

移动最小二乘代理模型支持域半径的优化方法

冷亚洪

(重庆工程学院软件工程系 重庆 400056)

摘 要 移动最小二乘代理模型描述局部波动的能力优于一般的代理模型,但其精度受支持域半径的影响。在经验公式的基础上提出了一种针对移动最小二乘代理模型支持域半径的优化方法。对支持域内抽样点数寻优获取最佳半径值,提高近似精度进而达到减少抽样点的目的。数值实验结果表明,对于不同基函数阶次和权函数的情况,提出的方法大大提高了移动最小二乘代理模型的近似精度,与基于经验公式的移动最小二乘代理模型相比,其仅需较少的抽样点即可达到相同的近似精度。

关键词 代理模型,移动最小二乘法,支持域半径,近似精度

中图法分类号 O241.3, O241.5 **文献标识码** A

Optimization Method of Support Domain Radius of Moving Least Squares Agent Model

LENG Ya-hong

(Department of Software Engineering, Chongqing Institute of Engineering, Chongqing 400056, China)

Abstract The moving least squares agent model is better than the general agent model, but its accuracy is affected by the radius of the support domain. On the basis of empirical formula, this paper proposed an optimization method for the support domain radius of the moving least square agent model. The optimal radius of sampling points in the support domain is obtained, and the approximation accuracy is improved to achieve the purpose of reducing the sampling points. Numerical experiments show that, for different base order function and weight function, the proposed method greatly improves the approximation accuracy of the moving least square agent model, and compared with the moving least squares (MLS) agent model based on empirical formula, the same approximation accuracy can be reached with only a few sampling points.

Keywords Agent model, Moving least square method, Support domain radius, Approximation accuracy

1 引言

在多学科优化设计和结构可靠性分析中,通常采用代理模型构造一个针对多对象、多学科,但计算量小、计算结果与数值计算或物理实验结果相近的数学模型来“代理”各个子模块功能,从而大大提高求解效率并实现集成。常用的代理模型包括多项式响应面模型^[1]、Kriging 模型^[2]、人工神经网络模型^[3]等。移动最小二乘法(Moving Least Square Method, MLSM)最初由数学家提出用于数据拟合或者表面构造^[4],后来广泛应用于无网格方法中,近几年逐步应用于多学科优化设计和可靠性分析,成为常用的代理模型之一。当状态函数存在多处显著的局部波动时,一般模型的拟合精度明显降低,MLSM 代理模型在全场中划定支持域(见图1)求解,对局部波动的描述能力更强,在处理复杂非线性数据近似问题上具有明显优势。

对于复杂非线性数据而言,需要合理选择支持域半径,使代理模型精度更高。国内外学者先后提出了一些行之有效的经验公式与方法^[5-8]。Liu G R^[5]提出的经验公式为 $d_s = a s - d_c$,此方法能够快速获取支持域半径值,但所得半径值不是最

佳的。文献^[6]针对抽样点均匀分布的情况,就不同阶次的基函数给出了经验公式。文献^[7]提出以遗传算法获取最佳支持域半径,但这种方法计算成本较高。文献^[8]基于经验公式提出了一种可变 r 值的方法,但仅是针对一维问题。本文在经验公式的基础上对支持域内抽样点数寻优获取最佳半径值,提出了一种对 MLSM 代理模型支持域半径的优化方法。最后通过数值实验将该改进方法与基于经验公式的 MLSM 代理模型进行对比,证明了该方法的有效性。

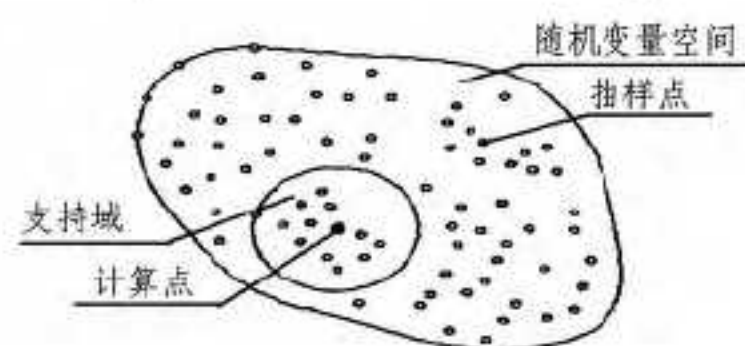


图1 二维圆形支持域示意图

需要使用代理模型表征的问题通常可以分为3类:(1)域内仅已知有限个点的函数值,通过代理模型拟合其他点的函数值;(2)已知域内所有点的函数值,但是函数没有解析表达式,通过代理模型建立一个相近的数学模型;(3)域内函数有解析表达式,但是表达式太复杂或不光滑,通过代理模型建立

