第 43 卷 第 11A 期
2016 年 11 月
计 算 机 科 学
Computer Science
Vol. 43 No. 11A
Nov 2016

2r-正则图连通圈网络的 Hamilton 分解

师海忠 常立婷 赵 媛 张 欣 王海锋
（西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070）

摘 要 互连网络是超级计算机的重要组成部分。互连网络通常模型化为一个图，图的顶点代表处理机，图的边代表通信链路。2010 年师海忠提出互连网络的正则图连通圈网络模型，设计出了多种互连网络，也提出了一系列猜想。文中证明了 2r-正则图连通圈网络可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，从而证明了当原图为 2r-正则连通图时，这一系列猜想成立。

关键词 互连网络，2r-正则连通图，2r-正则图连通圈网络，Hamilton 圈，完美对集，猜想

中图法分类号 TP393 **文献标识码** A

Hamiltonian Decomposition of 2r-regular Graph Connected Cycles Networks

SHI Hai-zhong CHANG Li-ting ZHAO Yuan ZHANG Xin WANG Hai-feng
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract An Interconnection network is an important part of a supercomputer. The interconnection network is often modeled as an undirected graph, in which the vertices correspond to processor/communication parts, and the edges correspond to communication channels. In 2010, Hai-zhong Shi proposed the model of 2r-regular graph connected cycles, for designing analyzing and improving such networks, and proposed many conjectures. In this paper, we proved that any 2r-regular graph-connected cycles network is a union of edge-disjoint Hamiltonian cycle and a perfect matching. Therefore, we proved that the conjectures are true when primitive graphs are 2r-regular connected graph.

Keywords Interconnection network, 2r-regular connected graph, 2r-regular graph-connected cycle network, Hamiltonian cycle, Perfect matching, Conjecture

1 引言

互连网络是超级计算机的重要组成部分。互连网络通常模型化为一个图，图的顶点对应处理机，图的边对应通信链路。各种已有的互连网络请参见文献[1,2,8,10,12,14-17,19,21-28]。注意，本文中的图与网络是不加区别的，且都是简单连通无向图。

Akers 和 Krishnamurthy[1,2]针对对称互连网络的设计，提出了 Cayley 图模型。Cayley 图模型具有对称性和正则性，而且包括了环网、超立方体、Star 网络和 Pancake 网络等[1,2,12,19]。

超立方体及其变种(如交叉立方体、折叠立方体、Möbius 立方体等)[12-17,19]相继被提出。ILLIAC 型互连网络、循环移数网络等其余循环图的互连网络也相继被提出并付诸实施[12,18]。

以上这些互连网络(除 ILLIAC 型互连网络外)的度都随着其规模(顶点个数)的增大而增大。从实际(即具体计算机的建造)要求来看，常数度网络更易建造。应这一要求，立方连通圈网络、Star 连通圈网络和 Cayley 连通圈网络等互连网络被提了出来[5,6,8,10]。

2010 年，师海忠提出了正则图连通圈网络的概念，它们的度均为 3，同时它包括了立方连通圈、Star 连通圈网络、Cayley 连通圈网络、点可迁图连通圈网络等[21]；还提出了一系列猜想。

2011 年，师海忠提出了互连网络的向量图模型[22]，其把互连网络的设计与向量空间联系起来了。由此模型产生的向量图也是正则图。

2013 年，师海忠提出了互连网络的多部群论模型[24]和几类新的笛卡尔乘积互连网络[25]等，这些也都是正则图。

2015 年，师海忠、师越等相继提出了互连网络的 k 层次环 r 重图模型[26]、层次环群论网络模型[27]以及互连网络的细胞分裂生长图模型[28]。由这些模型设计出的互连网络都是对称的和正则的，进而可考虑相应的正则连通圈网络。

本文考虑的顶点度为偶数的正则图(即 2r-正则图)为原图并按文献[21]中的方法构造出来的。各类正则图连通圈网络的 Hamilton 分解，即把 2r-正则图连通圈网络和带弦环网络联系起来。

本文第 2 节介绍 2r-正则图连通圈网络的 Hamilton 分解；第 3 节为关于正则图连通圈网络的一系列猜想[21]；第 4

师海忠(1962－)，男，博士，教授，主要研究方向为互连网络设计与分析、有(无)向图语言、随机图语言、(V,R)-语言、(V,R)-半群等，E-mail：haizhong.shi@163.com；常立婷(1991－)，女，硕士生，主要研究方向为网络科学语言；赵 媛(1993－)，女，硕士生，主要研究方向为网络科学语言；张 欣(1992－)，女，硕士生，主要研究方向为网络科学语言；王海锋(1981－)，男，硕士生，主要研究方向为网络科学语言。

