

# 基于仿射投影-非线性主分量分析的盲源分离

李雄杰<sup>1,2</sup> 周东华<sup>2</sup>

(浙江工商职业技术学院电子信息工程系 宁波 315012)<sup>1</sup> (清华大学自动化系 北京 100084)<sup>2</sup>

**摘要** 仿射投影算法(APA)重复利用数据,可提高算法的收敛速度。针对现有盲源分离收敛速度慢的问题,以盲源分离的非线性主分量分析(PCA)为基础,结合仿射投影算法,提出了盲源分离的非线性 APA-PCA 准则,并设计出盲源分离的 APA-Kalman, APA-RLS, APA-LMS 新算法。在这些新算法中,预白化后的观测向量数据被重复利用,向量式数据转变成矩阵式数据,从而加快了盲源分离的收敛速度。仿真结果表明,非线性 APA-PCA 准则是有效的。

**关键词** 盲源分离,仿射投影算法,主分量分析,分离准则

中图分类号 TN911.7 文献标识码 A

## Blind Source Separation Based on Affine Projection and Nonlinear Principal Component Analysis

LI Xiong-jie<sup>1,2</sup> ZHOU Dong-hua<sup>2</sup>

(Department of Electronic and Information Engineering, Zhejiang Business Technology Institute, Ningbo 315012, China)<sup>1</sup>

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)<sup>2</sup>

**Abstract** The affine projection algorithm (APA) can improve the algorithm convergence speed by repeated using the data. Aiming at the problem of slow convergence in the existing blind source separation (BSS), based on the nonlinear principal component analysis (PCA) for BSS, this paper proposed a nonlinear APA-PCA criterion by using the idea of APA, and the new APA-Kalman, APA-RLS and APA-LMS algorithms for BSS is designed. In these new algorithms, the prewhitened observation vector data is utilized in a repeated fashion, and the vector data is thus converted into matrix data. The convergence rate of BSS is accelerated. The simulation results show that the nonlinear APA-PCA criterion is effective and universal.

**Keywords** Blind source separation, Affine projection algorithm, Principal component analysis, Separation criterion

## 1 引言

盲源分离(Blind Source Separation, BSS)是近 20 多年才发展起来的用于从混合观测数据中分离源信号的一门新技术。近年来, BSS 在信号处理、故障诊断等领域的广泛应用<sup>[1-3]</sup>受到越来越多的关注。BSS 的开拓性研究起源于 Jutten 等在 1991 年发表的论文<sup>[4]</sup>, Comon 在 1994 年提出了 BSS 的独立分量分析(Independent Component Analysis, ICA)<sup>[5]</sup>, Karhunen 等也在 1994 年提出了 BSS 的非线性主分量分析(Principal Component Analysis, PCA)<sup>[6]</sup>。正是他们的工作极大地推动了 BSS 的研究,至今已涌现了大量的有效算法,如最近的基于 Givens 变换矩阵的 BSS 算法等<sup>[7-10]</sup>。

对于非线性主分量分析,经多年发展已形成了很多成熟的 BSS 算法,典型的算法有:最小均方(Least Mean Square, LMS)算法<sup>[11]</sup>、递推最小二乘(Recursive Least Squar, RLS)算法<sup>[12,13]</sup>、卡尔曼(Kalman)滤波算法<sup>[14]</sup>、非线性 PCA 子空间学习算法<sup>[15]</sup>、双梯度算法<sup>[16,17]</sup>、非线性 GHA 算法<sup>[18]</sup>等。仿射投影算法(Affine Projection Algorithm, APA)于 1984 年在文献<sup>[19]</sup>中被首次介绍,APA 以重复利用数据来提高收敛速

度而著称。本文将 APA 与非线性 PCA 结合,提出了“非线性 APA-PCA 准则”,从而对非线性 PCA 类 BSS 算法进行重新设计。仿真结果表明,新算法具有良好的 BSS 性能,收敛速度更快,从而表明非线性 APA-PCA 准则是有效的,是普遍适用的。

## 2 基本问题描述

### 2.1 盲源分离问题描述

在瞬时混合 BSS 中,源信号线性混合模型通常表示为:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{M}\mathbf{s}(n) \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), \dots, x_m(n)]^T$  是  $m$  维观测数据向量;  $\mathbf{s}(n) = [s_1(n), \dots, s_j(n)]^T$  是  $j$  个源信号构成的源信号向量;  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{m \times j}$  ( $m \geq j$ ) 是一种混合矩阵。这里假设信号源的数目  $j$  是已知的。由于噪声的存在使盲分离实现起来比较困难,因此一般不考虑噪声的影响,但可以将噪声作为源信号之一。