一个简单的光滑的数学模型。本文提出的方法适用于后两类问题。

2 移动最小二乘法

MLSM 代理模型表达式如下:

$$f^h(x) = p^T(x) a_m(x) \quad (1)$$

其中, $p^T(x) = [p_1(x) \ p_2(x) \ \cdots \ p_m(x)]$, 其是用于 MLSM 代理模型插值的多项式基函数, 对于二维空间坐标 $x^T = [x_1 \ x_2]$, 通常利用 Pascal 三角形所决定的单项式以确保其最小完备性。对于某些特殊问题, 也可在其基函数中加入特殊函数以改善性能, 本文仅采用单纯的多项式基函数。

$a_m(x)$ 为待求系数向量, 可表示为:

$$a_m(x) = [a_1(x) \ a_2(x) \ \cdots \ a_j(x)]^T, j=1, 2, \cdots, m \quad (2)$$

用加权最小二乘法求出:

$$a_m(x) = A^{-1}(x) B(x) z \quad (3)$$

其中, $z = [z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_{n_s}]$ 为支持域内样本值 (n_s 为支持域内抽样点数), $A(x) = P^T W P$, $B(x) = P^T W$, 矩阵 P 和 W 为:

$$P = \begin{bmatrix} p^T(x_1) \\ p^T(x_2) \\ \vdots \\ p^T(x_{n_s}) \end{bmatrix}_{n_s \times m} \quad (4)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_{n_s}(x) \end{bmatrix}_{n_s \times n_s} \quad (5)$$

为了保证 A^{-1} 存在, 要求矩阵 A 非奇异, 这就需要支持域内至少有 m 个抽样点。 $w(x)$ 是权函数, 在支持域内, 权函数为一个非零实数; 在支持域外, 权函数为零。常用的权函数包括: 三次样条函数、四次样条函数、指数型函数、高斯型函数、正态权函数、正定紧支径向基函数等。权函数类型的选择对近似精度影响很大^[9,10], 由于篇幅限制, 本文仅以三次样条函数、指数型函数两种权函数为代表列出结果讨论。三次样条函数、指数型函数分别如式(6)、式(7)所示, 式中 α 为形状参数, 选择合适的形状参数有利于得到更精确的解。

$$w(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r + 4r^2, & r \leq 1/2 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4r^3/3, & 1/2 < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/\alpha)^2}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (7)$$

3 改进的移动最小二乘代理模型

对于复杂非线性问题, 可以通过不停地修改 MLSM 代理模型的支持域半径以逼近真实模型, 但半径 r 是一个实数, 计算量大且无法穷举, 因此无法知道当前的支持域半径是否是最佳的。文献^[7]以遗传算法获取最佳支持域半径, 计算成本较高。

支持域半径影响代理模型的精度, 其本质是改变了支持域内的抽样点数。本质上来说, 是由于参与计算的抽样点不同导致代理模型的精度不同。本文通过先确定参与计算的抽样点个数, 再反算出合适的支持域半径建立 MLSM 代理模

型。因抽样点的个数是可以穷举的, 本文的方法可以通过寻优获取支持域半径的最佳值。考虑到计算成本, 本文结合文献^[5]的经验公式 $d_s = a_s d_c$, 先初步确定支持域半径的范围, 计算出这个范围内抽样点个数的范围, 再通过寻优参与计算的抽样点个数, 反算出合适的支持域半径以建立 MLSM 代理模型。我们称这种改进的 MLSM 代理模型为 IMLSM 代理模型。算法具体步骤及流程如图 2 所示。