节介绍各种具体连通圈网络的 Hamilton 分解；最后总结全文。

2 2r-正则图连通圈网络的 Hamilton 分解

2.1 正则图连通圈网络

定义 1 设 $\Gamma_{n,d}$ 是度为 $d(d\geqslant 3)$ 的 n 阶正则图，称为原图。用 d 长的圈 C_d 代替 Γ_d 中的每个顶点，且 C_d 的每个顶点位于且仅位于 Γ_d 中与该顶点关联的一条边上，这样得到的 3-正则图称为由 $\Gamma_{n,d}$ 生成的正则图连通圈网络，简称正则图连通圈网络，记为 $RGCC(\Gamma_{n,d})$。

易知：

定理 1 $RGCC(\Gamma_{n,d})$ 是 3-正则的，顶点数为 dn，边数为 $\frac{3}{2}dn$。

定义 2 对正整数 $r\geqslant 2$，在定义 1 中，取 $d=2r$，则称 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 为 2r-正则图连通圈网络。

易知：

定理 2 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 是 3-正则的，顶点数为 $2rn$，边数为 $3rn$。

2.2 正则图 G 的 Hamilton 分解

定义 3[3] 设 G 是正则图，$E(G)$ 是 G 的边集。称 G 是 Hamilton 可分解的，如果

要么：

(i) $\deg(G)=2k$ 且 $E(G)$ 能被划分成 k 个 Hamilton 圈；

要么：

(ii) $\deg(G)=2k+1$ 且 $E(G)$ 能被划分成 k 个 Hamilton 圈和一个完美对集。

这里 $\deg(G)$ 表示 G 的顶点度。

2.3 2r-正则图连通圈网络的 Hamilton 分解

定义 4[4] 设 G 是一个图，G 的 Euler 回是指经过每条边恰好一次的回。

定义 5[4] 一个图若包含 Euler 回，则称这个图为 Euler 图。

引理 1[4] 一个非空连通图是 Euler 图当且仅当该图的每个顶点度均为偶数。

对于原图 2r-正则连通图 $\Gamma_{n,2r}$，我们有：

定理 3 2r-正则连通图 $\Gamma_{n,2r}$ 有 Euler 回。

定理 4 2r-正则图连通圈网络 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 是 Hamilton 可分解的，也就是说，$RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

证明：由定理 3 可知，$\Gamma_{n,2r}$ 有一个 Euler 回，记为 $v_1e_1v_2e_2\cdots e_mv_1$，其中 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是 $\Gamma_{n,2r}$ 的边集。对 $\Gamma_{n,2r}$ 的任一顶点 v，因为 v 的度为 $2r$，所以和 v 关联的边有 $2r$ 条。这 $2r$ 条边在 Euler 回 $v_1e_1v_2e_2\cdots e_mv_1$ 中共配成相邻的 r 对，即要么是 $e_{2i}e_{2i+1}$，要么是 $e_{2i+1}e_{2i}$，这里 $i=i_1^v,i_2^v,\cdots,i_r^v$，且 $i_1^v<i_2^v<\cdots<i_r^v$，不妨均设为 $e_{2i}e_{2i+1}$。具体说，就是 $e_{2i_1^v}e_{2i_1^v+1},e_{2i_2^v}e_{2i_2^v+1},\cdots,e_{2i_r^v}e_{2i_r^v+1}$。当对 $\Gamma_{n,2r}$ 中顶点 v 用一个圈 C_{2r}^v 代替得到的 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 时，给该圈依次标号 $(1,v),(2,v),\cdots,(2r,v)$ 且 C_{2r}^v 中顶点 $(2k,v)$ 与 $e_{2i_k^v+1}$ 关联，这里 $k=1,2,\cdots,r$。显然圈 C_{2r}^v 为 $(1,v)-(2,v)-\cdots-(2r,v)-(1,v)$。这样就把 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 的每个顶点 (i,v) 嵌入 Euler 回 $v_1e_1v_2e_2\cdots e_mv_1$ 中，得到 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 的一个 Hamilton 圈。剩余的边构成 $RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 的一个完美对集。且该 Hamilton 圈与该完美对集是边不交的。

