(X^p-\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}(E_{jk_j}^+-E_{jk_j}^*\{x_l^p\mid 1\leqslant l\leqslant n\}E_{jk_j}^*))$；

那么 $F_X^*\overline{E}(\mathrm{I})F_X^*,F_X^*\overline{E}(\mathrm{II})F_X^*,F_X^*\overline{E}(\mathrm{III})F_X^*,F_X^*\overline{E}(\mathrm{IV})F_X^*,F_X^*\overline{E}(\mathrm{V})F_X^*$ 是 F_X 的 5 个理想，$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4,\rho_5$ 分别是以上 5 个理想的 Rees 同余，商半群 $F_X/\rho_1,F_X/\rho_2,F_X/\rho_3,F_X/\rho_4,F_X/\rho_5$，分别称为 I 型超图半群，II 型超图半群，III 型超图半群，IV 型超图半群和 V 型超图半群，分别记为 $\mathrm{SF}(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{I}),\mathrm{SF}(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{II}),\mathrm{SF}(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{III}),\mathrm{SF}(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{IV}),\mathrm{SF}(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{V})$，统称为超图半群。

易知，当 $r=2,i_1=0$ 时，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{II})$ 就是一个简单图半群 $F_X/\rho_{\overline{E}}$，这里 $E=\bigcup_{k_2=1}^{i_2}\{uv\mid u,v\in E_{2k_2},u\neq v\}$，$\overline{E}=X^2-E$。当 $r=2$ 时，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{I})$ 就是一个图半群 $F_X/\rho_{\overline{E}}$，这里 $E=(\bigcup_{k_2=1}^{i_2}\{uv\mid u,v\in E_{2k_2},u\neq v\})\cup(\bigcup_{k_1=1}^{i_1}\{u^2\mid u\in E_{1k_1}\})$，$\overline{E}=X^2-E$。

我们对超图半群进一步推广：

F_V 是 V 上的一个自由半群，任给 F_V 的 2δ 个子集 $B_1,B_2,\cdots,B_\delta,C_1,C_2,\cdots,C_\delta$，其中 $B_i\neq\phi,i=1,2,\cdots,\delta$，记 $B(C)=\bigcup\limits_{i=1}^{\delta}(B_i-C_i)$，则 $F_V^*B(C)F_V^*$ 是 F_V 的一个理想，$\rho_{B(C)}$ 是该理想产生的 Rees 同余，商半群 $F_V/\rho_{B(C)}$ 称为 (V,B,C,δ)-半群，记为 $F(V,B,C,\delta)$。于是得到如下定理。

定理 3 1) (V,B,C,δ)-半群 $F(V,B,C,\delta)$ 是一个 (V,R)-半群 $F(V,R)$，其中 $R=B(C)$；

2) 图半群 $F_V/\rho_{\overline{E}}$ 是一个 (V,B,C,δ)-半群 $F(V,V^2,E,1)$；

3) 有向图半群 $F_V/\rho_{\overline{A}}$ 是 (V,B,C,δ)-半群 $F(V,V^2,A,1)$；

4) I 型超图半群 $SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{I})$，II 型超图半群 $SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{II})$，III 型超图半群 $SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{III})$，IV 型超图半群 $SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{IV})$ 和 V 型超图半群 $SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{V})$ 都是 (V,B,C,δ)-半群 $F(V,B,C,\delta)$，其中，

I 型：$V=X,B_p=X^p,C_p=\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}E_{jk_j}^p$，其中，$p=1,2,\cdots,r,\delta=r$；

II 型：$\mathrm{V}=\mathrm{X},B_p=X^p$，

$C_p=\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}(E_{jk_j}^{p}-\{x_l^p\mid 1\leqslant l\leqslant n\})$，其中，$p=1,2,\cdots,r,\delta=r$；

III 型：$V=X,B_p=X^p$，

$C_p=\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}E_{jk_j}^{+}$，

其中，$P=1,2,\cdots,r,\delta=r$；

IV 型：$V=X,B_p=X^p$，

$C_p=\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}(E_{jk_j}^{+}-\{x_l^p\mid 1\leqslant l\leqslant n\})$，

