

基于模糊软集的三 I 推理方法的性质

薛彬彬 秦克云

(西南交通大学数学学院 成都 611756)

摘 要 文中讨论了基于模糊软集的三 I 推理方法的还原性和连续性。针对左连续 t 模诱导的模糊蕴涵算子,给出了 FSMP 三 I 推理方法满足还原性的条件,并证明了对于 Lukasiewicz 模糊蕴涵算子、Gödel 模糊蕴涵算子和 R_0 模糊蕴涵算子,FSMP 三 I 推理方法具有连续性。

关键词 模糊软集,三 I 推理方法,还原性,连续性

中图法分类号 O159 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2018.05.036

Properties of Triple I Reasoning Method Based on Fuzzy Soft Set

XUE Bin-bin QIN Ke-yun

(College of Mathematic, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract The reversibility and the continuity of fuzzy soft set based triple I reasoning method were investigated. For fuzzy implication operators which are induced by left continuous t norms, the conditions of reversibility of triple I reasoning method for FSMP was provided. Besides, for Lukasiewicz fuzzy implication operator, Gödel fuzzy implication operator and R_0 fuzzy implication operator, the continuity of triple I reasoning method for FSMP was proved.

Keywords Fuzzy soft set, Triple I method, Reversibility, Continuity

1 引言

传统数学方法在解决一些复杂系统问题时存在局限性,原因在于这些问题大多具有各种形式的不确定性。为此,有关学者提出了多种处理不确定性问题的数学工具,如模糊集理论^[1]、粗糙集理论^[2]等。Molodtsov^[3]于 1999 年提出了软集理论,它是一种新的处理不确定性问题的数学工具,在决策、数据分析和预测等领域得到了广泛应用。此后,软集理论发展迅速。Maji^[4]和 Ali^[5]等提出了软集之间的基本运算,并讨论了它们的基本性质;Qin 等^[6]在软空间中提出了软相等的概念并研究了软集构成的代数结构;Maji 等^[7]于 2001 年将模糊集理论和软集理论相结合,提出了模糊软集的概念。此后,许多学者在这个基础上对模糊软集进行了相关研究,提出了广义模糊软集^[8]和直觉模糊软集^[9-10]等模糊软集的推广形式。

近似推理是不确定性研究的重要内容,而模糊推理作为近似推理的主要组成部分,日益受到重视。模糊取式(FMP)和模糊拒取式(FMT)是模糊推理最基本的模型:

FMP:规则: $A \rightarrow B$, 输入: A^* , 结论: B^*

FMT:规则: $A \rightarrow B$, 输入: B^* , 结论: A^*

其中, A 和 A^* 与 B 和 B^* 分别是论域 U 和 V 上的模糊集。Zadeh^[11]于 1973 年提出了关于 FMP 的合成推理方法(CRI)。该方法运算简洁,便于实际应用,逐渐发展成了模糊

推理的基本方法。但从逻辑语义蕴涵的角度, CRI 方法中的复合运算缺乏逻辑依据。为了给模糊推理理论建立严格的逻辑基础,王国俊^[12]将模糊逻辑和模糊推理相结合,建立了模糊推理的三 I 原则并提出了可以用于解决 FMP 问题和 FMT 问题的三 I 推理方法。此后,众多学者对三 I 推理方法进行了一系列的相关研究^[13-14], 讨论了三 I 推理方法的还原性^[15]、近似性^[15-16]和连续性^[15-17]等相关性质。

目前,基于模糊软集的近似推理研究还比较少。Qin 等^[18]借助模糊推理的三 I 原则,提出了关于 FSMP 模型和 FSMT 模型的三 I 原则,并给出了相应的三 I 推理方法。模糊软取式(FSMP)和模糊软拒取式(FSMT)模型可以表述为:

FSMP:规则: $(F, A) \rightarrow (G, B)$, 输入: (F^*, A) , 结论: (G^*, B)

FSMT:规则: $(F, A) \rightarrow (G, B)$, 输入: (G^*, B) , 结论: (F^*, A)