(1) 设置初始条件: 设计变量、真实模型、设计空间、初始抽样点数量 n 等。

(2) 采用最优拉丁超立方实验设计方法生成抽样点数据 (x_i, y_i, z_i) , 为避免抽样点与计算点重合而评估代理模型精度受偶然因素的影响, 采用均匀抽样生成计算点坐标 (x_c, y_c) 。

(3) 针对计算点循环, 根据经验公式初步确定支持域半径的范围 $(r_{\min}, r_{\max})$, 计算出这个范围内抽样点个数 $(n_s(1), n_s(2), \cdots, n_s(n))$, 再通过寻优参与计算的抽样点个数, 分别划定支持域半径 $(r(1), r(2), \cdots, r(n))$, 计算该计算点代理模型值, 并选取与真实值相差最小的结果。

(4) 完成计算点循环。

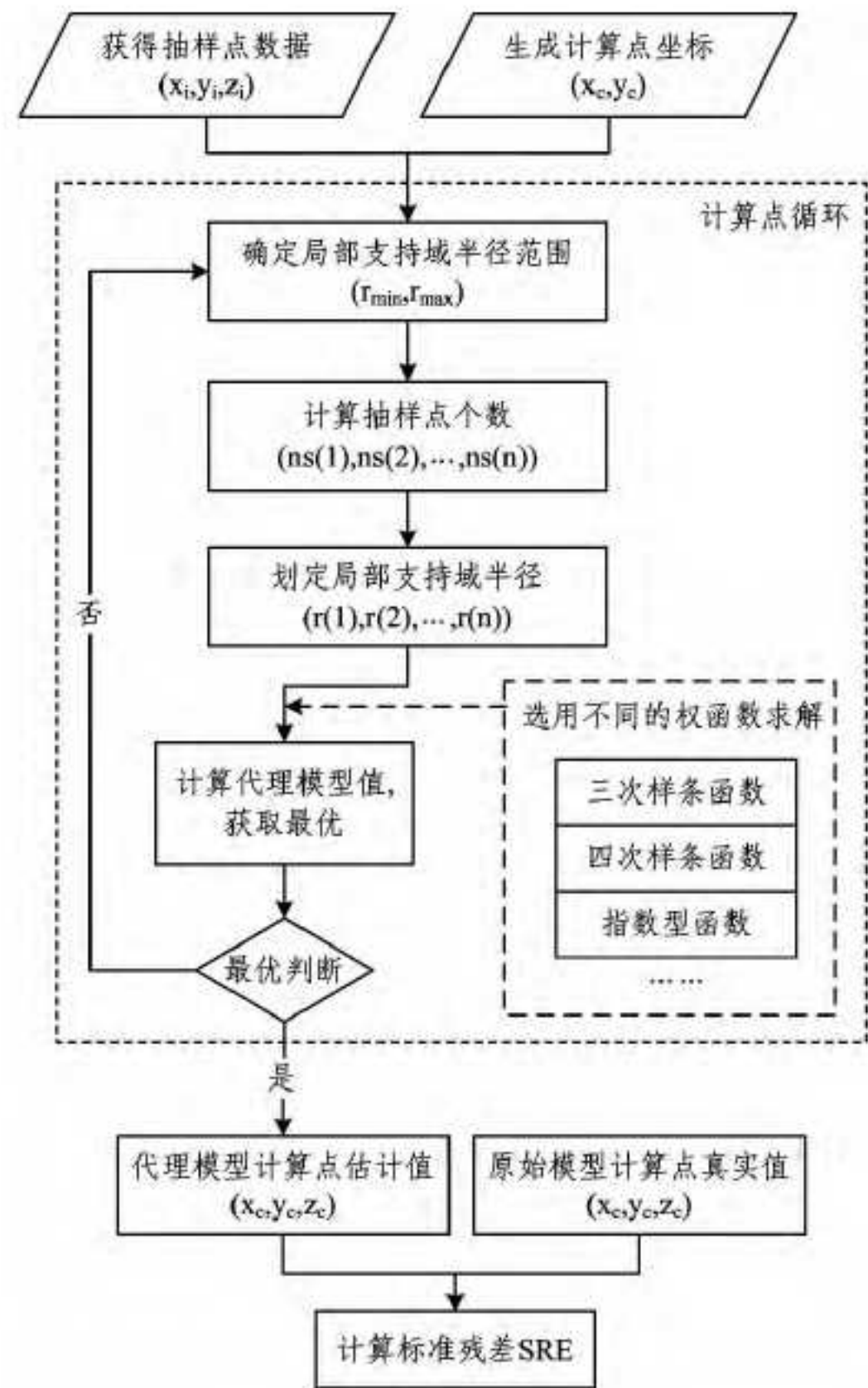


图 2 改进的 MLSM 代理模型分析及评价流程

4 数值实验

本文借助经典的 Peaks 函数模型, 对比改进的 MLSM 代理模型与基于经验公式的 MLSM 代理模型的近似精度, 以验证所提方法的有效性。为了考虑基函数阶次对 MLSM 代理模型精度的影响, 同时建立了基函数阶次为 1 到 4 阶的代理模型。权函数以三次样条函数、指数型函数为代表。

4.1 问题描述

Peaks 函数的表达式见式(8), 其曲面如图 3 所示。

$$z=3(1-x)^2 e^{-x^2-(y+1)^2}-10\left(\frac{x}{5}-x^3-y^5\right) e^{-x^2-y^2}-\frac{1}{3} e^{-(x+1)^2-y^2}$$