通常有以下 3 个假设:

- 1) 混合矩阵  $\mathbf{M}$  是一个常数列满秩矩阵;
- 2)  $\mathbf{s}(n)$  的各分量  $s_i(n)$  ( $i=1, \dots, j$ ) 必须相互独立或在实践中尽可能地独立;

本文受国家自然科学基金(61210012)资助。

李雄杰(1956—),男,教授,主要研究方向为盲源分离、自适应滤波及应用, E-mail: lixiongjie@tsinghua.org.cn; 周东华(1963—),博士,教授,主要研究方向为现代信号处理、强跟踪滤波器及应用。

3)  $s(n)$ 的各分量  $s_i(n) (i=1, \dots, j)$  是一个零均值、单位方差的平稳随机过程,且至多只有一个分量服从高斯分布。

BSS的提法是:在混合矩阵  $M$  和源信号  $s(n)$  未知的情况下,仅根据观测数据向量  $x(n)$  及 3 个假设,自适应地更新  $j \times m$  维分离矩阵  $B(n)$ ,使得  $j \times 1$  维输出向量

$$y(n) = B(n)x(n) \quad (2)$$

是未知的源向量  $s(n)$  的拷贝(或估计)。所谓拷贝(或估计)是指  $y(n)$  相对于  $s(n)$  只是改变幅值和各分量的排列顺序。

## 2.2 非线性主分量分析(PCA)

BSS大致可分为独立分量分析(ICA)和非线性主分量分析(PCA)两大类。非线性 PCA 是线性 PCA 的推广,线性 PCA 方法仅用到了输入数据的二阶统计量,不能实现 BSS。将高阶统计量引入线性 PCA 中,可以实现信号的盲分离,相应的算法称为非线性 PCA。在非线性的 PCA 中,高阶统计量以隐含的方式引入计算,算法采用自适应迭代的方法,易于工程实现。

非线性 PCA 一般分为以下两个阶段:

(1)对观测数据向量  $x(n)$  进行预白化处理

令  $U(n)$  为  $j \times m$  维预白化矩阵,则  $v(n) = U(n)x(n)$  是  $j \times 1$  维白化后的数据向量,其均值为零、协方差矩阵  $E\{v(n)v^T(n)\} = I$ 。预白化矩阵  $U(n)$  可以通过式(3)在线估计得到:

$$U(n+1) = U(n) + \eta(n)(I - v(n)v^T(n))U(n) \quad (3)$$

预白化处理后,分离矩阵可由  $B(n) = W^T(n)U(n)$  给出。

BSS 的输出向量可以表示为:

$$y(n) = W^T(n)U(n)x(n) = W^T(n)v(n) \quad (4)$$

接下来,BSS 就是自适应更新权重矩阵  $W(n)$ 。

(2)自适应更新权重矩阵  $W(n)$

将合适的非线性函数引入到标准 PCA 算法的准则函数中,可得非线性 PCA 的准则函数<sup>[20]</sup>如下:

$$J_1(W) = E\{\|v(n) - W(n)g(y(n))\|^2\} \quad (5)$$

其中,  $g(\cdot)$  为非线性函数,  $E(\cdot)$  是期望操作,  $\|\cdot\|$  是  $m_1$  范数。然后可以利用随机梯度型算法自适应更新权重矩阵  $W(n)$ 。基于非线性 PCA 准则(5),已发展了许多成熟的 BSS 算法。

## 3 非线性 APA-PCA 准则

### 3.1 传统仿射投影算法(APA)

APA 是针对 LMS 算法收敛速度慢而提出的。APA 通过重复利用输入数据来提高收敛速度,从几何角度被命名为仿射投影算法,已广泛应用于回波抵消等。设 APA 的自适应抽头数为  $L$ ,仿射投影维数为  $p$ ,则  $n$  时刻的输入信号向量为  $X(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^T$ 、期望向量为  $d(n) = [d(n), d(n-1), \dots, d(n-p+1)]^T$ 、滤波权系数向量  $w(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{L-1}(n)]^T$ 、 $p \times L$  维仿射投影矩阵  $A(n) = [X(n), X(n-1), \dots, X(n-p+1)]^T$ ,则权系数向量  $w(n)$  的迭代公式为:

$$e(n) = d(n) - A(n)w(n) \quad (6)$$

$$w(n+1) = w(n) + \mu A^T(n)[A(n)A^T(n) + I]^{-1}e(n) \quad (7)$$

其中,  $e(n)$  为误差向量,  $\mu$  称为步长因子。

### 3.2 非线性 APA-PCA 准则

在下面分析中,假设观测数据向量维数  $m$  与源信号向量维数  $j$  相等,即  $m=j$ 。为提高 BSS 的收敛性能,将仿射投影

思想结合到非线性 PCA 准则(5)中,即得非线性 APA-PCA 准则如下:

$$J(W) = E\{\|V(n) - A(n)W^T(n)\|^2\} \quad (8)$$

在准则(8)中,  $A(n)$  设计成由  $p$  个  $g(y(n))$  向量组成,即  $A(n)$  是  $g(y(n))$  向量数据的重复使用,  $A(n)$  称为仿射投影矩阵,  $p$  称为仿射投影维数。  $A(n)$  的计算如下:

$$A(n) = [g(y(n)), g(y(n-1)), \dots, g(y(n-p+1))]^T \quad (9)$$

准则(8)中,  $V(n)$  设计成由  $p$  个  $v(n)$  向量组成,即  $V(n)$  是  $v(n)$  向量数据的重复使用,  $V(n)$  相当于 APA 中的期望矩阵,  $V(n)$  计算如下:

$$V(n) = [v(n), v(n-1), \dots, v(n-p+1)]^T \quad (10)$$

由于在准则(8)中考虑了数据的重复使用,因此把准则(8)称为“非线性 APA-PCA 准则”。但是,当仿射投影维数  $p=1$  时,准则(8)退化为准则(5)。

## 4 APA-非线性 PCA 盲源分离算法

基于非线性 PCA 准则的典型 BSS 算法有:Kalman 算法、RLS 算法、LMS 算法等。下面根据非线性 APA-PCA 准则(8),重新设计这些 BSS 算法。

### 4.1 APA-Kalman 算法

根据非线性 APA-PCA 准则(8)重新设计 BSS 的 Kalman 算法,称之为 BSS 的 APA-Kalman 算法。由于权重矩阵  $W^T(n)$  是时不变的,因此权重矩阵服从以下过程方程:

$$W^T(n+1) = W^T(n) \quad (11)$$

根据准则(8),定义  $e(n) = V(n) - A(n)W^T(n)$  为误差矩阵,观测方程可写成:

$$V(n) = A(n)W^T(n) + e(n) \quad (12)$$

由过程方程(11)和观测方程(12)组成状态空间方程。与标准的过程方程比较,状态向量变成了权重矩阵  $W^T(n)$ ,状态转移矩阵是一个单位矩阵;与标准的观测方程比较,观测向量变成了矩阵  $V(n)$ ,测量矩阵为  $A(n)$ 。盲源分离的 APA-Kalman 算法如下:

1)初始化

设定权重矩阵  $W(n)$ 、预白化矩阵  $U(n)$  的初值。

2)对观测数据向量  $x(n)$  进行预白化处理

$$v(n) = U(n)x(n) \quad (13)$$

3)更新预白化矩阵  $U(n)$

采用文献[21]中的预白化矩阵  $U(n)$ ,更新如下:

$$U(n+1) = U(n) + \eta(n)(I - v(n)v^T(n))U(n) \quad (14)$$

其中,  $\eta(n)$  是学习率。

4)求盲源分离的输出向量

$$y(n) = W^T(n)v(n) \quad (15)$$

5)对  $y(n)$  进行非线性处理

$$z(n) = g(y(n)) = [g(y_1(n)), \dots, g(y_L(n))]^T \quad (16)$$

非线性函数  $g(\cdot)$  的选取原则<sup>[13]</sup>:对亚高斯信号,  $g(\cdot) = \tanh(y)$  或  $g(\cdot) = y^3$ ;对超高斯信号,  $g(\cdot)$  取 Fahlman 类非线性函数。

6)重复利用  $z(n)$  数据  $p$  次来构建  $A(n)$

$$A(n) = [z(n), z(n-1), \dots, z(n-p+1)]^T \quad (17)$$

7)重复利用  $v(n)$  数据  $p$  次来构建  $V(n)$

$$V(n) = [v(n), v(n-1), \dots, v(n-p+1)]^T \quad (18)$$

### 8) Kalman 滤波与权重矩阵更新

$$e(n) = V(n) - A(n)W^T(n) \quad (19)$$

$$m(n) = K(n)A^T(n)[Q(n)I + A(n)K(n)A^T(n)]^{-1} \quad (20)$$

$$K(n+1) = K(n) - m(n)A(n)K^T(n) \quad (21)$$

$$W(n+1) = W(n) + m(n)e(n) \quad (22)$$

最后令  $n=n+1$ , 转到步骤 2), 继续循环。

在 Kalman 滤波中,  $K(n)$  是预测误差协方差矩阵,  $m(n)$  为增益阵,  $Q_n = \|e(n)\|^2$ 。若仿射投影维数  $p=1$ , 则 APA-Kalman 算法退化为文献[14]中的盲源分离 Kalman 算法。