其中, (F, A) , (F^*, A) 和 (G, B) , (G^*, B) 分别是论域 U 和 V 上的模糊软集。对于模糊推理, Dubois 等^[19]指出:在模糊产生式系统、模糊专家系统和模糊控制系统中要求推理方法满足近似原则。对于模糊软集,该原则是指:在 FSMP 情形下,当 (F^*, A) 充分逼近 (F, A) 时,推理方法能够保证 (G^*, B) 充分逼近 (G, B) ;在 FSMT 情形下,当 (G^*, B) 充分逼近 (G, B) 时,推理方法也能使 (F^*, A) 充分逼近 (F, A) 。然而对于模糊软集,三 I 推理方法是否满足近似原则以及相关的近似误差要求,尚未得到证实。本文针对此问题展开研究,讨论基于 FSMP 的三 I 推理方法的还原性和连续性。

到稿日期:2017-03-01 返修日期:2017-06-05 本文受国家自然科学基金(61473239)资助。

薛彬彬(1993-),男,硕士生,主要研究方向为模糊推理等;秦克云(1962-),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为粗糙集理论、粒计算、多值逻辑等, E-mail: keyunqin@263.net(通信作者)。

2 软集和模糊软集

本节介绍软集和模糊软集的一些基本概念^[1,3,7]。U 是所讨论的对象构成的集合,称为论域。假设 E 是关于 U 中对象的参数(或属性)集,称(U, E)为一个软空间。

定义 1^[3] 设(U, E)为一个软空间。如果 A ⊆ E, 且 F: A → P(U) 为一个映射, 则称(F, A)是论域 U 上的一个软集。

此定义表明, 论域 U 上的一个软集就是 U 的参数化的子集簇。对于任意 e ∈ A, F(e) 表示软集(F, A)的 e-近似元素组成的集合。

令 U 是一个非空集合, 称映射 μ: U → [0, 1] 为 U 的一个模糊子集^[1]。对于任意 x ∈ U, μ(x) 表示 x 隶属于模糊子集 μ 的程度。U 上的所有模糊子集所构成的集合记为 F(U)。模糊集的并、交、补运算的定义为: 对于任意 μ, ν ∈ F(U), x ∈ U, 有:

$$\begin{aligned} (\mu \cap \nu)(x) &= \mu(x) \wedge \nu(x) \\ (\mu \cup \nu)(x) &= \mu(x) \vee \nu(x) \\ \mu^c(x) &= 1 - \mu(x) \end{aligned}$$

如果对于任意 x ∈ U, 有 μ(x) ≤ ν(x), 那么称 μ 是 ν 的模糊子集, 记为 μ ⊆ ν。

Maji 等将模糊集理论与软集理论相结合, 提出了模糊软集的概念。

定义 2^[7] 如果 A ⊆ E, F: A → F(U) 为一个映射, 那么称(F, A)是论域 U 上模糊软集。

定义 3^[7] 设(F, A), (G, B) 是 U 上的模糊软集, 如果 A ⊆ B 且对于任意 e ∈ A, 有 F(e) ⊆ G(e), 则称(F, A)是(G, B)的模糊软子集, 记为(F, A) ⊆ (G, B)。

3 基于模糊软集的三 I 推理方法

目前, 基于模糊软集的不确定性推理研究比较少。Qin 等^[18]借助模糊推理的三 I 原则提出了关于 FSMP 模型的三 I 原则并给出了相应的三 I 推理方法。

定义 4^[20] 如果 ⊗: [0, 1]² → [0, 1] 满足结合律、交换律和 a ⊗ 1 = a, 并且当 a ≤ b 时, 有 a ⊗ c ≤ b ⊗ c, 那么称 ⊗ 是一个 t 模。

设 ⊗ 为 t 模。如果 a ⊗ ∨ {b_j; j ∈ J} = ∨ {a ⊗ b_j; j ∈ J} 对于任意 a, b_j ∈ [0, 1] 成立, 则称 ⊗ 是一个左连续的 t 模, 其中 J 是非空指标集。

定义 5^[21] 如果 →: [0, 1]² → [0, 1] 满足 0 → a = 1, a → 1 = 1 和 1 → 0 = 0, 并且当 a ≤ b 时, a → c ≥ b → c, 且 c → a ≤ c → b, 则称 → 是一个模糊蕴涵算子。

假设 ⊗ 是一个左连续 t 模, 对于任意 a, b ∈ [0, 1], 定义 →_⊗: [0, 1]² → [0, 1] 为:

$$a \rightarrow_{\otimes} b = \vee \{x \in [0, 1]; a \otimes x \leq b\}$$

则 →_⊗ 是模糊蕴涵算子, 并且满足^[22]:

- (I1) a →_⊗ b = 1 iff a ≤ b
- (I2) a ≤ b →_⊗ c iff b ≤ a →_⊗ c
- (I3) a →_⊗ (b →_⊗ c) = b →_⊗ (a →_⊗ c)
- (I4) 1 →_⊗ a = a
- (I5) a →_⊗ ∨ {b_i; i ∈ I} = ∨ {a →_⊗ b_i; i ∈ I}

$$(I6) \vee \{b_i; i \in I\} \rightarrow_{\otimes} a = \wedge \{b_i \rightarrow_{\otimes} a; i \in I\}$$

$$(I7) a \otimes b \leq c \text{ iff } a \leq b \rightarrow_{\otimes} c$$

本文主要考虑以下几个蕴涵算子^[22]:

$$a \rightarrow_{\otimes_L} b = (1 - a + b) \wedge 1,$$

$$a \rightarrow_{\otimes_G} b = \begin{cases} 1, & \text{if } a \leq b \\ b, & \text{if } a > b \end{cases}$$

$$a \rightarrow_{\otimes_0} b = \begin{cases} 1, & \text{if } a \leq b \\ (1 - a) \vee b, & \text{if } a > b \end{cases}$$

分别称它们为 Lukasiewicz 蕴涵算子、Gödel 蕴涵算子和 R₀ 蕴涵算子。

基于模糊软集的推理模型 FSMP^[18] 为:

$$\frac{(F, A) \rightarrow (G, B)}{(F^*, A)} \quad (1) \quad (G^*, B)$$

其中, (F, A), (F*, A) 和 (G, B), (G*, B) 分别是论域 U 和 V 上的模糊软集。

FSMP 三 I 原则^[18] 为: 式(1)的结论(G*, B)是满足下列条件的论域 V 上的最小模糊软集: 对于任意 α ∈ A, β ∈ B, x ∈ U, y ∈ V, 有:

$$(F(\alpha)(x) \rightarrow G(\beta)(y)) \rightarrow (F^*(\alpha)(x) \rightarrow G^*(\beta)(y)) = 1$$

定理 1^[18] 设 ⊗ 是一个左连续的 t 模, →_⊗ 是相应的模糊蕴涵算子, 那么式(1)的三 I 推理结论为: 对于任意 β ∈ B, y ∈ V, 有:

$$G^*(\beta)(y) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in U} F^*(\alpha)(x) \otimes (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes} G(\beta)(y))$$

推论 1^[18] 如果模糊蕴涵算子是 →_{⊗_L}, 那么关于式(1)的三 I 推理结论为: 对于任意 β ∈ B, y ∈ V, 有:

$$G^*(\beta)(y) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in E_{(a, \beta, y)}} F^*(\alpha)(x) \wedge (F^*(\alpha)(x) + G(\beta)(y) - F(\alpha)(x))$$

其中, E_(a, β, y) = {x ∈ U; F*(α)(x) > 0, F*(α)(x) + G(β)(y) - F(α)(x) > 0}。

推论 2^[18] 如果模糊蕴涵算子是 →_{⊗_G}, 那么关于式(1)的三 I 推理结论为: 对于任意 β ∈ B, y ∈ V, 有:

$$G^*(\beta)(y) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in U} F^*(\alpha)(x) \wedge (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y))$$

推论 3^[18] 如果模糊蕴涵算子是 →_{⊗_0}, 那么关于式(1)的三 I 推理结论为: 对于任意 β ∈ B, y ∈ V, 有:

$$G^*(\beta)(y) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in E_{(a, \beta, y)}} F^*(\alpha)(x) \wedge (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes_0} G(\beta)(y))$$

其中, E_(a, β, y) = {x ∈ U; F*(α)(x) + (F(α)(x) →_{⊗_0} G(β)(y)) > 1}。

4 基于 FSMP 的三 I 推理方法的性质

本节借助标准 Hamming 距离讨论基于 FSMP 的三 I 推理方法的性质。令(F, A), (F*, A) 是论域 U = {x₁, x₂, ..., x_m} 上的模糊软集, 其中 A = {α₁, α₂, ..., α_n}。模糊软集之间的距离可以通过标准 Hamming 距离进行计算^[23]:

$$|(F^*, A) - (F, A)| = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)|$$

可将基于模糊软集的推理方法看作一个映射 f: FS(U,

$E) \rightarrow FS(V, E')$, 即对于任意 (F^*, A) , 都有输出 $f((F^*, A)) = (G^*, B)$ 。其中, $FS(U, E), FS(V, E')$ 分别为论域 U 与 V 上所有模糊软集构成的集合。

