带两个参数的拟 Bézier 曲线

葸海英 张贵仓
(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)

摘 要 文章主要将 Bernstein 基函数中的变量 u 用函数 $f(u)$ 代替，将 Bernstein 基函数进行了推广，生成了新的 Bézier 曲线，称为拟 Bézier 曲线。讨论了基函数及其生成的曲线的构造和性质。这种拟 Bézier 曲线不仅有 Bézier 曲线的优良性质，而且还产生了一些新的特性，如通过调节因子 λ 的值可以改变拟 Bézier 曲线的次数[1]，同时拟 Bézier 曲线也可以通过类似的 De Casteljau 算法来实现拟 De Casteljau 算法的几何作图法。但不同的是，对相同参数 u，Bézier 曲线与拟 Bézier 曲线所对应的点 V_i 的位置不同。最后讨论了曲线间的拼接问题，其在应用中有一定的研究价值。

关键词 Berntien 基函数，Bézier 曲线，拟 Bézier 曲线，G^2 光滑拼接，调节参数
中图法分类号 TP391 **文献标识码** A

Similar Bézier Curves with Two Shape Parameters

XI Hai-ying ZHANG Gui-cang
(College of Mathematics and Statistics ScienceNorthwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract The paper generalized the Bernstein Bases replacing the variable of u by the function $f(u)$. The structure and quality of the new basis were analyzed. This new curve using this bases not only possesses all of the characters of Bézier curve but also produces some advantages. For example, the curve's degree can easily be changed by adjusting factor, but u do not changes the shape of the curve, and the position for Bezier curve and the proposed Bézier curve to correspond to the points on the curve is different. Finally, the continuity condition of the curve was also discussed. This bases and curve have some study value.

Keywords Bernstein Base, Bézier curve, Similar Bézier curve, G^2 continuity, Adjust control parameters

1 引言

Bézier 曲线由于具有良好的几何性质，能很好地表达自由曲线曲面，因此在 CAD 几何造型中得到了广泛的应用[2-4]。但随着曲线和曲面研究的深入和发展，人们又提出了许多 Bézier 曲线的扩展。如文献[5-7]中研究了不同次数的 Bézier 曲线的扩展，通过增加基函数的次数，利用给基函数加入控制参数构造调配函数的方法，得到了带形状参数的 Bezier 曲线曲面，分析了它们的几何性质及拼接问题；文献[8-9]通过添加参数，对四次 Bézier 做了不同形式的扩展；文献[10]对类 Bézier 曲线进了研究；文献[11]对 Bernstein 多项式进行了推广，将 Berntien 基函数中的次数由正数推广到负数，且讨论了由该基函数所生成的曲线。这些曲线的出现，有利于自由曲线和曲面的设计。

本文主要将 Bernstein 基函数中的变量 u 用函数 $f(u)$ 代替，将 Bernstein 基函数进行了推广，使其生成了新的 Bernstein 基函数，称为拟 Bernstein 基函数，由拟 Bernstein 基函数生成的曲线称为拟 Bézier 曲线，这种新的曲线不仅具有 Bézier 曲线的所有性质，而且能产生一些优良的特性，如通过调节因子 λ 的值可以改变拟 Bézier 曲线的次数，调节参数 u 的值不改变曲线的形状，但对于相同的 u，Bézier 曲线与拟 Bézier 曲线所对应的曲线上的点不同，使得拟 Bézier 曲线拼接时具有更大的优越性。

2 拟 Bernstein 基函数的构造及性质

当 $u\in[0,1]$ 时，$P(u)=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(u)\cdot V_i$ 为 Bézier 曲线，其中 V_i 为控制多边形的顶点，$B_{i,n}(u)=C_n^i(1-u)^{n-i}u^i$ 是 Bernstein 基函数。

2.1 拟 Bernstein 基函数的构造

令 $f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\lambda}+u}{t}$，$\lambda>0$，$t\geqslant 2$ 且 $t\in N^+$，则 $f(u)$ 是关于 u 的连续函数。用函数 $f(u)$ 代替变量 u，则 Bernstein 基函数可被推广为 $B_{i,n}(f(u))=C_n^i(1-f(u))^{n-i}f(u)^i$，由该基函数构成的曲线为 $P(u)=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(f(u))\cdot V_i$。

