第 43 卷 第 6A 期 2016 年 6 月
计 算 机 科 学 Computer Science
Vol. 43 No. 6A June 2016

$BSCC(4,k)$ 的 Hamilton 圈分解

胡艳红 师海忠
(西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070)

摘 要 冒泡排序连通圈网络 $BSCC(n)$ 是一类重要的互连网络。2010 年师海忠提出了如下猜想:冒泡排序连通圈网络 $BSCC(n)(n\geqslant 4)$ 可分解为边不交的 Hamilton 圈和完美对集的并。记 $BSCC(n)$ 为 $BSCC(n,0)$,对 $BSCC(n,0)$ 的每个顶点用一个三角形代替,得到新网络 $BSCC(n,1)$,对 $BSCC(n,1)$ 的每个顶点用三角形代替得到 $BSCC(n,2)$,类似迭代 k 次得新网络 $BSCC(n,k)$。师海忠进一步提出猜想 2:$BSCC(n,k)$ 可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。证明了 $BSCC(4,k)$ 可分解成边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

关键词 冒泡排序连通圈网络,Hamilton 圈,猜想,完美对集,Cayley 图
中图法分类号 TP393 **文献标识码** A

Hamilton Descomposition of $BSCC(4,k)$

HU Yan-hong SHI Hai-zhong
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract Bubble-sort connected cycle is an important class of interconnection network. Shi Hai-zhong conjectured that $BSCC(n)(n\geqslant 4)$ is a union of edge disjoint a Hamiltonian cycle and a perfect matching. Denoting $BSCC(n)$ as $BSCC(n,0)$, we studied the new network $BSCC(4,1)$ by using a triangle to replace per vertex of $BSCC(4,0)$, and $BSCC(4,2)$ was gotten by using a triangle to replace every vertex of $BSCC(4,1)$. In the similar way, the new network was gotten by using a triangle to replace every vertex for k times. Shi Hai-zhong raised the conjecture 2 further more: $BSCC(n,k)$ is a union of edge disjoint a Hamiltonian cycle and a perfect matching. In this paper, we proved that $BSCC(4,k)$ is a union of edge disjoint a Hamiltonian cycle and a perfect matching.

Keywords (n,k)-Bubble-sort connected cycle, Hamilton cycle, Conjecture, Perfect matching, Cayley graphs

1 引言

互连网络是并行计算机的重要组成部分,互连网络在很大程度上决定着并行计算机的性能[1-3]。常常将计算机、服务器或通讯互连网络模型化为一个无向图,顶点对应计算机或服务器或通讯站点,边对应通信信道[4-8]。1989 年,S. B. Akers 等提出了互连网络的群论模型[8],并多位学者研究了星网络、冒泡排序网络等的性质[10-13];1995 年,S. R. Ohring 等提出了 Cayley 图连通圈网络模型[14],并设计出了星连通圈网络,冒泡排序连通圈网络等;2010 年,师海忠提出了更一般的情形——正则连通圈网络模型[15],在文献[15]中师海忠提出了关于冒泡排序连通圈网络的一个猜想。

猜想 1:冒泡排序连通圈 $BSCC(n)(n\geqslant 4)$ 可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

师海忠进一步提出了如下猜想:

猜想 2:$BSCC(n,k)$(其中 $n\geqslant 4,k\geqslant 0$)可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

在本文中证明了 $BSCC(4,k)$ 可分解成边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

本文第 2 节介绍了基本概念,第 3 节给出了主要结果,最后总结全文。

2 基本概念

定义 1 图 G 中与一个点 v_i 相关联的边的数目叫做点 v_i 的度,记作 d_i 或 $\deg v_i$,图 G 中所有点中最小的度记作 $\delta(G)=\min\{d(v)\mid v\in V(G)\}$,最大的度记作 $\Delta(G)=\max\{d(v)\mid v\in V(G)\}$,如果 $\delta(G)=\Delta(G)=r$,则 G 中所有点的度相等,这时 G 称为是 r 正则的。