定义 6 对于推理方法 f , 如果当 $(F^*, A) = (F, A)$ 时, 有 $f((F^*, A)) = (G, B)$, 那么称 f 是还原的。

若推理方法 f 满足还原性, 则 f 满足经典逻辑中的 MP 推理规则。

定义 7 假设 f 是一个推理方法。如果对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|(F_1^*, A) - (F_2^*, A)| < \delta$ 时, 有 $|f((F_1^*, A)) - f((F_2^*, A))| < \epsilon$, 那么 f 在 (F, A) 连续。

定义 8 假设 $(F, A), (F^*, A)$ 是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。称 $W((F^*, A), (F, A)) = \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)|$ 为 (F, A) 与 (F^*, A) 的逐点误差的最大值。

注: 如果 $W((F^*, A), (F, A)) = \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| < \epsilon$, 那么 $|(F^*, A) - (F, A)| < \epsilon$ 。

引理 1^[16] $|c_1 \wedge d - c_2 \wedge d| \leq |c_1 - c_2|$ 。

引理 2 如果 $(F, A), (F^*, A)$ 是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 那么

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \end{aligned}$$

证明: 事实上, 只需要证明:

$$\begin{aligned} & - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \end{aligned}$$

对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\alpha_{i_0} \in A, x_{j_0} \in U, \alpha_{i_1} \in A, x_{j_1} \in U$, 使得:

$$\begin{aligned} & F^*(\alpha_{i_0})(x_{j_0}) > \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \epsilon \\ & F(\alpha_{i_1})(x_{j_1}) > \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) - \epsilon \end{aligned}$$

因此有:

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \\ & < F^*(\alpha_{i_0})(x_{j_0}) + \epsilon - F(\alpha_{i_1})(x_{j_1}) \\ & \leq |F^*(\alpha_{i_0})(x_{j_0}) - F(\alpha_{i_1})(x_{j_1})| + \epsilon \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| + \epsilon \\ & \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \\ & > F^*(\alpha_{i_0})(x_{j_0}) - F(\alpha_{i_1})(x_{j_1}) - \epsilon \\ & \geq -|F^*(\alpha_{i_0})(x_{j_0}) - F(\alpha_{i_1})(x_{j_1})| - \epsilon \\ & \geq - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| - \epsilon \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知:

$$\begin{aligned} & - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \end{aligned}$$

从而有:

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \end{aligned}$$

引理 3 如果 $(F, A), (F^*, A)$ 是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, 那么对于任意 $E_1, E_2 \subseteq U$, 有:

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_1} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_2} F(\alpha_i)(x_j) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_1 \cup E_2} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \end{aligned}$$

证明: 令

$$\begin{aligned} F^*(\alpha_i)(x_j) &= \begin{cases} F^*(\alpha_i)(x_j), & x_j \in E_1 \\ 0, & x_j \in E_2 \setminus E_1 \end{cases} \\ F(\alpha_i)(x_j) &= \begin{cases} F(\alpha_i)(x_j), & x_j \in E_2 \\ 0, & x_j \in E_1 \setminus E_2 \end{cases} \end{aligned}$$

由引理 2 可得:

$$\begin{aligned} & \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_1} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_2} F(\alpha_i)(x_j) \right| \\ & = \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_1 \cup E_2} F^*(\alpha_i)(x_j) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_1 \cup E_2} F(\alpha_i)(x_j) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_1 \cup E_2} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \end{aligned}$$

4.1 基于 FSMP 的三 I 推理方法的还原性

定理 2 设 $(F, A), (F^*, A)$ 和 $(G, B), (G^*, B)$ 分别是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 V 上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。如果存在 $\alpha_i \in A$, 使得 $F(\alpha_i)$ 是正规模糊集, 那么对于左连续 t 模 \otimes 诱导的蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes} , FSMP 三 I 推理方法是还原的。