总之，$RGCC(\Gamma_{n,2r})$ 是 Hamilton 可分解的。

推论 1 若 $\Gamma_{n,2r+1}$ 有完美对集 M，且 $\Gamma_{n,2r+1}-M$ 是连通的，则

(i) $\Gamma_{n,2r+1}-M$ 有 Euler 回；

(ii) $RGCC(\Gamma_{n,2r+1})$ 有 Hamilton 圈；

(iii) $RGCC(\Gamma_{n,2r+1})$ 是 Hamilton 可分解的。

3 关于正则图连通圈网络的一系列猜想[21]

3.1 Cayley 图连通圈互连网络

设 G 是任意有限群且有单位元 1；Ω 是 G 的一个生成集且具有如下性质：

(i) $x\in\Omega\Rightarrow x^{-1}\in\Omega$；

(ii) $1\notin\Omega$。

定义 6[3] Cayley 图 $\Gamma=\Gamma(G,\Omega)$ 是一个简单图且其定点集和边集如下：

$V\Gamma=G;E\Gamma=\{\{g,h\}\mid g^{-1}h\in\Omega\}$

当 $|G|=n,|\Omega|=d$ 时，Cayley 图 $\Gamma(G,\Omega)$ 记为 Γ_n^d。

易知 $\Gamma(G,\Omega)$ 是一个连通图。一个简单图 Γ 的一个自同构是 $V\Gamma$ 上的一个置换 π 具有下述性质：$\{u,v\}$ 是 Γ 的一条边当且仅当 $\{\pi(u),\pi(\mathrm{v})\}$ 是 Γ 的一条边。

Γ 的所有自同构组成的集合连同复合运算构成一个群，称为 Γ 的自同构群，记为 $Aut(\Gamma)$。

称 Γ 是点可迁的，如果给定 Γ 的任意两个顶点 u 和 v，就一定存在一个自同构 $\pi\in Aut(\Gamma)$ 是 $\pi(u)=v$。

定理 5[3] Cayley 图是点可迁的。

设 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 是 $\langle n\rangle=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 上的一个置换，这置换 π_i 表示在第 i 个位置上的元素。如果 $\pi=(ij)$，其中 $i,j\in\langle n\rangle$，则称 π 为一个对换。$\langle n\rangle$ 上的所有置换组成的集合记为 S_n。S_n 关于置换的复合构一个群，称为 n 阶对称群，仍记为 S_n。Cayley 图 $\Gamma(S_n,\Omega)$ 称为对称群 Cayley 图。

Cayley 图 $\Gamma(S_n,\Omega)$ 随着 Ω 的不同可生成各种互连网络[1,2,8,12]：

1) $\Omega=\{i23\cdots(i-1)1(i+1)\cdots n\mid 2\leqslant i\leqslant n\}$，则称 $\Gamma(S_n,\Omega)$ 为 Star 网络，记为 ST_n[1,2]。

2) $\Omega=\{12\cdots(i-1)(i+1)(i+2)\cdots n\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$，则称 $\Gamma(S_n,\Omega)$ 为冒泡排序网络（Bubble sort network），记为 BS_n[2]。

3) $\Omega=\{i(i-1)3\cdots 21(i+1)\cdots n\mid 2\leqslant i\leqslant n\}$，则称 $\Gamma(S_n,\Omega)$ 为煎饼网络（Pancake network），记为 PC_n[2]。

4) $\Omega=\{(2i-1)(2i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$，则称 $\Gamma(\langle\Omega\rangle,\Omega)$ 为 n 维二元超立方体 Q_n，简称 n 立方体[8]。

5) $\Omega=\{(2i-1)(2i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}\cup\{(12)(34)\cdots((2n-1)(2n))\}$，则称 $\Gamma(\langle\Omega\rangle,\Omega)$ 为折叠超立方体 FHC_n[8]。

更多 Cayley 图互连网络请参见文献[8]。

基于 Star 网络，S. Latifi 等提出了 Star 连通圈互连网络[7]。

基于 Cayley 网络，S. R. Öhring 等提出了 Cayley 连通圈互连网络[8]。

定义 7 在定义 1 中 $\Gamma_{n,d}$ 分别取 Cayley 图 Γ_n^d、Star 网络 ST_n、冒泡排序网络 BS_n、煎饼网络 PC_n、n-立方体 Q_n、折叠超立方体 FHC_n 以及对称群 Cayley 图 $\Gamma(S_n,\Omega)$ 得到相应的正