称 $B_{i,n}(f(u))$ 为拟 Bernstein 基函数，以 $B_{i,n}(f(u))$ 为基函数的曲线为拟 Bézier 曲线，其中当 $\lambda=1$ 时，拟 Bézier 退化为 Bézier 曲线。

本文受甘肃省自然科学基金(0803RJZA109)资助。
葸海英(1987－)，女，硕士，主要研究方向为计算机辅助几何设计；张贵仓(1964－)，男，博士，教授，主要研究方向为计算机辅助几何设计、图形学、数字水印等，E-mail：13893226578@163.com。

2.2 拟 Bernstein 基函数的性质

拟 Bernstein 基函数拥有与 Bernstein 基函数相类似的性质：

性质 1(非负性) $B_{i,n}(f(u))\geqslant 0$

由于 $f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\lambda}+u}{t}$ 在 $u\in[0,1]$ 时，$0\leqslant f(u)\leqslant 1$，因此可以保证拟 Bernstein 基函数的非负性。

性质 2(权性) $\sum\limits_{i=0}^{n}B_{i,n}(f(u))\equiv 1,u\in[0,1]$。

性质 3(对称性) $B_{i,n}(f(u))=B_{n-i,n}(1-f(u)),i=0,1,\cdots,n$

性质 4(递推性)：

$B_{i,n}(f(u))=(1-f(u))B_{i,n-1}(f(u))+f(u)B_{i-1,n-1}(f(u))$

性质 5(导函数)：

$B'_{i,n}f(u)$

$=n\cdot f'(u)\cdot[B_{i-1,n-1}(f(u))-B_{i,n-1}(f(u))]$

3 拟 Bézier 曲线的性质

拟 Bézier 曲线具有以下的性质：

性质 6(端点性质)

由 $f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\lambda}+u}{t}$，可以推出 $f(0)=0,f(1)=1$，

因此在端点处 $\begin{cases}P(0)=V_0\\P(1)=V_n\end{cases}$

即拟 Bezier 曲线自首端点 V_0 开始，到末端点 V_n 结束。

一阶导数

$\begin{cases}P'(0)=n\cdot f'(0)\cdot(V_1-V_0)\\P'(1)=n\cdot f'(1)\cdot(V_n-V_{n-1})\end{cases}$

由 $f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\alpha}+u}{t}$，可以计算出 $f'(0)=\dfrac{1}{t}$，$f'(1)=\dfrac{(t-1)\alpha+1}{t}$。

当 $\alpha\neq\dfrac{1}{t-1}$ 时，$f'(1)$ 为非零的常数，所以拟 Bézier 曲线和特征多边形的首端和末端相切。

二阶导数

在端点处：

$P''(0)=n\cdot f''(0)(V_1-V_0)+$

$n(n-1)f'(0)(V_2-2V_1+V_0)$

$P''(1)=n\cdot f''(1)(V_n-V_{n-1})+n(n-1)f'(1)(V_n-2V_{n-1}+V_{n-2})$

对于替换函数 $f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\alpha}+u}{t}$，可得出 $f''(0)=0$，$f''(1)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)(t-1)}{t}$。

r 阶导函数

n 次拟 Bézier 曲线的 r 阶导函数为：

$$P^{r}(u)=\sum_{i=1}^{r}C_{r-1}^{i-1}f^{r-i+1}(u)\cdot\frac{d^{i}c(u)}{dt^{i}}$$

其中，$f^{r-i}(u)$ 为 $f(u)$ 的 $r-i$ 阶导数，$\dfrac{d^{i}c(u)}{du^{i}}$ 为在相同的控制点较多时形成的 n 次 Bézier 曲线的 r 阶导函数。

性质 7(对称性) 由于 $B_{i,n}(f(u))=B_{n-i,n}(1-f(u)),i=0,1,\cdots,n$，即将特征多边形的顺序取反，因此它表示的是同一条曲线，只是曲线的方向相反。

性质 8(凸包性) 由拟 Berntein 多项式的非负性及权性，即 $\sum\limits_{i=0}^{n}B_{i,n}(f(u))\geqslant 0,\sum\limits_{i=0}^{n}B_{i,n}(f(u))\equiv 1,u\in[0,1]$，可以证得拟 Bézier 曲线具有凸包性。