定义 2 图 G 是一点边连续交替出现的序列,$w=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ 称为图 G 的一个途径,其中 v_0,v_k 分别称为途径的起点和终点,w 上其余顶点称为中途点,图 G 中边不重复出现的途径称为迹,图 G 中起点和终点相同的途径称为闭途径,边不重复出现的闭途径称为闭迹,也称为回路;中途点不重复的闭途径称为圈,经过图 G 的每个顶点恰一次的圈称为 G 的 Hamilton 圈,简称为 H 圈,具有 Hamilton 圈的图称为 Hamilton 图。

定义 3 设 M 是 E 的一个子集,它的元素是 G 中的连杆,并且这些连杆中的任意两个在 G 中均不相邻,则称 M 为 G 的对集(或匹配);M 中一条边的两个端点称为在 M 下是配对的,若对集 G 的某条边与顶点 v 关联,则称 M 饱和顶点 v 并且称 v 是 M 饱和的,否则称 v 是 M 非饱和的,若 G 的每个顶点均为 M 饱和,则称 M 为 G 的完美对集。

胡艳红(1989—),女,硕士生,主要研究方向为互连网络和语言,E-mail:yhhu2010@163.com;师海忠(1962—),男,博士,教授,主要研究方向为组合最优化、互连网络设计与分析、图半群、(V,R)-半群、(V,R)-语言等,E-mail:haizhong.shi@163.com(通信作者)。

定义 4[9] 设 G 是任意有限群且有单位元 1；Ω 是 G 的一个生成集且具有如下性质：

(1) $x\in\Omega\Rightarrow x^{-1}\in\Omega$；

(2) $1\notin\Omega$

Cayley 图 $\Gamma=\Gamma(G,\Omega)$ 是一个简单图且其顶点集和边集如下：

$V\Gamma=G;E\Gamma=\{\{g,h\}\mid g^{-1}h\in\Omega\}$

定义 5 冒泡排序连通圈网络 $BSCC(n)(n\geqslant 4)$ 的定义：

顶点集 $V=\{(i,\pi)\mid\pi\in VB_n,i\in Z_{n-1}\}$；边集 $E=\{\{(i,\pi),(j,\pi')\}\}$，要么 $|i-j|=1(\bmod(n-1))$ 且 $\pi'=\pi$，要么 $i=j$ 且 $\{\pi,\pi'\}\in EB_n$ 其中 $\pi=\pi(i,i+1)\}$。

定义 6 (n,k)-冒泡排序连通圈网络，记 $BSCC(n)$ 为 $BSCC(n,0)$ 的定义：将 $BSCC(n,0)$ 的图中每个点用一个三角形代替所得到的新网络为 $BSCC(n,1)$，然后在将 $BSCC(n,1)$ 的图中每个点用一个三角形来代替得到图 $BSCC(n,2)$，依次递归 $BSCC(n,k)$ 是将 $BSCC(n,k-1)$ 的每个点用一个三角形代替而得到的新网络，称为 (n,k)-冒泡排序连通圈网络。

定义 7 $BSCC(4,k)$ 的定义如下：记 $BSCC(4)$ 为 $BSCC(4,0)$，把 $BSCC(4,0)$ 的每个顶点用一个三角形代替得 $BSCC(4,1)$，把 $BSCC(4,1)$ 的每个顶点用三角形代替得 $BSCC(4,2)$，依次迭代得到 $BSCC(4,k)$。$BSCC(4,k)$ 的结点可写为下述形式：$(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,i_1i_2i_3i_4)$，其中 $i_1i_2i_3i_4$ 是 $1,2,3,4$ 的任一排列，$j_p=1,2,3(p=0,1,\cdots,k)$，$BSCC(4,k)$ 的顶点可分成 24 个子集，Hamilton 圈在这 24 个子集之间按如下顺序进行：

$(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4312)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,3412)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,3142)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,3124)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,1324)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,1342)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,1432)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4132)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4123)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,1423)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,1243)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,1234)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,2134)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,2143)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,2413)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4213)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4231)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,2431)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,2341)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,2314)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,3214)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,3241)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,3421)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4321)-(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4312)$

3 主要结果

3.1 $BSCC(4,0)$ 的 Hamilton 分解

定理 1 $BSCC(4,0)$ 可分解为边不交的一个 Hamilton 圈 H_{72} 和一个完美对集 M_{72} 的并，如图 1 所示（图中粗线表示完美对集）。