则图连通圈网络，依次为 Cayley 图连通圈网络 $CGCC(\Gamma_n^d)$、Star 连通圈网络 $SCC(n)$、冒泡排序连通圈网络 $BSCC(n)$、煎饼连通圈网络 $PCCC(n)$、立方连通圈网络 $CCC(n)$、折叠超立方体连通圈网络 $FHCCC(n)$ 以及对称群连通圈网络 $CC(S_n^d)$。

猜想 1[21] Star 网络连通圈网络 $SCC(n)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

猜想 2[21] 冒泡排序连通圈网络 $BSCC(n)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

猜想 3[21] 煎饼连通圈网络 $PCCC(n)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

猜想 4[21] 立方连通圈网络 $CCC(n)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

猜想 5[21] 折叠超立方体连通圈 $FHCCC(n)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

猜想 6[21] 对称群连通圈网络 $CC(S_n^d)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

猜想 7[21] Cayley 图连通圈网络 $CGCC(\Gamma_n^d)$ 可分解为边不交的一个 Hamlitonian 圈和一个完美对集的并。

3.2 各种立方体连通圈互连网络

定义 8 n-立方体 Q_n 定义如下无向图 $G=(V,E)$，$V=\{x_1x_2\cdots x_n : x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}$；$E=\{\{x_1x_2\cdots x_n, y_1y_2\cdots y_n\} \mid \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1\}$。

易知，这一定义与 3.1 节中的 4）是等价的。

两个 2 元序列 $x=x_2x_1$ 和 $y=y_2y_1$ 称为相关对，记为 $x\sim y$，当且仅当 $(x,y)\in\{(00,00),(10,10),(01,11),(11,01)\}$。

定义 9[17] n 维交叉立方体（Crosssed hypercube）记为 $CQ_n(n\geqslant 2)$，是一个无向图。它的顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_n : x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}$，两顶点 $x=x_n\cdots x_2x_1$ 和 $y=y_n\cdots y_2y_1$ 相邻，当且仅当存在 $j(1\leqslant j\leqslant n)$，使得

（a）$x_n\cdots x_{j+1}=y_n\cdots y_{j+1}$；

（b）$x_j\neq y_j$；

（c）$x_{j-1}=y_{j-1}$，如果 j 是偶数；

（d）$x_{2i}x_{2i-1}\sim y_{2i}y_{2j-1}$，$i=1,2,\cdots,\left\lceil \frac{1}{2}j\right\rceil-1$。

定义 10[15] n 维折叠超立方体（folded hypercube），记为 FQ_n，是一个无向图。它的两顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当，要么 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1$，要么 $\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=n$。

定义 11[16] n 维 Möbius 超立方体，记为 MQ_n，是无向图。它的顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_n : x_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots,n\}$，顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 连到 n 个另外顶点 $y_i(1\leqslant i\leqslant n)$：

$$y_i=\begin{cases} x_1x_2\cdots x_{i-1}\overline{x_i}x_{i+1}\cdots x_n, & x_{i-1}=0 \\ x_1x_2\cdots x_{i-1}\overline{x_i}\,\overline{x_{i+1}}\cdots\overline{x_n}, & x_{i-1}=1 \end{cases}$$

由定义可知，x 与 y_1 之间是否有边由 x_0 确定，于是当 $x_0=0$ 时，该网络称为 0-Möbius 立方体；$x_0=1$ 时，该网络称为 1-Möbius 立方体，分别表示为 $0\text{-}MQ_n$ 和 $1\text{-}MQ_n$。

定义 12[17] n 维广义立方体（generalized hypercube）$Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_i\geqslant 2$ 且为整数，$i=1,2,\cdots,n)$ 定义为如下无向图，顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_n : x_i\in\{0,1,\cdots,d_i-1\}, i=1,2,\cdots,n\}$，两顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当它们有一个坐标不同。