性质 9(几何不变性) 曲线仅取决于控制顶点而与坐标系的位置无关，即曲线在坐标平移和旋转后它的形状保持不变。

性质 10(拟 Bézier 曲线离散生成算法) 对于 Bézier 曲线，我们可以通过 De Casteljau 算法来产生 Bézier 曲线上的点。对拟 Bézier 曲线，给定空间中的 $n+1$ 个点 $V_i(i=0,1,\cdots n)$ 及参数 u，有：

$V_i^r(u)=(1-f(u))V_i^{r-1}(u)+f(u)V_{i+1}^{r-1}(u)$

$r=1,2,\cdots,n,i=0,1,\cdots,r,u\in[0,1]$

其中，$V_i^0(u)$ 即为 V_i，V_0^r 即是在曲线上具有参数 u 的点，这说明拟 Bézier 曲线也可以通过类似的 De Casteljau 算法来实现拟 De Casteljau 算法的几何作图法。但不同的是对相同参数 u，Bézier 曲线与拟 Bézier 曲线所对应的点 V_i 不同。如图 1、图 2 所示，当 $u=\dfrac{1}{2}$ 时，对 Bézier 曲线(即此时 $t=2,\alpha=1$)用离散生成算法可以得到 $P(\dfrac{1}{2})$ 在每条线段的中点处；而对拟 Bézier 曲线，在 $f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\alpha}+u}{t}$ 中取 $t=3,\alpha=2$ 时，点 $P(\dfrac{1}{2})$ 在每条线段的 $\dfrac{1}{3}$ 处(此时 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{3}$)。

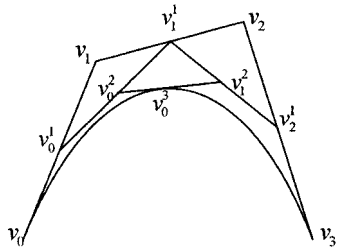

图 1 由 $V_0V_1V_2V_3$ 构成的 Bézier 曲线

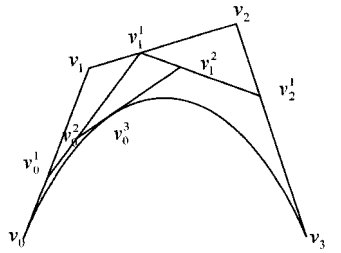

图 2 相应的拟 Bézier 曲线

性质 11(拟 Bézier 曲线的特性)

拟 Bézier 曲线不仅包括 Bézier 曲线的几乎所有优良的性质，它本身还拥有一些特性。

对拟 Bézier 曲线，$P(u)=\sum\limits_{i=0}^{n}V_i\cdot C_n^i(1-f(u))^{n-i}f(u)^i$，

$f(u)=\dfrac{(t-1)u^{\lambda}+u}{t},u\in[0,1],t\geqslant 2$ 且 $t\in N^+$。

其曲线的次数不仅仅由控制顶点决定，还可以由调节因子 λ 来确定。要使得曲线的次数为 l，只要满足 $n\lambda=l$，调节因子取 $\lambda=\dfrac{l}{n}$ 即可。

4 两条拟 Bézier 曲线的拼接

曲线拼接时要达到位置连续、一阶连续、二阶连续和曲率连续，这与曲线的次数有关，拟 Bézier 曲线的次数由于调节因子的调节，以及参数 u 的改变使得曲线拼接时有了更大的自由度和灵活性。

设由 m 个控制顶点构成的拟 Bézier 曲线 $P(u)=\sum_{i=0}^{m}V_i\cdot B_{i,n}(f(u))$，其中 $f(u)=\frac{(t_1-1)u^{\lambda_1}+u}{t_1}$，$t_1\geqslant 2$ 且 $t_1\in N^+$；由 n 个控制顶点所构成的拟 Bézier 曲线 $Q(u)=\sum_{i=0}^{n}W_i\cdot B_{i,n}(g(u))$，其中 $g(u)=\frac{(t_2-1)u^{\lambda_2}+u}{t_2}$ $t_2\geqslant 2$ 且 $t_2\in N^+$。