证明：Hamilton 圈 H_{72}。

(3,4312)-(2,4312)-(1,4312)-(1,3412)-(3,3412)-(2,3412)-(2,3142)-(1,3142)-(3,3142)-(3,3124)-(2,3124)-(1,3124)-(1,1324)-(2,1324)-(3,1324)-(3,1342)-(1,1342)-(2,1342)-(2,1432)-(3,1432)-(1,1432)-(1,4132)-(2,4132)-(3,4132)-(3,4123)-(2,4123)-(1,4123)-(1,1423)-(3,1423)-(2,1423)-(2,1243)-(1,1243)-(3,1243)-(3,1234)-(2,1234)-(1,1234)-(1,2134)-(2,2134)-(3,2134)-(3,2143)-(1,2143)-(2,2143)-(2,2413)-(3,2413)-(1,2413)-(1,4213)-(2,4213)-(3,4213)-(3,4231)-(2,4231)-(1,4231)-(1,2431)-(3,2431)-(2,2431)-(2,2341)-(1,2341)-(3,2341)-(3,2314)-(2,2314)-(1,2314)-(1,3214)-(2,3214)-(3,3214)-(3,3241)-(1,3241)-(2,3241)-(2,3421)-(3,3421)-(1,3421)-(1,4321)-(2,4321)-(3,4321)-(3,4312)。

完美对集 M_{72}：

(3,4312)-(1,4312),(1,3412)-(2,3412),(2,3142)-(3,3142),(1,3142)-(1,1342),(3,3124)-(1,3124),(1,1324)-(3,1324),(2,1324)-(2,1234),(2,1342)-(3,1342),(1,1432)-(2,1432),(3,1432)-(3,1423),(1,4132)-(3,4132),(1,4123)-(3,4123),(1,1423)-(2,1423),(2,4312)-(2,4132),(2,1243)-(3,1243),(1,1234)-(3,1234),(2,4123)-(2,4213),(1,1243)-(1,2143),(2,3124)-(2,3214),(3,3412)-(3,3421),(3,4321)-(1,4321),(1,3421)-(2,3421),(2,3241)-(3,3241),(3,3214)-(1,3214),(1,3241)-(1,2341),(1,2314)-(3,2314),(3,2341)-(2,2341),(2,2314)-(2,2134),(1,2134)-(3,2134),(2,2431)-(1,2431),(3,2431)-(3,2413),(3,2143)-(2,2143),(2,2413)-(1,2413),(1,4213)-(3,4213),(1,4231)-(3,4231),(2,4231)-(2,4321)。

因此，当 $n=4$ 时关于冒泡排序连通圈网络 $BSCC(4)$ 可分解为边不交的一个 Hamilton 圈 H_{72} 和一个完美对集 M_{72} 的并。