证明: 假设 $(F^*, A) = (F, A)$, 存在 $\alpha_0 \in A, x_0 \in U$ 使得 $F(\alpha_0)(x_0) = 1$ 。对于任意的 $\beta \in B, y \in V$, 由定理 1 和 (I4) 可得:

$$\begin{aligned} G^*(\beta)(y) & \geq F^*(\alpha_0)(x_0) \otimes (F(\alpha_0)(x_0) \rightarrow_{\otimes} G(\beta)(y)) \\ & = 1 \otimes (1 \rightarrow_{\otimes} G(\beta)(y)) \\ & = 1 \otimes G(\beta)(y) \\ & = G(\beta)(y) \end{aligned}$$

另一方面, 由 (I7) 可知:

$$F(\alpha)(x) \otimes (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes} G(\beta)(y)) \leq G(\beta)(y)$$

成立。因此,

$$\begin{aligned} G^*(\beta)(y) & = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in U} F^*(\alpha)(x) \otimes (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes} G(\beta)(y)) \\ & \leq G(\beta)(y) \end{aligned}$$

对于任意 $\beta \in B, y \in V$, 有 $G^*(\beta)(y) = G(\beta)(y)$ 。故有 $(G^*, B) = (G, B)$, 即对于蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes} , FSMP 三 I 推理方法是还原的。

推论 4 设 $(F, A), (F^*, A)$ 和 $(G, B), (G^*, B)$ 分别是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 V 上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。如果存在 $\alpha_i \in A$, 使得 $F(\alpha_i)$ 是正规模糊子集, 那么对于蕴涵算子 $\rightarrow_{\otimes_L}, \rightarrow_{\otimes_0}$ 和 \rightarrow_{\otimes_G} , FSMP 三 I 推理方法是还原的。

4.2 基于 FSMP 的三 I 推理方法的连续性

三 I 推理方法是否具有连续性与蕴涵算子的选择有密切关系。本节针对 R_0 算子, Lukasiewicz 算子以及 Gödel 算子, 讨论三 I 推理方法的连续性并刻画其逐点误差的最大值。

定理 3 设 $(F, A), (F^*, A)$ 和 $(G, B), (G^*, B)$ 分别是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 V 上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。对于蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes_L} 和 \rightarrow_{\otimes_0} , FSMP 三 I 推理方法在 (F, A) 连续。

证明: 仅对蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes_0} 进行讨论, 关于 \rightarrow_{\otimes_L} 的证明类

似。假设:

$$f(F^*(\alpha))(y) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in E_{(a,\beta,y)}} F^*(\alpha)(x) \wedge (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes_0} G(\beta)(y))$$

其中, $E_{(a,\beta,y)} = \{x \in U; F^*(\alpha)(x) + (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes_0} G(\beta)(y)) > 1\}$ 。

对于任意 $\epsilon > 0$, 令 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 当 $|f(F^*, A) - f(F, A)| = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m$

$|F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| < \delta$ 时, 由引理 1 和引理 3 可得:

$$\begin{aligned} & |f((F^*, A)) - f((F, A))| \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_{F^*(\alpha_i)}(a,\beta,y)} F^*(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_0} G(\beta)(y)) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_{F(\alpha_i)}(a,\beta,y)} F(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_0} G(\beta)(y)) \right| \\ &\leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in E_{F^*(\alpha_i)}(a,\beta,y) \cup E_{F(\alpha_i)}(a,\beta,y)} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \\ &\leq \delta < \epsilon \end{aligned}$$

因此, 对于蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes_0} , FSMP 三 I 推理方法在 (F, A) 连续。

定理 4 设 $(F, A), (F^*, A)$ 和 $(G, B), (G^*, B)$ 分别是论域 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 和 V 上的模糊软集, 其中 $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 。对于蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes_G} , FSMP 三 I 推理方法在 (F, A) 上连续。

证明: 假设

$$f(F^*(\alpha))(y) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x \in U} F^*(\alpha)(x) \wedge (F(\alpha)(x) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y))$$

对于 $\epsilon > 0$, 令 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, 当 $|f(F^*, A) - f(F, A)| = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| < \delta$ 时, 通过引理 1 和引理 2, 可得:

$$\begin{aligned} & |f((F^*, A)) - f((F, A))| \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y)) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y)) \right| \\ &\leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \\ &\leq \delta < \epsilon \end{aligned}$$

因此, 对于蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes_G} , FSMP 的三 I 方法在 (F, A) 是连续的。