$$(x, y) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$$
(8)

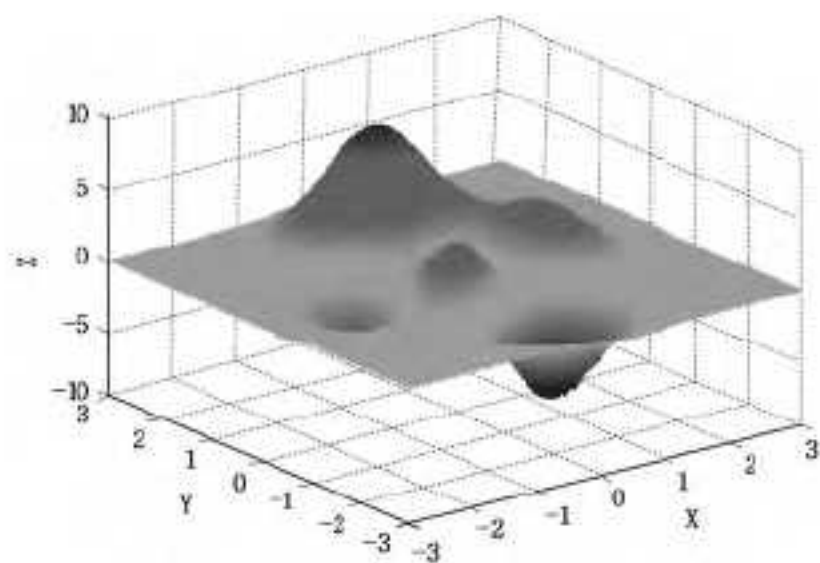


图3 Peaks 函数模型曲面

4.2 近似精度对比

采用最优拉丁超立方实验设计方法生成抽样点数据,分别用改进的 MLSM 代理模型、基于经验公式的 MLSM 代理模型获得各代理模型在 144 个均匀计算点上的估计值 $\hat{z}_i$ 。对比计算点真实值 z_{0i} ,通过计算相对误差以评价代理模型精度。相对误差的计算公式为:

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n}, e_i = \left| \frac{z_{0i} - \hat{z}_i}{z_{0i}} \right|$$
(9)

抽样点数分别为 100, 200, 400, 800 时的相对误差对比如表 1、表 2 所列。

表 1 权函数为三次样条近似精度对比

基函数阶次		1	2	3	4
100 抽样点	经验公式	11.84	31.24	40.69	156.2
	IMLSM	1.934	3.418	5.600	14.40
200 抽样点	经验公式	2.806	2.982	3.282	5.408
	IMLSM	1.071	0.970	0.922	2.121
400 抽样点	经验公式	0.762	0.457	0.350	0.284
	IMLSM	0.206	0.180	0.142	0.055
800 抽样点	经验公式	0.669	0.268	0.060	0.068
	IMLSM	0.348	0.150	0.030	0.025