4.1 G^0 光滑拼接

定理 1 两条拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 的 G^0 光滑拼接的充要条件是 $V_n=W_0$。

证明：两条 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 的 G^0 光滑拼接的充要条件是 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 具有公共连接点，即 $P(1)=Q(0)$。

由于 $g(0)=0$，$f(1)=1$ 且

$$P(1)=\sum_{i=0}^{m}V_i\cdot B_{i,n}(f(1))$$

$$Q(0)=\sum_{i=0}^{n}W_i\cdot B_{i,n}(g(0))$$

因此拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 的 G^0 光滑拼接的充要条件是 $V_n=W_0$。

4.2 G^1 的光滑拼接

定理 2 两条拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 满足以下条件：

(1)$V_n=W_0$；

(2)存在 $\lambda>0$，使得

$$W_1-W_2=\frac{\alpha mk_2}{nk_1}[\lambda_1(k_1-1)+1]\cdot(V_m-V_{m-1})$$

则拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 在公共连接点处 G^1 光滑拼接。

证明：在末端处 $P(u)$ 的一阶导数为

$$P'(1)=m\cdot f'(1)\cdot(V_m-V_{m-1}) \tag{1}$$

在首端处 $Q(u)$ 的一阶导数为

$$Q'(0)=n\cdot g'(0)\cdot(W_1-W_0) \tag{2}$$

并且 $f'(1)=\frac{\lambda(t_1-1)+1}{t_1}$，$g'(0)=\frac{1}{t_2}$。

由于要使得拼接时达到一阶连续，因此 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 在连接处的切矢方向必须相同，即：$Q'(0)=\alpha P'(1)$，其中 α 为一正常数。

将式(1)、式(2)代入上式中，得到 $W_1-W_2=\frac{\alpha mk_2}{nk_1}[\lambda_1(k_1-1)+1]\cdot(V_m-V_{m-1})$，则拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 在公共连接点处 G^1 光滑拼接，即 W_1,W_2,V_m,V_{m-1} 4 点共线。

当 $t=2,\lambda=3$ 时两条拟 Bézier 曲线的 G^1 光滑拼接如图 3 所示。

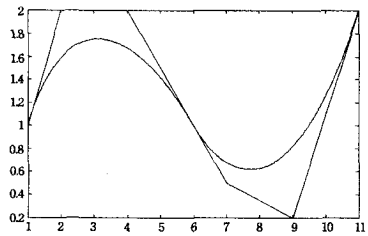

图 3 当 $t=2,\lambda=3$ 时两条拟 Bézier 曲线的 G^1 光滑拼接图

4.3 G^2 光滑拼接

定理 3 在满足 G^1 连续的条件下，如果满足式(3)、(4)，则拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 在公共连接点处 G^2 光滑拼接。

$$\left\{\frac{m\lambda_1(\lambda_1-1)(t_1-1)}{t_1}+\frac{m\lambda_1(m-1)(t_1-1)}{t_1}+\frac{m(m-1)}{t_1}\right\}(V_m-V_{m-1})-\frac{m(m-1)}{t_1}[\lambda_1(t_1-1)+1](V_{m-1}-V_{m-2})=\frac{\beta n(n-1)}{t_2}[(W_2-W_1)-(W_1-W_0)] \tag{3}$$

$$\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-1)}=\frac{mt_2(n-1)(t_1-1)}{nt_1(m-1)}\cdot\frac{|W_0W_1\times W_1W_2|}{|W_0W_1|}\cdot\frac{|V_{m-1}V_m|}{|V_{m-2}V_{m-1}\times V_{m-1}V_m|} \tag{4}$$

证明：两曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 在公共点处实现 G^2 光滑拼接，即要求曲率矢连续，即除了满足 G^1 条件外，还需要满足：(1)副法矢方向相同；(2)曲率相等。