定理 5 假设 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, (F, A) \rightarrow (G, B)$ 是给出的规则。对于蕴涵算子 $\rightarrow_{\otimes_G}, \rightarrow_{\otimes_L}$ 和 \rightarrow_{\otimes_0} , 如果 (F, A) 和 (F^*, A) 的逐点误差的最大值小于 ϵ , 那么 $f((F^*, A))$ 和 $f((F, A))$ 的逐点误差的最大值小于 ϵ 。

证明: 仅对蕴涵算子 \rightarrow_{\otimes_G} 进行讨论, 其他蕴涵算子的证明类似。

当 $W((F^*, A), (F, A)) = \sup_{\alpha \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| < \epsilon$ 时, $f((F^*, A))$ 和 $f((F, A))$ 的误差满足:

$$\begin{aligned} & |f((F^*, A)) - f((F, A))| \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y)) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y)) \right| \\ &\leq \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

$f((F^*, A))$ 和 $f((F, A))$ 的逐点误差的最大值满足:

$$\begin{aligned} & W(f((F^*, A)), f((F, A))) \\ &= \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{y \in V} |f(F^*(\alpha_i))(y) - f(F(\alpha_i))(y)| \\ &= \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{y \in V} \left| \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F^*(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y)) - \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} F(\alpha_i)(x_j) \wedge (F(\alpha_i)(x_j) \rightarrow_{\otimes_G} G(\beta)(y)) \right| \\ &\leq \sup_{y \in V} \sup_{\alpha_i \in A} \sup_{x_j \in U} |F^*(\alpha_i)(x_j) - F(\alpha_i)(x_j)| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

结束语 本文研究了 FSMP 的三 I 推理方法的还原性和连续性。针对左连续 t 模诱导的模糊蕴涵算子, 给出了 FSMP 三 I 推理方法满足还原性的条件, 并证明了对于蕴涵算子 $\rightarrow_{\otimes_G}, \rightarrow_{\otimes_L}$ 和 \rightarrow_{\otimes_0} , FSMP 三 I 推理方法是连续的。针对 FSMT 模型的相关讨论将另文详述。

参 考 文 献

- [1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [2] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computing and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.
- [3] MOLODTSOV D. Soft set theory-first results [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1999, 37(4): 19-31.
- [4] MAJI P K, BISWAS R, ROY A R. Soft set theory [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2003, 45(4): 555-562.
- [5] ALI M I, FENG F, LIU X, et al. On some new operations in soft set theory [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57(9): 1547-1553.
- [6] QIN K Y, HONG Z Y. On soft equality [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234(5): 1347-1355.
- [7] MAJI P K, BISWAS R, ROY A R. Fuzzy soft sets [J]. The Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3): 589-602.
- [8] MAJUMDAR P, SAMANTA S K. Generalised fuzzy soft sets [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(4): 1421-1432.
- [9] MAJI P K, BISWAS R, ROY A R. Intuitionistic fuzzy soft sets [J]. The Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3): 677-692.
- [10] MAJI P K, ROY A R, BISWAS R. On intuitionistic fuzzy soft sets [J]. The Journal of Fuzzy Mathematics, 2004, 12(3): 669-683.
- [11] ZADEH L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes [J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.
- [12] WANG G J. Full implicational triple I method for fuzzy reasoning [J]. Science in China E, 1999, 29(1): 43-53. (in Chinese)