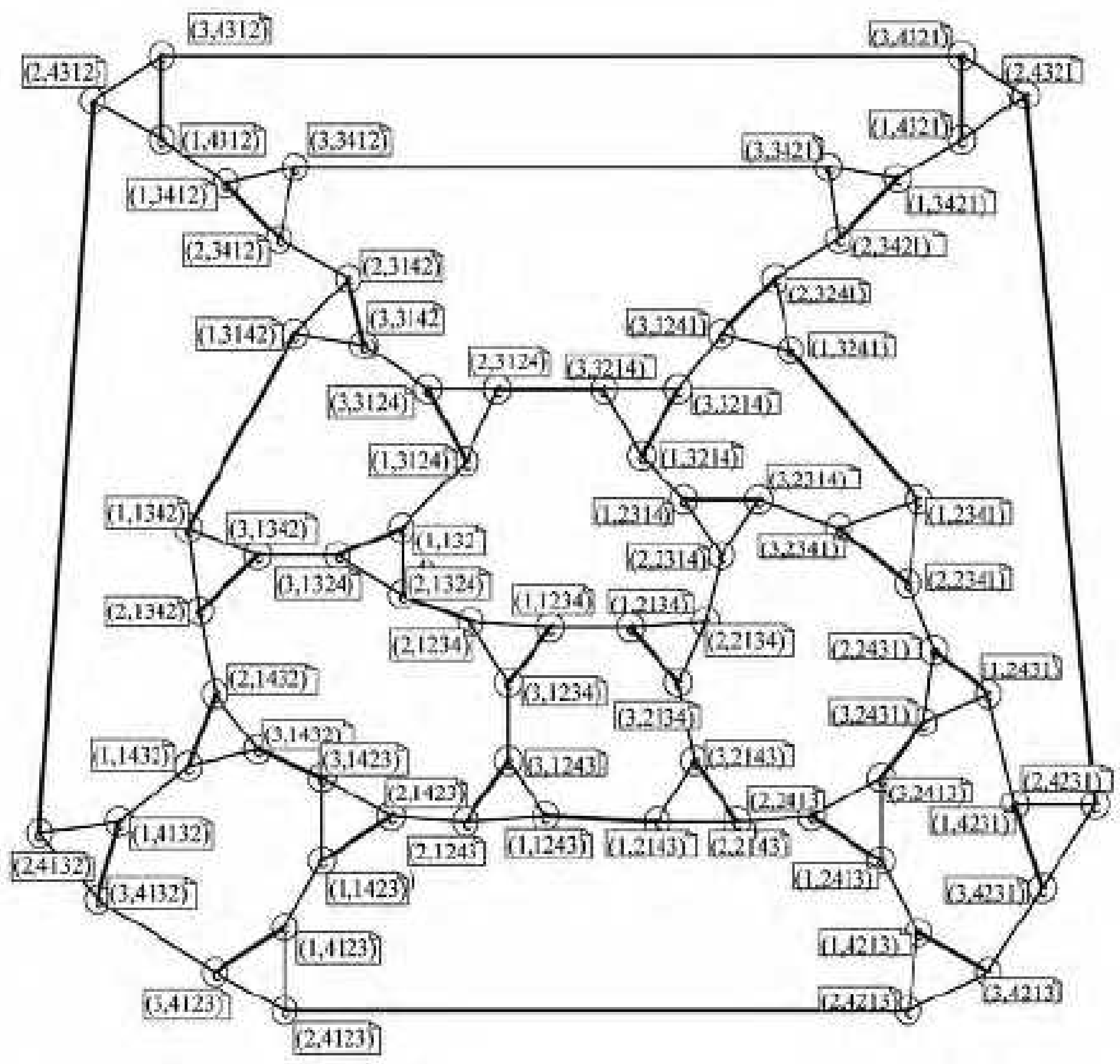

图 1 $BSCC(4,0)$

3.2 $BSCC(4,1)$ 的 Hamilton 分解

定理 2 $BSCC(4,1)$ 可分解为一个边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，如图 2 所示（图中粗线表示完美对集）。

证明：当 $k=1$ 时，$BSCC(4,1)$ 中对应的点为 $(j_1,j_0,\pi_i)(i=1,2,\cdots,24)$，其中 $j_p=1,2,3(p=0,1)$。点 $(j_1,j_0,4312)$ 中共有 3^1 个小三角形：$j_1=3$，这个小三角形中，$j_0=1\to j_0=2\to j_0=3$，其 Hamilton 圈按顺时针走向。下面 $j_0=3$ 不变，由 $j_1=3\to j_1=2$ 连一边，在 $j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=3\to j_0=2\to j_0=1$，其 Hamilton 圈按逆时针走向，再由 $j_0=1$ 不变，$j_1=2\to j_1=1$ 连一边，在 $j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1\to j_0=2\to j_0=3$ 对应的 Hamilton 圈按顺时针走向。j_1,j_0 不变，从 $(j_1,j_0,4312)-(j_1,j_0,3412)$，即 $j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1\to j_0=2\to j_0=3$，其 Hamilton 圈按逆时针走向，再由 $j_0=3$ 不变，j_1

$=1\rightarrow j_1=2$ 连一边，在 $j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=1\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=3$，其 Hamilton 圈按顺时针走向，下面 $j_0=1$ 不变，$j_1=2\rightarrow j_1=3$连一边，在 $j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=3\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=1$，其 Hamilton 圈按逆时针走向。根据定义 7 中 Hamilton 圈的走向，另外从图 2 $BSCC(4,1)$ 中看到点$(j_1,j_0,4321)$与点$(j_1,j_0,4312)$的 Hamilton 圈顺逆性一致，点$(j_1,j_0,4321)$中，$j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=3\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=1$，其 Hamilton 圈按顺时针走向，下面 $j_0=1$ 不变，$j_1=1\rightarrow j_1=2$ 连一边，在$j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=1\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=3$，其 Hamilton 圈按逆时针走向，再将 $j_0=3$ 不变，$j_1=2\rightarrow j_1=3$ 连一边，在$j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=3\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=1$，其 Hamilton 圈按顺时针走向。