当要求达到二阶连续时，两者在连接处的副法矢必须相同，即必须满足：

$$P''(1)=\beta\cdot Q'(0)(\beta\text{为一个正常数}) \tag{5}$$

计算得到拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 在拼接处的二阶导矢 $P''(1)$ 和 $Q'(0)$：

$$P''(1)=mf''(1)(V_m-V_{m-1}))+m(m-1)f'(1)(V_m-2V_{m-1}+V_{m-2}) \tag{6}$$

$$Q'(0)=ng''(0)(W_1-W_0)+n(n-1)g'(0)(W_2-2W_1+W_0) \tag{7}$$

将式(6)、式(7)代入式(5)中得：

$$mf''(1)(V_m-V_{m-1})+m(m-1)f'(1)(V_m-2V_{m-1}+V_{m-2})=\beta[ng''(0)(W_1-W_0)+n(n-1)g'(0)(W_2-2W_1+W_0)] \tag{8}$$

对于 $f(u)=\frac{(t_1-1)u^{\lambda_1}+u}{t_1}$ 和 $g(u)=\frac{(t_2-1)u^{\lambda_2}+u}{t_2}$ 可以得到 $f'(1)=\frac{\lambda_1(t_1-1)+1}{t_1}$，$f''(1)=\frac{\lambda_1(\lambda_1-1)(t_1-1)}{t_1}$，$g'(0)=\frac{1}{t_2}$，$g''(0)=0$，将其代入到式(8)化简得到两拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 拼接时二阶连续的条件为：

$$\left\{\frac{m\lambda_1(\lambda_1-1)(t_1-1)}{t_1}+\frac{m\lambda_1(m-1)(t_1-1)}{t_1}+\frac{m(m-1)}{t_1}\right\}(V_m-V_{m-1})-\frac{m(m-1)}{t_1}[\lambda_1(t_1-1)+1](V_{m-1}-V_{m-2})=\frac{\beta n(n-1)}{t_2}[(W_2-W_1)-(W_1-W_0)] \tag{9}$$

当要求曲率连续时，则 $Q'(0)$，$Q'(0)$，$P'(1)$，$P''(1)$ 4 者应满足下列关系：

$$\frac{|Q'(0)\times Q'(0)|}{|Q'(0)|^3}=\frac{|P'(1)\times P''(1)|}{|P'(1)|^3} \tag{10}$$

对拟 Bézier 曲线 $P(u)$ 与 $Q(u)$ 计算得端点的曲率为：

$$k_1(1)=\frac{|P'(1)\times P''(1)|}{|P'(1)|^3}=\frac{(m-1)|V_{m-2}V_{m-1}\times V_{m-1}V_m|}{m\cdot f'(1)|V_{m-1}V_m|^3}$$

$$k_2(0)=\frac{|Q'(0)\times Q'(0)|}{|Q'(0)|^3}=\frac{(n-1)|W_0W_1\times W_1W_2|}{n\cdot g'(0)|W_0W_1|}$$

(下转第 122 页)

表 1　网络图像标注结果示例

草坪，花园，人群，桌子，吃饭	房屋，旅馆，树木，楼房，爱情
湖泊，公园，树木 海滩，轮船	火车，树木，山林 马路，天空

结束语　本文提出了一种基于内容检索的图像自动标注方法，即通过挖掘相似图像的标注信息来获得待标注图像的标注结果。本文算法包含了两个关键技术，分别是在基于内容检索时提出的基于 MSF 的图像全局特征，另一个则是在进行标注信息重排序时提出的基于随机漫步算法。本文提出的标注算法具有良好的稳定性和可扩展性，不需要做漫长的训练及其他先验知识，并且参考图像的数据库越大，本文算法的标注结果准确率越高。实验结果充分表明了本文算法的有效性。在下一步的工作中，我们将进一步研究如何将局部特征引入图像检索阶段以提高检索准确率，并同时保证检索速度的快速性。

参 考 文 献

[1] Chang E, Goh K, Sychay G, et al. CBSA: content-base soft annotation for multimodal image retrieval using bayes point machines [C]// Proc. CVPR. 2004

[2] Cusano C, Ciocca G, Schettini R. Image annotation using SVM [C]// Proc. Internet imaging. 2004: 330-338

[3] Carneiro G, Vasconcelos N. A database centric view of semantic image annotation and retrieval [C]// Proc. ACM SIGIR. 2005: 559-566

[4] Mori Y, Takahashi H, Oka R. Image-to-word transformation based on dividing and vector quantizing images with words [C]// MISRM. 1999