- 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑), 1999, 29(1): 43-53.
- [13] WANG G J. Triple I method and interval valued fuzzy reasoning [J]. Science in China E, 2000, 43(3): 202-213. (in Chinese)
王国俊. 三 I 方法和区间值模糊推理[J]. 中国科学(E 辑), 2000, 43(3): 202-213.
- [14] SONG S, FENG C, LEE E S. Triple I Method of Fuzzy Reasoning [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 44(12): 1567-1579.
- [15] HOU J, YUAN F, MI H H. Consistency, Continuity and Approximation properties of CRI algorithm and Triple I method [C] // Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2008: 220-220.
- [16] XU W H, XIE Z K, YANG J Y, et al. Continuity and Approximation Properties of Two Classes of Algorithms for Fuzzy Inference[J]. Journal of Software, 2004, 15(10): 1485-1492. (in Chinese)
徐蔚鸿, 谢中科, 杨静宇, 等. 两类模糊推理算法的连续性和逼近性[J]. 软件学报, 2004, 15(10): 1485-1492.
- [17] LIU H W, WANG G J. Continuity of triple I methods based on several implications [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(8): 2079-2087.
- [18] QIN K Y, YANG J L, LIU Z C. A fuzzy soft set based approximate reasoning method [J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2017, 32(1): 831-839.
- [19] DUBOIS D, PRADE H. Fuzzy sets in approximate reasoning [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40(1): 143-244.
- [20] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular Norms [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [21] YAGER R R. On some new classes of implication operators and their role in approximate reasoning [J]. Information Sciences, 2004, 167(1): 193-216.
- [22] WANG G J, FU L. Unified forms of triple I method [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49(5): 919-932.
- [23] ZHENG W N. Uncertainty measures of fuzzy soft sets[D]. Shanxi: Shanxi Normal University, 2014. (in Chinese)
郑伟楠. 模糊软集的不确定度量[D]. 山西: 山西师范大学, 2014.
- (上接第 184 页)
- [5] YE L, KEOGH E. Time series shapelets: a new primitive for data mining[C] // Proceedings of the 15th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2009: 947-956.
- [6] HILLS J, LINES J, BARANAUSKAS E, et al. Classification of time series by shapelet transformation [J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 2014, 28(4): 851-881.
- [7] GRABOCKA J, SCHILLING N, WISTUBA M, et al. Learning time-series shapelets[C] // Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2014: 392-401.
- [8] HOU L, ZURADA J M, ZURADA J M. Efficient learning of timeseries shapelets[C] // Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press, 2016: 1209-1215.
- [9] MUEEN A, KEOGH E, YOUNG N. Logical-shapelets: an expressive primitive for time series classification [C] // ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2011: 1154-1162.
- [10] WISTUBA M, GRABOCKA J, SCHMIDT-THIEME L. Ultrafast shapelets for time series classification [J]. arXiv preprint arXiv:1503.05018, 2015.
- [11] LIU J, YUAN L, YE J. An efficient algorithm for a class of fused lasso problems[C] // ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2010: 323-332.
- [12] YOON H, YANG K, SHAHABI C. Feature subset selection and feature ranking for multivariate time series [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 2005, 17(9): 1186-1198.
- [13] LI C, KHAN L, PRABHAKARAN B. Real-time classification of variable length multi-attribute motions [J]. Knowledge and Information Systems, 2006, 10(2): 163-183.
- [14] LI C, KHAN L, PRABHAKARAN B. Feature Selection for Classification of Variable Length Multiattribute Motions [M]. Springer-Verlag New York, Inc, 2006.
- [15] HE G, DUAN Y, PENG R, et al. Early classification on multivariate time series [J]. Neurocomputing, 2015, 149(PB): 777-787.
- [16] LI H. Accurate and efficient classification based on common principal components analysis for multivariate time series [J]. Neurocomputing, 2016, 171(C): 744-753.
- [17] GÓRECKI T, ŁUCZAK M. Multivariate time series classification with parametric derivative dynamic time warping [J]. Expert Systems with Applications, 2015, 42(5): 2305-2312.
- [18] MUEEN A, KEOGH E, YOUNG N. Logical-shapelets: an expressive primitive for time series classification [C] // Proceedings of the 17th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. ACM, 2011: 1154-1162.
- [19] GHALWASH M F, OBRADOVIC Z. Early classification of multivariate temporal observations by extraction of interpretable shapelets [J]. BMC Bioinformatics, 2012, 13(1): 195.
- [20] RAKTHANMANON T, KEOGH E. Fast shapelets: A scalable algorithm for discovering time series shapelets [C] // Proceedings of the 2013 SIAM International Conference on Data Mining. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013: 668-676.
- [21] DIETTERICH T G, KONG E B. Machine learning bias, statistical bias, and statistical variance of decision tree algorithms [R]. Technical report, Department of Computer Science, Oregon State University, 1995.
- [22] FRIEDMAN J, HASTIE T, HÖFLING H, et al. Pathwise coordinate optimization [J]. Annals of Applied Statistics, 2007, 1(2): 302-332.
- [23] ROSE D J. An algorithm for solving a special class of tridiagonal systems of linear equations [J]. Communications of the Acm, 1969, 12(12): 234-236.
- [24] BAUER E, KOHAVIR. An empirical comparison of voting classification algorithms: Bagging, boosting, and variants [J]. Machine Learning, 1999, 36(1): 105-139.