### 4.2 APA-RLS 算法

同理, 采用非线性 APA-PCA 准则(8)重新设计文献[13]中的盲源分离 RLS 算法, 称之为 BSS 的 APA-RLS 算法。对  $x(n)$  进行预白化处理后, 可求得  $v(n)$  和  $y(n)$ , 则可设计出 BSS 的 APA-RLS 算法如下:

$$K(n) = P(n)A^T(n)[\lambda I + A(n)P(n)A^T(n)]^{-1} \quad (23)$$

$$P(n+1) = \frac{1}{\lambda}(P(n) - K(n)A(n)P(n)) \quad (24)$$

$$e(n) = V(n) - A(n)W(n) \quad (25)$$

$$W(n+1) = W(n) + K(n)e(n) \quad (26)$$

其中,  $A(n)$  和  $V(n)$  的求法与前面相同,  $\lambda$  是加权因子。若仿射投影维数  $p=1$ , 则 APA-RLS 算法退化为文献[13]中的盲源分离 RLS 算法。

### 4.3 APA-LMS 算法

同理, 采用非线性 APA-PCA 准则(8)重新设计文献[11]中的盲源分离 LMS 算法, 称之为 BSS 的 APA-LMS 算法。对  $x(n)$  进行预白化处理后, 可求得  $v(n)$  和  $y(n)$ , 则可设计出 BSS 的 APA-LMS 算法如下:

$$e(n) = V(n) - A(n)W(n) \quad (27)$$

$$W(n+1) = W(n) + \mu A^T(n)e(n) \quad (28)$$

其中,  $A(n)$  和  $V(n)$  的求法与前面相同,  $\mu$  是加权因子。若仿射投影维数  $p=1$ , 则 APA-LMS 算法退化为文献[11]中的盲源分离 LMS 算法。

### 4.4 收敛性能与计算复杂度

文献[22]分析了 APA 的收敛性能: 增加仿射投影维数  $p$  可提高收敛速度, 但收敛速度与  $p$  呈指数关系, 即当  $p$  增加到一定值后, 收敛速度增加就不明显了, 所以  $p$  并不是越大越好。

表 1 是更新一次权系数矩阵  $W(n)$  所需要的 3 种算法的计算复杂度。

表 1 3 种算法的计算复杂度

算法	乘法次数	加法次数
APA-LMS 式(27)、式(28)	$(2p+1)m^2$	$2pm^2$
APA-RLS 式(23)–式(26)	$(6p+1)m^2 + 2p^2m$	$6pm^2 + (2p^2 - 4p)m$
APA-Kalman 式(19)–式(22)	$O(p^3) + 4pm^2 + 4p^2m$	$O(p^3) + 6pm^2 + (2p^2 - 4p)m$

表中,  $p$  是仿射投影维数,  $m$  是观测数据向量维数。从表 1 可知, 新算法增加了计算量, 仿射投影维数  $p$  越大, 计算量也越大。考虑其它加法、乘法计算, 仿真实验表明, 将  $p=3$  与  $p=1$  相比较, APA-LMS 算法的运行时间略增加, APA-RLS 和 APA-Kalman 算法的运行时间约增加 10%。

## 5 仿真实验

### 5.1 盲源分离仿真

下面以 APA-Kalman 盲源分离算法为例(为节省篇幅, APA-RLS 与 APA-LMS 算法的仿真略)进行仿真实验。假设源信号的个数已知( $m=j=5$ ), 进行仿真实验的 5 个源信号如下。

s1: 符号信号  $\text{sgn}(\cos(2\pi 155t))$ ;

s2: 高频正弦信号  $\sin(2\pi 800t)$ ;

s3: 低频正弦信号  $\sin(2\pi 90t)$ ;

s4: 相位调制信号  $\sin(2\pi 300t + 6\cos(2\pi 60t))$ ;