定义 13 n 维无向超环面网络（undirected toroidal mesh）$C(d_1,d_2,\cdots d_n)(d_i\geqslant 3$ 且为整数，$i=1,2,\cdots,n)$ 是无向图，顶点集 $V=\{x_1x_2\cdots x_n : x_i\in\{0,1,\cdots,d_i-1\}, i=1,2,\cdots,n\}$，两顶点 $x=x_1x_2\cdots x_n$ 和 $y=y_1y_2\cdots y_n$ 相邻当且仅当存在 $i=\{1,2,\cdots,n\}$ 使得：

$$\begin{cases} |y_j-x_j|=0, & j\neq i \\ |y_j-x_j|=1(\mathrm{mod}\ (d_j)), & j=i \end{cases}$$

定义 14 在定义 1 中 $\Gamma_{n,d}$ 分别取 n-立方体 $Q_n(n\geqslant 3)$、n 维交叉立方体 $CQ_n(n\geqslant 3)$、n 维折叠立方体 $FQ_n(n\geqslant 3)$、n 维 Möbius 超立方体 $0\text{-}MQ_n(n\geqslant 3)$、$n$ 维 Möbius 超立方体 $1\text{-}MQ_n(n\geqslant 3)$、$n$ 维广义立方体 $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_1+\cdots+d_n-n\geqslant 3)$ 以及 n 维无向超环面网络 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_1+\cdots+d_n-n\geqslant 3)$，分别得到相应的正则图连通圈网络，分别称为立方体连通圈网络 $CCC(n)$、n 维交叉立方体连通圈网络 $CQCC(n)$、n 维折叠立方体连通圈网络 $FQCC(n)$、Möbius 立方体连通圈网络 $0\text{-}MQCC(n)$、Möbius 立方体连通圈网络 $1\text{-}MQCC(n)$、n 维广义立方体连通圈网络 $GQCC(n)(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 以及 n 维超环面连通圈网络 $UTMCC(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$。

注意，$FHCCC(n)$ 和 $FQCC(n)$ 是同一网络的两种不同表现形式。

在文献[21]中，师海忠提出如下猜想：

猜想 8[21] CQ_n、FQ_n、$0\text{-}MQ_n$、$1\text{-}MQ_n$、$Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$、$C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$、$CQCC(n)(n\geqslant 3)$、$0\text{-}MQCC(n)(n\geqslant 3)$、$CCC(n)(n\geqslant 3)$、$FQCC(n)(n\geqslant 3)$、$1\text{-}MQCC(n)(n\geqslant 3)$、$GQCC(n)(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$、$UTMCC(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 均是 Hamilton 可分解的。

3.3 可迁连通圈互连网络

定义 15[3] 设 Γ 是一个图，其自同构群为 $Aut(\Gamma)$，本文称它是对称的，如果对满足 u 与 v 相邻的任意 u,v,x,y 均存在一个自同构 $\pi\in Aut(\Gamma)$ 使得 $\pi(u)=x$ 且 $\pi(v)=y$。本文称 Γ 是距离可迁的，如果对使得 $\partial(u,v)=\partial(x,y)$（这里 $\partial(u,v)$ 表示 u 与 v 在 Γ 中的距离）的所有 u,v,x,y 都存在一个自同构 $\alpha\in Aut(\Gamma)$ 使得 $\alpha(u)=x$ 且 $\alpha(v)=y$。

易知，距离可迁⇒对称⇒点可迁。

定义 16 设 Γ_d 是度为 $d(d\geqslant 3)$ 的点可迁连通图（对称连通图，距离可迁连通图），在定义 1 中，取 $\Gamma_{n,d}$ 为 Γ_d 得到相应的正则图连通圈网络，分别称为点可迁连通圈网络 $VTCC(\Gamma_d)$（对称连通圈网络 $SYCC(\Gamma_d)$，距离可迁连通圈网络 $DTCC(\Gamma_d)$）。

猜想 9[21] 点可迁连通圈网络 $VTCC(\Gamma_d)(d\geqslant 3)$、对称连通圈网络 $SYCC(\Gamma_d)(d\geqslant 3)$ 以及距离可迁连通圈网络 $DTCC(\Gamma_d)(d\geqslant 3)$）、对称连通圈、距离可迁连通圈都是 Hamilton 可分解的。

4 各种典型连通圈网络的 Hamilton 分解

由定理 4 推出推论 2—推论 4。

推论 2 1）当 $n(n\geqslant 4)$ 是奇数时，Star 网络是 $n-1$ 正则的，Star 连通圈网络 $SCC(n)$ 可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 4)$ 为奇数时，猜想 1 成立。

2）当 $n(n\geqslant 4)$ 是奇数时，冒泡排序网络 BS_n 是 $n-1$ 正则的，冒泡排序连通圈网络 $BSCC(n)$ 可分解为边不交的一个

Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 4)$为奇数时，猜想 2 成立。

3)当 $n(n\geqslant 4)$是奇数时，煎饼网络 PC_n 是 $n-1$ 正则的，煎饼连通圈网络 $PCCC(n)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 4)$为奇数时，猜想 3 成立。

4)当 $n(n\geqslant 4)$是偶数时，超立方体 Q_n 是 n 正则的，立方连通圈网络 $CCC(n)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 4)$为偶数时，猜想 4 成立。

5)当 $n(n\geqslant 4)$是偶数时，折叠立方体 FQ_n（或 FHC_n）是 n 正则的，折叠立方体连通圈网络 $FQCC(n)$（或 $FHCCC(n)$）可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 4)$为偶数时，猜想 5 成立。

6)当 $d(d\geqslant 3)$是偶数时，对称群 S_n 的 Cayley 图 S_n^d 是 d 正则的，对称群连通圈网络 $CC(S_n^d)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $d(d\geqslant 3)$为偶数时，猜想 6 成立。

7)当 $d(d\geqslant 3)$是偶数时，Cayley 图 Γ_n^d 是 d 正则的，Cayley 图连通圈网络 $CGCC(\Gamma_n^d)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $d(d\geqslant 3)$为偶数时，猜想 7 成立。

推论 3 1)当 $n(n\geqslant 3)$是偶数时，交叉立方体 CQ_n 是 n 正则的，交叉立方连通圈网络 $CQCC(n)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 3)$为偶数时，$CQCC(n)$是 Hamilton 可分解的。

2)当 $n(n\geqslant 3)$是偶数时，Möbius 立方体 $0\text{-}MQ_n$ 是 n 正则的，*Möbius* 立方连通圈网络 $0\text{-}MQCC(n)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 3)$为偶数时，$0\text{-}MQCC(n)$是 Hamilton 可分解的。

3)当 $n(n\geqslant 3)$是偶数时，*Möbius* 立方体 $1\text{-}MQ_n$ 是 n 正则的，Möbius 立方连通圈网络 $1\text{-}MQCC(n)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $n(n\geqslant 3)$为偶数时，$1\text{-}MQCC(n)$是 Hamilton 可分解的。

4)当 $d_1+d_2+\cdots+d_n-n(n\geqslant 3)$是偶数时，广义立方体网络 $Q(d_1,d_2,\cdots,d_n)$($d_i\geqslant 2$ 是整数，$i=1,2,\cdots,n$)是 $d_1+d_2+\cdots+d_n-n$ 正则的，广义立方体连通圈网络 $GQCC(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即当 $d_1+d_2+\cdots+d_n-n(n\geqslant 3)$为偶数时，$GQCC(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_i\geqslant 2,i=1,2,\cdots,n)$是 Hamilton 可分解的。

5)$n(n\geqslant 2)$维无向超环面网络 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)(d_i\geqslant 3$ 是整数，$i=1,2,\cdots,n)$是 $2n$ 正则的，n 维无向超环面连通圈网络 $UTMCC(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)(n\geqslant 2)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即 $UTMCC(n,d_1,d_2,\cdots,d_n)$是 Hamilton 可分解的。

推论 4 1)设 Γ_d 是度为 $d(d\geqslant 3)$的点可迁连通图，当 d 为偶数时，点可迁连通圈网络 $VTCC(\Gamma_d)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即 $VTCC(\Gamma_d)$是 Hamilton 可分解的。

2)设 Γ_d 是度为 $d(d\geqslant 3)$的对称连通图，当 d 为偶数时，对称连通圈网络 $SYCC(\Gamma_d)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即 $SYCC(\Gamma_d)$是 Hamilton 可分解的。

3)设 Γ_d 是度为 $d(d\geqslant 3)$的距离可迁连通图，当 d 为偶数时，距离可迁连通圈网络 $DTCC(\Gamma_d)$可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并，即 $DTCC(\Gamma_d)$是 Hamilton 可分解的。

结束语 文献[21]中，师海忠指出：正则图连通圈网络是对各类连通圈网络的统一，通过研究正则连通圈网络 $RGCC(\Gamma_{n,d})$的性质，就可知各类连通圈网络的共性，达到事半功倍的效果。