结论：当 $k=1$ 时，即 $BSCC(4,1)$ 第一个小三角形的 Hamilton 圈为顺时针走向。从图 1 $BSCC(4,0)$和图 2 $BSCC(4,1)$得到$(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4312)$和$(j_k,j_{k-1},\cdots,j_1,j_0,4321)$的 Hamilton 圈的顺时针(逆时针)一致。

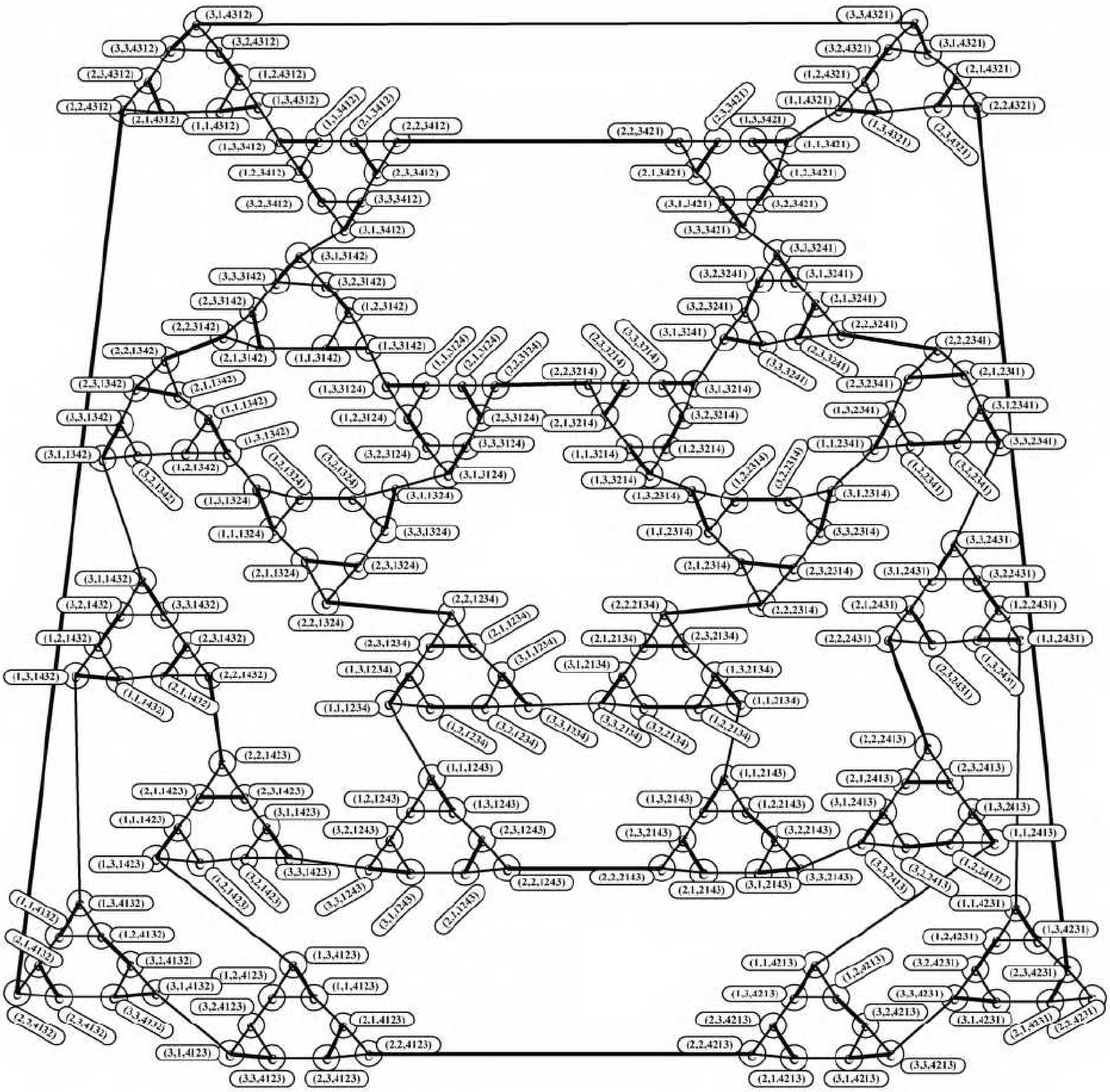

图 2 $BSCC(4,1)$

3.3 $BSCC(4,2)$的 Hamilton 圈分解

定理 3 $BSCC(4,2)$可分解为边不交一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

证明：$k=2$ 时，$BSCC(4,2)$中对应的点为(j_2,j_1,j_0,π_i) $(i=1,2\cdots,24)$，其中 $j_r=1,2,3(r=0,1,2)$。点$(j_2,j_1,j_0,4312)$中共有 3^2 个小三角形，当 $j_2=3$，对应 $j_1=3$，在 $j_2=3$，$j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=1\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=3$，其 Hamilton 圈按逆时针走向，下面 $j_2=3,j_0=3$ 不变，$j_1=3\rightarrow j_1=2$ 连一边，在 $j_2=3,j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=3\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=1$ 对应 Hamilton 圈按顺时针走向，再由 $j_2=3,j_0=1$ 不变，$j_2=2\rightarrow j_1=1$连一边，在 $j_2=3,j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=3$，对应 Hamilton 圈按逆时针走向，当 $j_1=1,j_0=3$ 不变，$j_2=3\rightarrow j_2=2$ 连一边，在 $j_2=2,j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=3\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=1$，对应 Hamilton 圈按顺时针走向，当$j_2=2,j_0=1$ 不变，$j_1=1\rightarrow j_1=2$ 连一边，在 $j_2=2,j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=1\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=3$，对应 Hamilton 圈按逆时针走向，当 $j_2=2,j_0=3$ 不变，$j_1=2\rightarrow j_1=3$ 连一边，在 $j_2=2$，$j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=3\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=1$，对应 Hamilton 圈按顺时针走向；当 $j_1=3,j_0=1$ 不变，$j_2=2\rightarrow j_2=1$ 连一边，在 $j_2=1,j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=1\rightarrow j_0=2\rightarrow j_0=3$，