s5: 在  $[-1, 1]$  均匀分布的随机噪声。

$s(n) = [s_1(n), \dots, s_5(n)]^T$  中的 5 个信号波形如图 1 所示。

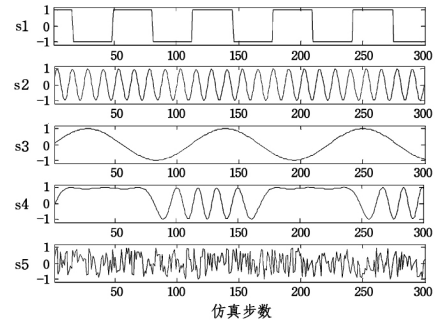


图 1  $s(n)$  中的 5 个源信号

在 MATLAB 仿真实验中, 混合矩阵  $M$  和权重矩阵  $W(n)$  初始都是在  $[-1, 1]$  均匀分布的随机矩阵, 以速率 10kHz 对传感器接收信号进行采样以产生离散观测信号  $x(n)$ 。设仿射投影维数  $p=3$ , 非线性函数  $g(\cdot) = \tanh(\cdot)$ , 预白化矩阵  $U(n)$  的初值为单位阵, 迭代次数为 4000。经过 APA-Kalman 算法后, 最后 300 步迭代盲源分离输出  $y(n)$  的 5 个信号, 如图 2 所示。对照图 1 和图 2 中的波形, 毫无疑问,  $y(n)$  已清晰地重现了  $s(n)$  的 5 个源信号波形,  $y(n)$  是未知源向量  $s(n)$  的拷贝(或估计), 即  $y(n)$  相对于  $s(n)$  只是改变幅值和各分量的排列顺序。

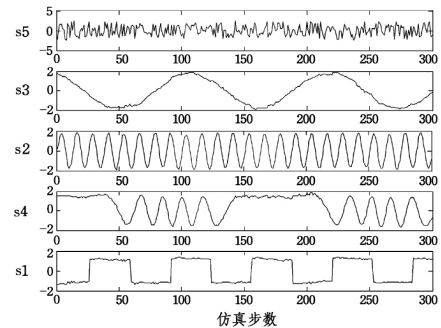


图 2 盲源分离输出  $y(n)$  中的 5 个信号

### 5.2 性能比较仿真

性能指数采用文献[13]中的“串音”误差, 表示如下:

$$E_{ct} = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{ik}|} - 1 \right) + \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^p \frac{|c_{ij}|}{\max_k |c_{kj}|} - 1 \right) \quad (29)$$

其中,  $c_{ij}$  是混合-分离结合矩阵  $C = BM = WUM$  的元素。

进行仿真实验的 5 个源信号、混合矩阵  $M$ 、非线性函数  $g(\cdot)$ 、权重矩阵  $W(n)$  初值、预白化矩阵  $U(n)$  初值及更新、迭

代次数均与前相同,式(24)中的 $\lambda=0.993$ ,式(28)中的 $\mu=0.01$ 。本文仿真主要测试 APA-Kalman, APA-RLS, APA-LMS 新算法的收敛性能,所以仅给出 3 种新算法的不同仿射投影维数  $p$  的 10 次独立运行平均“串音”误差曲线,分别如图 3—图 5 所示。此仿真结果表明, $p=3$  的收敛速度快于  $p=1$  的收敛速度,说明 APA-Kalman, APA-RLS, APA-LMS 新算法是有效的。