其中，$P=1,2,\cdots,r,\delta=r$；

V 型：$V=X,B_p=X^p$，

$C_p=\bigcup_{j=p}^{r}\bigcup_{k_j=1}^{i_j}(E_{jk_j}^{+}-E_{jk_j}^{*}\{x_l^p\mid 1\leqslant l\leqslant n\}E_{jk_j}^{*})$，

其中，$P=1,2,\cdots,r,\delta=r$。

5 (V,R)-语言

定义 11 设 $F(V,R)$ 是 (V,R)-半群，$F(V,R)$ 中的元素 $F_V^* R F_V^*$ 为零元 $0(R)$，则字母表 V 上的语言：

$L(F(V,R))=\{f\mid f(R)\in F(V,R)$ 且 $f(R)\neq 0(R)\}$

称为 (V,R)-语言：

例如，$V=\{0,1\},R=V^3\cup V^4\cup\cdots$，则 (V,R)-语言 $L(F(V,R))=\{0,1,00,01,10,11\}$。

6 超图语言

定义 12 设 $H=(X;E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是 X 上的简单超图，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{I})$，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{II})$，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{III})$，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{IV})$，$SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{V})$ 分别为超图 H 的 I 型超图半群，II 型超图半群，III 型超图半群，IV 型超图半群和 V 型超图半群。它们中的零元分别为 $0(\mathrm{I}),0(\mathrm{II}),0(\mathrm{III}),0(\mathrm{IV}),0(\mathrm{V})$。

则语言

$L(SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{I}))=\{f\mid f(\mathrm{I})\in SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{I})$ 且 $f(\mathrm{I})\neq 0(\mathrm{I})\}$

$L(SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{II}))=\{f\mid f(\mathrm{II})\in SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{II})$ 且 $f(\mathrm{II})\neq 0(\mathrm{II})\}$

$L(SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{III}))=\{f\mid f(\mathrm{III})\in SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{III})$ 且 $f(\mathrm{III})\neq 0(\mathrm{III})\}$

$L(SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{IV}))=\{f\mid f(\mathrm{IV})\in SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{IV})$ 且 $f(\mathrm{IV})\neq 0(\mathrm{IV})\}$

$L(SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{V}))=\{f\mid f(\mathrm{V})\in SF(X;E_1,E_2,\cdots,E_m;\mathrm{V})$ 且 $f(\mathrm{V})\neq 0(\mathrm{V})\}$

分别称作超图 H 的 I 型超图语言，II 型超图语言，III 型超图语言，IV 型超图语言和 V 型超图语言，分别记为 $L(H,\mathrm{I}),L(H,\mathrm{II}),L(H,\mathrm{III}),L(H,\mathrm{IV}),L(H,\mathrm{V})$。

例如，$X=\{0,1,2\},E_1=\{0,1\},E_2=\{1,2\}$。超图 $H=(X;E_1,E_2)$ 的 I－V 型超图语言分别记为 $L(H,\mathrm{I})-L(H,\mathrm{V})$。

下面分别计算它们。

$\bar{E}(\mathrm{I})=\{02,20\}$

$\bar{E}(\mathrm{II})=\{02,20,00,11,22\}$

$\bar{E}(\mathrm{III})=\{02,20\}$

$\bar{E}(\mathrm{IV})=\{02,20,00,11,22\}$

$\bar{E}(\mathrm{V})=\{02,20,00,11,22\}$

$L(H,\mathrm{I})=X^+-X^*\bar{E}(\mathrm{I})X^*$

$L(H,\mathrm{II})=X^+-X^*\bar{E}(\mathrm{II})X^*$

$L(H,\mathrm{III})=X^+-X^*\bar{E}(\mathrm{III})X^*$

$L(H,\mathrm{IV})=X^+-X^*\bar{E}(\mathrm{IV})X^*$

$L(H,\mathrm{V})=X^+-X^*\bar{E}(\mathrm{V})X^*$

开问题：I-V 型超图语言与短语结构语言、上下文无关语言、上下文有关语言、正则语言有何关系？

7 无向图语言与正则语言

设 $G=(V,E)$ 是一个拟简单图，V 为它的顶点集，E 为它的边集，F_V/ρ_E 为 G 的图半群。$L(F_V/\rho_E)=\{f\mid f(\rho_E)\in F_V/\rho_E$ 且 $f(\rho_E)\neq 0\}$ 是 F_V/ρ_E 的图半群语言，也是 G 的无向图语言 $L(G)$，即 $L(G)=L(F_V/\rho_E)$。