[5] Barnard P D, de Freitas J F G, Forsyth D A. Object recognition as machine translation: learning a lexicon for a fixed image vocabulary [C]// Proc. ECCV. 2002: 97-112

[6] Blei D M, Jordan M I. Modeling annotated data [C]// Proc. ACM SIGIR. 2003: 127-134

[7] Yossi R, CAarlo T, Leonidas J G. The Earth Mover's Distance as a Metric for Image Retrieval [C]// Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Computer Vision. Bombay, India, 2000: 59-66

[8] Tong H H, Faloutsos C, Pan J Y. Fast Random Walk with Restart and Its Applications [C]// Proc. ACM SIGKDD. 2006

[9] Barnard P D, de Freitas J F G, Forsyth D A. Object recognition as machine translation: learning a lexicon for a fixed image vocabulary [C]// Proc. ECCV. 2002: 97-112

（上接第 102 页）

将上面两式代入式(9)化简得到两拟 Bézier 曲线拼接时曲率连续的条件为：

$$\frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-1)}=\frac{mt_2(n-1)(t_1-1)}{nt_1(m-1)}\cdot\frac{|W_0W_1\times W_1W_2|}{|W_0W_1|}\cdot\frac{|V_{m-1}V_m|}{|V_{m-2}V_{m-1}\times V_{m-1}V_m|}$$

当 $t=2$，$\lambda=3$ 时两条拟 Bézier 曲线的 G^2 光滑拼接图如图 4 所示。

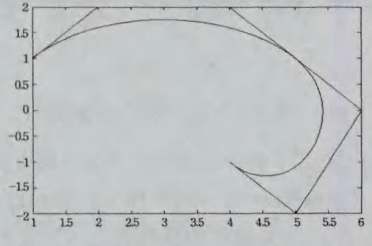

图 4　当 $t=2$，$\lambda=3$ 时两条拟 Bézier 曲线的 G^2 光滑拼接图

由上述定理可知，当拟 Bézier 曲线拼接时由于有调节因子 λ 以及参数 t 的调节可能很好地达到一阶、二阶连续和曲率的连续，使得拼接时有更大的优越性。

结束语　本文主要将 Bernstein 基函数中的变量 u 用函数 $f(u)=\frac{(t-1)u^{\lambda}+u}{t}$ 代替，将 Bernstein 基函数进行了推广，使其生成了新的拟 Bernstein 基函数和拟 Bézier 曲线；并且讨论了拟 Bernstein 基函数的构造和性质以及拟 Bézier 曲线的一些特性，也讨论了两条拟 Bézier 曲线的拼接。

基函数的构造法可以用在曲线中，还可以应用在曲面中，有关这一方面的内容还需要进一步的研究。

参 考 文 献

[1] 李重，黄敏，韩丹夫. Bernstein 多项式推广及其所生成的拟 Bezier 曲线[J]. 计算机工程与应运，2003(2)：15-17

[2] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术[M]. 北京：科学出版社，2000

[3] 苏步青，刘鼎元. 计算几何[M]. 上海：上海科学技术出版社，1981

[4] 刘根洪，何仁杰. 微分几何与计算几何[M]. 成都：四川大学出版社，2000

[5] 韩旭里，刘圣军. 二次 Bezier 曲线的扩展[J]. 中南工业大学学报：自然科学版，2003(2)

[6] 吴晓勤，韩旭里. 三次 Bezier 曲线的扩展[J]. 工程图学学报，2005，26(6)：98-102

[7] 吴晓勤. 带形状参数的 Bezier 曲线[J]. 中国图象图形学报，2006，11(2)：269-274

[8] 张贵仓，赵菲，蒽海英. 带三个形状参数的四次 Bezier 曲线[J]. 西北师范大学：自然科学版，2014，50(2)：26-29，34

[9] 吴荣军，彭国华，罗卫民，等. 四次带参 Bezier 曲线的形状分析[J]. 计算机辅助设计与图形学报，2009，23：146-156

[10] 师利红，张贵仓. 三次 TC-Bezier 曲线的新拓展[J]. 计算机工程与应用，2011，47：201-204

[11] Goldman R. The rational Bernstein bases and the multirational blossoms[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16: 701-738