表 2 权函数为指数型近似精度对比

基函数阶次		1	2	3	4
100 抽样点	经验公式	101.2	72.55	80.13	244.0
	IMLSM	1.710	3.571	9.346	7.458
200 抽样点	经验公式	10.78	5.916	7.431	5.452
	IMLSM	0.927	0.422	1.144	3.585
400 抽样点	经验公式	2.362	1.164	0.475	0.270
	IMLSM	0.275	0.195	0.086	0.073
800 抽样点	经验公式	1.068	0.499	0.270	0.066
	IMLSM	0.443	0.157	0.069	0.007

通过表 1、表 2 可知,基函数阶次为 1 到 4 阶,权函数选用三次样条函数或指数型函数,本文提出的方法构造 MLSM 代理模型的近似精度都高于基于经验公式构造的 MLSM 代理模型的近似精度。笔者在部分其他阶次或其他权函数的情况下也做了验证,本文提出的方法均比经验公式的方法近似精度高。

同时还可以看出,虽然本文方法优于经验公式方法的结论并不受基函数阶次影响,但对同一种方法,基函数阶次却对

近似精度有很大的影响。在抽样点数较少(本文算例为 100、200)时,宜选用低阶次基函数(本文算例为 1、2 阶);在抽样点数较多(本文算例为 400、800)时,宜选用高阶次基函数(本文算例为 3、4 阶)。

4.3 优化结果对比

为了验证本文方法构造的 MLSM 代理模型的近似精度对优化结果的影响,使用 200 个抽样点构造不同 MLSM 代理模型逼近上述测试函数,并在 MATLAB 中使用 fminsearch 函数进行优化,优化结果如表 3 所列。

表 3 代理模型优化结果对比

基函数阶次		1	2	3	4
三次样条	经验公式	-5.4433	-6.3630	-6.3472	-6.5661
	IMLSM	-6.6773	-6.5176	-6.3779	-6.5661
指数型	经验公式	-3.8601	-6.1054	-6.0151	-6.5671
	IMLSM	-6.6036	-6.5176	-6.3622	-6.5670

通过计算可得理论最优解为 -6.5511,各代理模型优化结果与理论最优解的相对误差绝对值比较如图 4 所示。从图中可以看出,本文方法提高了 MLSM 代理模型的近似精度,在相同抽样点的前提下,有助于获取优化问题的全局最优解。