对应 Hamilton 圈按逆时针走向，当 $j_2=1, j_0=3$ 不变，$j_1=3 \to j_1=2$ 连一边，在 $j_2=1, j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，对应 Hamilton 圈按顺时针走向，当 $j_2=1, j_0=1$ 不变，$j_1=2 \to j_1=1$ 连一边，在 $j_2=1, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，对应 Hamilton 圈按逆时针走向。再根据定义 7 中 Hamilton 圈的走向，点 $(j_2, j_1, j_0, 4321)$ 中也有 3^2 个小三角形，即有奇数个小三角形，当 $j_2=1$，对应 $j_1=1$，在 $j_2=1, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，其 Hamilton 圈按逆时针走向，下面 $j_2=1, j_0=1$ 不变，$j_1=1 \to j_1=2$ 连一边，在 $j_2=1, j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$ 对应 Hamilton 圈按顺时针走向，依次递归，当 $j_2=3, j_0=3$ 不变，$j_1=2 \to j_1=3$ 连一边，在 $j_2=3, j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，对应 Hamilton 圈按逆时针走向。

结论：当 $k=2$ 时，即 $BSCC(4,1)$ 第一个小三角形的 Hamilton 圈为逆时针走向。从图 1 $BSCC(4,0)$ 和图 2 $BSCC(4,1)$ 得到 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4312)$ 和 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4321)$ 的 Hamilton 圈的顺时针（逆时针）一致。

3.4 $BSCC(4,k)$ 的 Hamilton 圈分解

定理 4 $BSCC(4,k)$ 可分解为边不交一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

证明：对 $BSCC(4,k)$ 分 k 为奇数和 k 为偶数两种情况讨论。在每个 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, i_1 i_2 i_3 i_4)$ 中都有 3^k 个小三角形，不管 k 是奇数还是偶数，3^k 是奇数，所以 $(j_k, j_{k-1}, \cdots j_1, j_0, i_1 i_2 i_3 i_4)$ 中始圈和终圈的顺时针（逆时针）一致。并且根据 3.1—3.3 节得到 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4312)$ 和 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4321)$ 有相同的顺时针（逆时针）走向。