定义 13[3] 文法(grammar) H 是一个四元组：$H=(V,T,P,S)$，其中，V 为变量(variable)的非空有穷集，T 为终极符(terminal)的非空有穷集，$V\cap T=\phi$，P 为产生式(production)的非空有穷集，S 为文法 G 的开始符号，$S\in V$。

定义 14 设 $G=(V,E)$ 是一个拟简单图，其中，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。F_V/ρ_E 为 G 的图半群，定义文法 $H(G)=(V,T,P,S)$ 如下：

$U=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为变量的非空有穷集；

$T=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为终极符的非空有穷集；

$P=\{A_1\to v_1,A_2\to v_2,\cdots,A_n\to v_n,A_i\to v_iA_j$ 当且仅当 $v_iv_j\in E,i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n\}$ 为产生式的非空有穷集；

$S=A_1$ 为开始符号。

定义 15[3] 设文法 $H=(V,T,P,S)$，则

(1) H 叫做 0 型文法(type 0 grammar)，或短语化结构文法(phrase structure grammar, PSG)。对应的语言 $L(H)$ 叫做 0 型语言或者短语结构语言(PSL)。

(2) 如果对于 $\forall\alpha\to\beta\in P$ 均有 $|\beta|\geqslant|\alpha|$ 成立，则称 H 为 1 型文法(type 1 grammar)或者上下文有关文法(context sensitive grammar, CSG)。对应的语言 $L(H)$ 叫做 1 型语言(type 1 language)或者上下文有关语言(context sensitive language, CSL)。

(3) 如果对于 $\forall\alpha\to\beta\in P$ 均有 $|\beta|\geqslant|\alpha|$，并且 $\alpha\in V$ 成立，则称 H 为 2 型文法(type 2 grammar)或者上下文无关文法(context free grammar, CFG)。对应的语言 $L(H)$ 叫做 2 型语言(type 2 language)或者上下文无关语言(context free language, CFL)。

(4) 如果对于 $\forall\alpha\to\beta\in P,\alpha\to\beta$ 均具有形式

$A\to w$

$A\to wB$

其中，$A,B\in V,w\in T^*$，则称 G 为 3 型文法(type 3 grammar)或者正则文法(regular grammar, RG)。对应的语言 $L(H)$ 叫做 3 型语言(type 3 language)或正则语言(regular language, RL)。

由定义 14 和定义 15 可得到如下定理。

定理 4 1) $H(G)$ 为正则文法；2) $L(H(G))$ 为正则语言。

定理 5 $L(G)=L(F_V/\rho_{\bar{E}})=L(H(G))$。

证明：只需证明后一等式即可。

先证 $L(F_V/\rho_{\bar{E}})\subseteq L(H(G))$。

对任意 $f\in L(F_V/\rho_{\bar{E}})$，若 $|f|=1$，则存在 $v_i\in V$ 使 $f=v_i$，又有产生式 $A_i\to v_i$ 产生 f；否则 $|f|\geqslant 2$，都有 $v_{i_1}v_{i_2},v_{i_2}v_{i_3},\cdots,v_{i_{l-1}}v_{i_l}\in E$ 使 $f=v_{i_1}v_{i_2}v_{i_3}\cdots v_{i_{l-1}}v_{i_l}$。