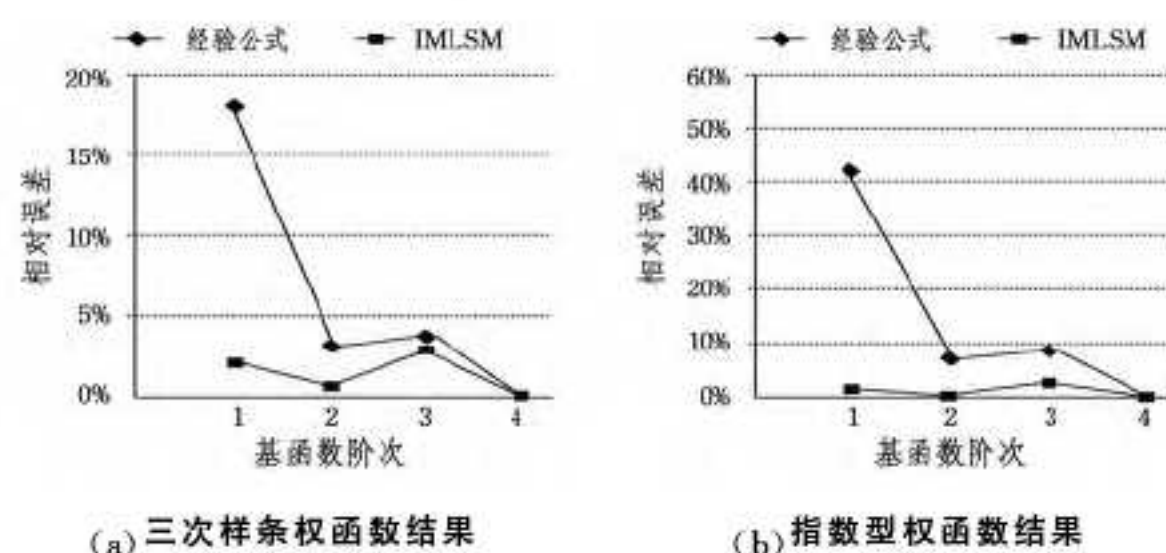


图 4 相对误差绝对值比较

结束语 本文针对 MLSM 代理模型近似精度受支持域半径影响的问题,提出了一种优化算法。通过结合经验公式 $d_s = a_s d_c$ 确定支持域半径的范围,对抽样点个数寻优以建立 MLSM 代理模型。借助数值实验验证了本文方法比经验公式方法近似精度更高、优化结果更加准确。通过数据分析得到以下结论:

- (1) 在基函数阶次和权函数种类变化时,本文所提出的方法构造的 MLSM 代理模型的近似精度均高于基于经验公式构造的 MLSM 代理模型的近似精度。
- (2) 为了使 MLSM 代理模型近似精度更高,在抽样点数较少时,宜选用低阶次基函数;在抽样点数较多时,宜选用高阶次基函数。
- (3) 在相同抽样点的前提下,本文方法有助于获取优化问题的全局最优解。

参考文献

- [1] Myers R H, Montgomery D C, Anderson-Cook C M. Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments[M]. John Wiley & Sons, 2009
- [2] Stein M L. Interpolation of spatial data: some theory for kriging [M]. Springer, 1999

- [3] Swift R A, Batill S M. Application of neural networks to preliminary structural design [C] // Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. 1991;335-343
- [4] Lancaster P, Salkauskas K. Surfaces generated by moving least squares methods [J]. Mathematics of computation, 1981, 37 (155):141-158
- [5] Liu G R, Gu Y T. An introduction to meshfree methods and their programming [M]. Springer Nether Lands, 2005:1-479
- [6] 左传伟, 聂玉峰, 赵美玲. 移动最小二乘方法中影响半径的选取

[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5):833-838

- [7] Yuan Z B, Nie Y F, Jie O Y. Adaptive moving least square approximations and its application [C] // Aip Conference Proceedings. 2010:976-981
- [8] 于成龙, 刘莉, 龙腾, 等. 基于优化的改进移动最小二乘代理模型方法 [J]. 航空计算技术, 2013, 43(1):85-88
- [9] 赵钦. 无网格方法应用及影响其求解精度的研究 [D]. 西安: 西安理工大学, 2005
- [10] 娄路亮, 曾攀. 影响无网格方法求解精度的因素分析 [J]. 计算力学学报, 2003, 20(3):313-319

(上接第 63 页)

推论 7 若 x 和 θ 在有限闭区间集合的并集 F 中取值, 船舶变形的概率分布是离散的, 且关于 $w=0$ 对称, 若 $P(W=-w_i)=P(W=w_i)=p_i, i=-N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 则船舶变形绝对值时间系列速率函数为:

$$I(x) = \max_{\theta \in F} [\theta_x - \log(p_0 + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N e^{\theta w_i} p_i)], x \in R$$

选取图 5 中的数据, 计算出船舶变形绝对值时间系列速率函数绘于图 6, 由图可知, 速率函数的零点不是 $x=0$ 的点, 而是 $x=4$ 附近的点。当 x 小于 4 时, 速率函数迅速上升; 当 $x>4$ 时, 速率函数上升得慢一些。与上节相比较, 船舶变形绝对值大偏差的收敛值大, 说明考虑绝对真值变形, 船体疲劳效应速度加快。