（1）当 k 为奇数时，在 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4312)$ 中，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈顺时针走向；当 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_0=3$ 不变，而 $j_1=3 \to j_1=2$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，Hamilton 圈逆时针走向；$j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_0=1$ 不变，而 $j_1=2 \to j_1=1$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈顺时针走向，依次递推，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈顺时针走向。再根据定义 7 中 Hamilton 圈的顺序，点 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4321)$ 中在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，Hamilton 圈顺时针走向；当 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_0=1$ 不变，而 $j_1=1 \to j_1=2$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈逆时针走向；$j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_0=3$ 不变，而 $j_1=2 \to j_1=3$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，Hamilton 圈顺时针走向，依次递推，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈顺时针走向，最后回到起点。

（2）当 k 为偶数时，在 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4312)$ 中，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈逆时针走向；当 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_0=3$ 不变，而 $j_1=3 \to j_1=2$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，Hamilton 圈顺时针走向；$j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_0=1$ 不变，而 $j_1=2 \to j_1=1$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈逆时针走向，依次递推，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈逆时针走向。再根据定义 7 中 Hamilton 圈的顺序，点 $(j_k, j_{k-1}, \cdots, j_1, j_0, 4321)$ 中在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，Hamilton 圈逆时针走向，当 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_0=1$ 不变，而 $j_1=1 \to j_1=2$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=2$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈顺时针走向；$j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_0=3$ 不变，而 $j_1=2 \to j_1=3$ 连一边，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=1, j_1=3$ 这个小三角形中，$j_0=3 \to j_0=2 \to j_0=1$，Hamilton 圈逆时针走向，依次递推，在 $j_k=j_{k-1}=\cdots=j_2=3, j_1=1$ 这个小三角形中，$j_0=1 \to j_0=2 \to j_0=3$，Hamilton 圈逆时针走向，最后回到起点。

结束语 (n,k)-冒泡排序连通圈网络是一类重要的新型互连网络模型，该网络有小的固定度[3]，本文证明了 $(4,k)$-冒泡排序连通圈网络可分解为边不交的 Hamilton 圈和完美对集的并。

参考文献

[1] Lakshmivarahan S, jwo ang J S, Dhall S K. Symmetry in interconnection netwerks based on Cayley graphs of permutation groups: A survey[J]. Parallel Computing, 1993, 19(4): 361-407

[2] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京：科学出版社，2007：198-234

[3] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京：高等教育出版社，2009：1-52

[4] 师海忠. 互连网络的代数环模型[D]. 北京：中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所，1998

[5] Shi Hai-zhong, Niu Parr-feng. Hamiltonian deconposition of some intercoonection networks[C]// Du Ding-zhu. Proceed of the 3th Aunnal International Conference on Combinatorial Optimization and Applications. Huang Shan, China: Springer, June 2009: 231-237

[6] Bondy J A, Marty U S R. Graph Theory [M]. London: Springer, 2008

[7] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection network[J]. IEEE Transaction on Computers, 1989, 38(4): 555-565

[8] 师海忠，牛攀峰. 冒泡排序网络的控制数[J]. 甘肃科学学报，2010, 22(3): 32-35

[9] Biggs N. Algebraic Graph theory (second edition) [M]. Cambridge University Press, 1993

[10] Shi Hai-zhong, Shi Yue. Cell-breeding graph model for interconnection networks [OL]. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyfesb05y

[11] 师海忠，师越. 关于互连网络群论模型的一簇猜想[J]. 计算机科学，2015, 42(11A): 245-246, 279

[12] Shi Hai-zhong, Shi Yue. A new model for interconnection network: k-hierarchical ring and r-layer graph network[OL]. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyferZ-Zl

[13] Shi Hai-zhong, Shi Yue. A hierarchical Ring Group-Theoretic Model for Interconnection Networks[OL]. http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyfeBX-2J

[14] Ohring S R, Sarkar F, Hohndel D H. Cayley graph connected cycles: A new class of fixed-degree Interconnection networks[C]// Proceeding of the 28th Annual Hawaii International Conference on System Science. 1995: 479-488

[15] 师海忠. 正则图连通圈：多种互连网络的统一模型[C]// 中国运筹学会第十一届学术交流会论文集. 北京，2010: 202-208