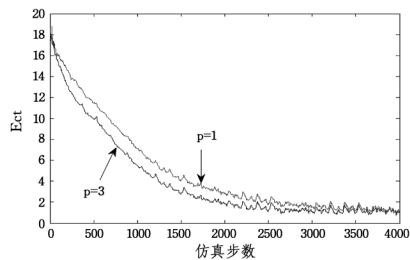


图 3 APA-Kalman 算法收敛性能的比较

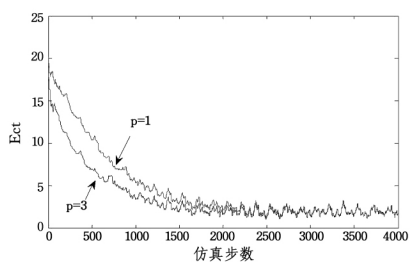


图 4 APA-RLS 算法收敛性能的比较

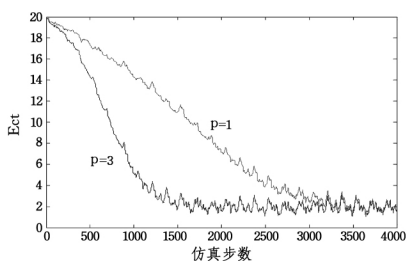


图 5 APA-LMS 算法收敛性能的比较

结束语 APA 重复利用过去的的数据,在输入数据相关性较强的情况下可提高算法收敛速度。本文以 BSS 的非线性 PCA 为基础,结合 APA,提出了 BSS 的非线性 APA-PCA 准则,并以该准则为依据,重新设计出 BSS 的 APA-Kalman, APA-RLS, APA-LMS 新算法。在这些新算法中,预白化后的观测向量数据被重复使用,向量式数据变成矩阵式数据。仿真结果表明了这些新算法具有良好的 BSS 性能,可加快 BSS 的收敛速度,从而表明了非线性 APA-PCA 准则的有效性与普适性。进一步的研究可将 APA 重复使用数据的思路推广到 BSS 的独立分量分析(ICA)算法,也可以尝试在其它领域将其推广。

### 参考文献

[1] Prakash K, Hepzibha R D. Blind Source Separation for Speech Music and Speech Mixtures[J]. International Journal of Computer Applications, 2015, 110(12): 40-43  
 [2] 赵文红,王巍. 盲源分离技术在 AIS 中的应用[J]. 计算机科学, 2013, 40(6A): 217-219

[3] 齐扬阳,于淼. 基于 EMD 的单通道盲源分离跳频通信抗干扰方法[J]. 计算机科学, 2016, 43(1): 149-153  
 [4] Jutten C, Herault J. Blind separation of sources Part I: An adaptive algorithm based on neuromimetic architecture[J]. Signal Processing, 1991, 24(1): 1-10  
 [5] Comon P. Independent component analysis, a new concept? [J]. Signal Processing, 1994, 36(3): 287-314  
 [6] Karhunen J, Joutsensalo J. Representation and separation of signals using nonlinear PCA type learning[J]. Neural Networks 1994, 7(1): 113-127  
 [7] 赵礼翔,刘国庆. 基于 Givens 变换矩阵的时间结构信号盲源分离新算法[J]. 计算机科学, 2014, 41(12): 78-90  
 [8] 赵礼翔,刘国庆. 基于 Givens 变换矩阵的和联合非线性不相关的盲源分离新算法[J]. 计算机科学, 2015, 42(5): 149-152  
 [9] 陈海平,张杭,路威,等. 时变混合系统的自适应动量项快速盲源分离算法[J]. 计算机科学, 2013, 40(11A): 19-45  
 [10] 阮宗利,李立萍,钱国兵,等. 基于含噪复值 ICA 信号模型的快速不动点算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1094-1099  
 [11] Oja E. The nonlinear PCA learning rule in independent component analysis[J]. Neurocomputing, 1997, 17(1): 25-45  
 [12] Pajunen P, Karhunen J. Least-squares methods for blind source separation based on nonlinear PCA[J]. Int. J. of Neural Systems, 1998, 8(5/6): 601-612  
 [13] Zhu X L, Zhang X D. Adaptive RLS algorithm for blind source separation using a natural gradient[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2002, 9(12): 432-435  
 [14] Lv Q, Zhang X D, Jia Y. Kalman filtering algorithm for blind source separation[C]// IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP). 2005: 257-260  
 [15] Karhunen J, Oja E, Wang L, et al. A Class of Neural Networks for Independent Component Analysis[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1997, 8(3): 486-504  
 [16] Wang L, Karhunen J. A unified neural bigradient algorithm for robust PCA and MCA[J]. International Journal of Neural Systems, 1996, 7(1): 53-67  
 [17] Wang L, Karhunen J, Oja E. A bigradient optimization approach for robust PCA, MCA, and source separation[C]// IEEE International Conference on Neural Networks, 1995. IEEE, 1995: 1684-1689  
 [18] Sanger T D. Optimal unsupervised learning in a single-layer feedforward neural network[J]. Neural Networks, 1992, 2(6): 459  
 [19] Ozeki K, Umeda T. An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties[J]. Electronics and Communications in Japan (Part I: Communications), 1984, 67(5): 19-27  
 [20] Karhunen J, Pajunen P, Oja E. The nonlinear PCA criterion in blind source separation: relations with others approaches[J]. Neurocomputing, 1998, 22(1): 5-20  
 [21] Cardoso J F, Laheld B H. Equivariant adaptive source separation [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1996, 44(12): 3017-3029  
 [22] Sankaran S G, Beex A A. Convergence behavior of affine projection algorithms [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2000, 48(4): 1086-1096