因此，f 可由如下产生式产生：

$A_{i_1}\to v_{i_1}A_{i_2}$

$A_{i_2} \to v_{i_2} A_{i_3}$

$\cdots$

$A_{i_{l-1}} \to v_{i_{l-1}} A_{i_l}$

$A_{i_l} \to v_{i_l}$

显然这些产生式属于定义 14 中的产生式集 P。

故,$f \in L(H(G))$

再证 $L(H(G)) \subseteq L(F_V/\rho_E)$

对任意 $f \in L(H(G))$,若 $|f|=1$,则存在 $v_i \in V$ 使 $f=v_i$,又有产生式 $A_i \to v_i$ 产生 f,$f \in L(F_V/\rho_E)$,否则 $|f| \geqslant 2$,f 可由 P 中产生式产生。设 $f=v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$,则 f 由如下产生式产生:

$A_{i_1} \to v_{i_1} A_{i_2}$

$A_{i_2} \to v_{i_2} A_{i_3}$

$\cdots$

$A_{i_{l-1}} \to v_{i_{l-1}} A_{i_l}$

$A_{i_l} \to v_{i_l}$

因此,由定义 14 知,$v_{i_1} v_{i_2}, v_{i_2} v_{i_3}, \cdots, v_{i_{l-1}} v_{i_l} \in E$。$f(\rho_{\bar{E}}) \in F_V/\rho_{\bar{E}}$ 且 $f(\rho_{\bar{E}}) \neq 0$ 故 $f \in L(F_V/\rho_{\bar{E}})$,故 $L(H(G)) \subseteq L(F_V/\rho_{\bar{E}})$。

综上所述,$L(F_V/\rho_E)=L(H(G))$。

由定理 4 和定理 5 可得如下推论。

推论 1 $L(G)=L(F_V/\rho_{\bar{E}})$ 为正则语言。当然是上下文无关语言,也是上下文有关语言,也是短语结构语言。

8 有向图语言与正则语言

设 $D=(V,C)$ 是一个拟简单有向图(可能有有向环但无重有向边)。V 为它的顶点集,C 为它的孤集。$F_V/\rho_{\bar{C}}$ 为 D 的有向图半群,$L(D)=L(F_V/\rho_{\bar{C}})=\{f \mid f(\rho_{\bar{C}}) \in F_V/\rho_{\bar{C}}$ 且 $f(\rho_{\bar{C}}) \neq 0\}$ 是 $F_V/\rho_{\bar{C}}$ 的有向图半群语言,也是 D 的有向图语言。

定义 16 设 $D(V,C)$ 是拟简单有向图,其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$F_V/\rho_{\bar{C}}$ 为 D 的有向图半群。定义文法 $H(D)=(U,T,P,S)$ 如下:

$U=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为变量的非空有穷集;

$T=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为终极符的非空有穷集;

$P=\{A_1 \to v_1, A_2 \to v_2, \cdots, A_n \to v_n, A_i \to v_i A_j$ 当且仅当 $v_i v_j \in C, i=1,2,\cdots,n. j=1,2,\cdots,n\}$ 为产生式的非空有穷集;

$S=A_1$ 为开始符号。

文法 $H(D)$ 产生的语言为 $L(H(D))$。

由定义 15 和定义 16 可得如下定理。

定理 6 1)$H(D)$ 为正则文法;2)$L(H(D))$ 为正则语言。

定理 7 $L(D)=L(F_V/\rho_C)=L(H(D))$。

证明:只需证明 $L(F_V/\rho_C)=L(H(D))$ 即可。

先证:$L(F_V/\rho_{\bar{C}}) \subseteq L(H(D))$

对任意 $f \in L(F_V/\rho_{\bar{C}})$,若 $|f|=1$,则存在 $v_i \in V$ 使 $f=v_i$,又有产生式 $A_i \to v_i$ 产生 f,故 $f \in L(H(D))$;否则 $|f| \geqslant 2$,都有 $v_{i_1} v_{i_2}, v_{i_2} v_{i_3}, \cdots, v_{i_{l-1}} v_{i_l} \in C$ 使 $f=v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$。

因此 f 可由如下产生式产生:

$A_{i_1} \to v_{i_1} A_{i_2}$

$A_{i_2} \to v_{i_2} A_{i_3}$

$\cdots$

$A_{i_{l-1}} \to v_{i_{l-1}} A_{i_l}$

$A_{i_l} \to v_{i_l}$

而这些产生式均属于定义 16 中的 P,故 $f \in L(H(D))$。

所以 $L(F_V/\rho_{\bar{C}}) \subseteq L(H(D))$。

再证 $L(H(D)) \subseteq L(F_V/\rho_C)$

对任意 $f \in L(H(D))$,若 $|f|=1$,则存在 $v_i \in V$ 使 $f=v_i$,又有产生式 $A_i \to v_i$ 产生 f,$f \in L(F_V/\rho_{\bar{C}})$,否则 $|f| \geqslant 2$,f 可由 P 中产生式产生。设 $f=v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$,则 f 由如下产生式产生:

$A_{i_1} \to v_{i_1} A_{i_2}$

$A_{i_2} \to v_{i_2} A_{i_3}$

$\cdots$

$A_{i_{l-1}} \to v_{i_{l-1}} A_{i_l}$

$A_{i_l} \to v_{i_l}$

因此,由定义 16 知,$v_{i_1} v_{i_2}, v_{i_2} v_{i_3}, \cdots, v_{i_{l-1}} v_{i_l} \in C$。$f(\rho_{\bar{C}}) \in F_V/\rho_{\bar{C}}$ 且 $f(\rho_{\bar{C}}) \neq 0$ 故 $f \in L(F_V/\rho_{\bar{C}})$,故 $L(H(G)) \subseteq L(F_V/\rho_C)$。

综上所述,$L(F_V/\rho_C)=L(H(D))$。

由定理 6 和定理 7 可得如下推论。

推论 2 $L(D)=L(F_V/\rho_C)$ 是正则语言,当然是上下文无关语言,也是上下文无有语言,也是短语结构语言。

结束语 F_V 是字母表 V 上的自由半群,F_V^* 是字母表 V 上的自由幺半群,由理想确立的 Rees 同余是一类重要的同余。R 是 F_V 的一个子集,本文在"图半群"[6,7]的基础上巧妙地构建了 F_V 的理想 $F_V^* R F_V^*$,由此理想确定了 Rees 同余 ρ_R,自然导出商半群 F_V/ρ_R,称为 (V,R)-半群 $F(V,R)$,进而提出了 (V,R)-语言、I-V 型超图半群、超图的 I-V 型超图语言、(V,B,C,δ)-半群、(V,B,C,δ)-语言等概念,并证明了:无向图语言和有向图语言群是正则语言。这些概念和结论预示一个更加广阔的研究领域(新理论和新方法)的诞生。

参 考 文 献

[1] Du Ding-zhu, Ko Ker-I. Problem Solving in Automata, Languages and Complexity[M]. New York: Wiley & Sons, 2001

[2] Hopcroft J, Ullman J. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation[M]. American: Addison-wesly Publishing Company, 1979

[3] 蒋宗礼,姜守旭. 形式语言与自动机理论[M]. 北京:清华大学出版社,2003

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application[M]. New York: Elsevier, 1976

[5] Howie J M. An Introduction to Semigroup Theory [M]. London: Academic Press, 1976

[6] 堵丁柱,师海忠. 图的可重构的充要条件[J]. 科学通报,1997,42(16):1719-1721

[7] 师海忠,祁永谨. 图半群[J]. 西北师范大学学报:自然科学版,1991,27(2):17-23

[8] 师海忠. 图半群的度向量[J]. 西北师范大学学报:自然科学版,1991,27(4):12-14

[9] 师海忠. 完全图半群和连通图半群[J]. 西北师范大学学报:自然科学版,1994,30(4):23-27

[10] 师海忠. 无向图语言[J]. 计算机科学,2011,38(6):259-261,274

[11] 师海忠. 有向图语言[J]. 计算机工程与应用,2011,47(22):53-56

[12] Berge C. 超图-有限集的组合学[M]. 卜月华,张克民,译. 南京:东南大学出版社,2002