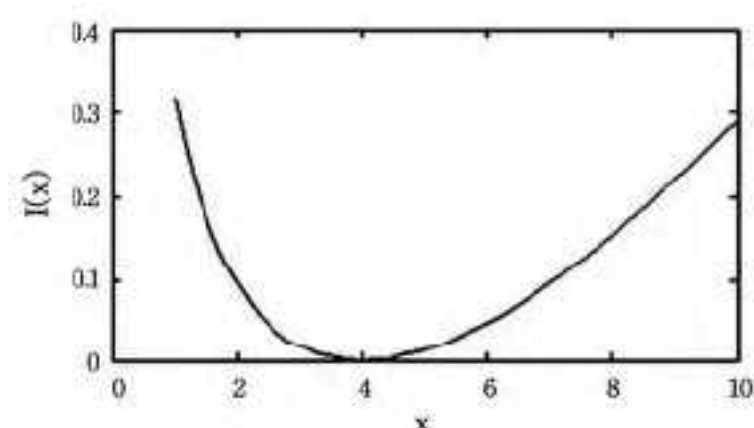


图 6 船舶变形绝对值时间系列速率函数

结束语 根据大偏差理论, 本文研究了大型船舶的变形积累, 得到了流固耦合大偏差计算原理。由实测波浪数据构造波浪谱, 根据波浪谱产生随机海浪, 然后研究波浪与船体的相互作用, 通过数值计算出船舶变形随时间的演化, 最后优化计算船舶变形大偏差。

根据文中公式, 大偏差主要是计算速率函数 $I(w)$ 。文中公式表明, $I(w)$ 的值越大, 对应平均变形量 S 的概率越小。若 $I(w)$ 为 w 的单调上升函数, 则平均变形量越大, 它对应的概率越小。船体疲劳损伤与变形幅度有直接的关系, 大幅值的变形发生的概率越大, 其损伤速度越快。本文研究是为了通过计算船舶大偏差来揭示船体疲劳损伤机理。本文提出的船舶大偏差算法研究了船体疲劳损伤机理。

参 考 文 献

- [1] Li Zhi-xiong, Yan Xin-ping, Li Qin, et al. Model reference robust control for marine propulsion systems with model uncertainty caused by hull deformation [J]. Journal of Marine Science and Technology, 2013, 21(4):400-409

- [2] 严新平, 李志雄, 刘正林, 等. 大型船舶推进系统与船体耦合动力学研究综述 [J]. 船舶力学, 2013, 17(4):439-449
- [3] Roemen R, Grevink J. An advanced approach to the design of shaftlines and bearing arrangements for fast ferries [J]. Wartsila Technical Journal, 2009, 32(1):47-53
- [4] 陈秋丽, 何明, 王琰, 等. 面向海洋监测的水声传感器网络节点定位算法 [J]. 计算机科学, 2015, 42(2):29-32
- [5] Li Zhi-xiong, Yan Xin-ping, Tain Zhe, et al. Blind vibration component separation and nonlinear feature extraction applied to the nonstationary vibration signals for the gearbox multi-fault diagnosis [J]. Measurement, Elsevier, 2012, 46(1):259-271
- [6] Li Y, Zhang C S, Wu R. Ruin estimates of diffusion models under constant interest rate [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2003, 19(1):79-84
- [7] Ruan Xiang-kui, Yang Ping, Yan Xin-ping, et al. Study on Hull Deformation at Supports of Propulsion Shaft of a Large Container Ship [C] // The 4th International Conference on Frontiers of Manufacturing and Design Science (ICFMD 2013). HongKong, 2013
- [8] Dong Cong-lin, Yuan Cheng-qing, Liu Zheng-lin, et al. Marine Propulsion System Reliability Research Based on Fault Tree Analysis [J]. Advanced Shipping and Ocean Engineering, 2013, 2(1):27-33
- [9] Chen Xin, Li Meng-yu, Zhang She-sheng. A Parallel Algorithm of Non-Linear Fluid-Solid Coupling Problem for Hydrofoil [J]. Journal of Algorithms & Computational Technology, 2014, 8 (3):249-266
- [10] 廖玉麟. 大偏差理论及其应用 [J]. 长沙铁道学院学报, 1987(1):15-25
- [11] Gao Fu-qing, Ren Jia-gang. Large deviations for stochastic flows and their applications [J]. Science in China Series A, 2001, 44:1016-1033
- [12] Schulten P. The Interaction between diesel engine, ship and propeller during maneuvering [D]. Netherlands: Technische Universiteit Delft, 2005
- [13] Chen Xin, Zhou Xin-cong, Zhang She-sheng, et al. A numerical fluid-solid coupling model for the dynamics of ships in atrocious sea conditions [J]. Journal of Algorithms & Computational Technology, 2015, 9(2):163-175
- [14] 国冰磊, 于炯, 廖彬, 等. SQL 能耗建模及优化研究 [J]. 计算机科学, 2015, 42(10):202-207