在本文中，定理 4 的证明印证了上述预言。对于文献[22-28]中设计出来的互连网络，只要是正则图，都可作为原图，并生成相应的正则图连通圈网络。此时，当原图为偶数度正则图时，相应的正则连通圈网络是 Hamilton 可分解的，即可分解为边不交的一个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

参考文献

[1] Akers S B, Harel D, Krishnamurthy B. The star graph: An attractive alternative to the n-cube[C]// Proceeding of the 1987 International conference on Parallel Processing. The Pennsylvania University Press, 1987: 393-400

[2] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks[J]. IEEE Transactions on Computers, 1989, 38(4): 555-565

[3] Biggs N. Algebraic Graph theory (second edition)[M]. Cambridge University Press, 1993

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. Macmillan Press Ltd, London and Basingstoke, 1976

[5] Azevedo M M, Bagherzadeh N, Latifi S. Fault-diameter of the Star-connected cycles interconnection network[C]// Proceeding of the 28th Annual Hawaii International Conference on System Sciences. Vol. II (Software Technology), Maui, Hawaii, 1995, 469-478

[6] Carlsson G E, Cruthirds J E, Sexton H B, et al. Interconnetion networks based on a generalization of Cube-connected cycles [J]. IEEE Transactions on Computers, 1985, 34(8): 769-772

[7] Latifi S, Azevedo M M, Bagherzadeh N. The star connected cycles: A fixed-degree network for parallel processing[C]// 1993 International Conference on Parallel (ICPP'93). 1993: 91-95

[8] Ohring S R, Sarkar F, Hohndel D H. Cayley graph connected cycles: A new class of fixed-degree Interconnection networks[C]// Proceeding of the 28th Annual Hawaii International Conference on System Science. 1995: 479-488

[9] Xu Min, Hu Xiao-dong, Zhu Qiang. Edge-biupancyclicity of star graph under edge-fault tolerant[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 183(2): 927-929

[10] 师海忠. 互连网络的代数环模型[D]. 北京：中国科学院应用数学研究所，1998

[11] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京：高等教育出版社，2009

[12] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京：科学出版社，2007

[13] Saad Y, Schltz M H. Topological properties of Hypercubes[J]. IEEE Transactions on Computer, 1988, 37(7): 867-872

[14] Efe K. A variation on the hypercube with lower diameter [J]. IEEE Transactions on Computer, 1991, 40(11): 1312-1316

[15] Ei-Amawy A, Latifi S. Properties and performance of folded hypercubes[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1991, 2(1): 31-42

[16] Cull P, Larson S M. The MObius Cube[J]. IEEE Transactions on Computer, 1995, 44(5): 647-659

（下转第 319 页）

channel. connect(" DataTransfer");//连接到名为 DataTransfer 的集群
//发送消息
RspList rl=dispatcher. castMessage(null,msg,GroupRequest. GET_NONE,0);

从节点发送的消息格式为:[本机 ip & 发送目的标识 & 批数 & 成功标识],其中发送目的标识为 1 代表返回消息,2 代表发送消息,成功标识为 c1 代表发送成功,c2 代表发送失败,批数为数据交换的批号;主节点发送的消息格式为:[本机 ip & 发送目的标识 & 批数 & 目的从机 ip],其中,发送目的标识为 z1 表示发送消息。

3.2 性能分析

数据交换客户端和服务器端的所有服务器均处于各自的同一局域网内。测试数据中客户端数据库的本地数据量为 78 万条,服务器端数据库本地数据量为 630 万条,数据交换量为 16 万条。

在局部网环境下,使用 5 台服务器搭建分布式缓存测试环境,并通过 VMWARE 软件进行虚拟节点的安装与配置,各个虚拟节点采用桥接的模式通过服务器桥接到局域网环境中。

实验分别采用 3 种方案:

方案 1 原系统所采用的数据交换方案。

方案 2 采用一致哈希算法分布式缓存方案。

方案 3 采用基于本体的 KNN 算法改进的分布式缓存数据交换方案。

具体实验配置见表 1。

表 1 实验配置

实验	节点数	仿真次数
1	10	10
2	100	10

在两个实验中,3 个方案各运行 10 次,每次的数据都经过校验,确认传输完整且成功,然后计算每个方案数据交换的实际时间的平均值。数据交换方案的测试结果如图 3、图 4 所示。

由图 3、图 4 可知,在节点数较少的情况下,方案 2 与方案 3 相差不大,随着节点数的增多,方案 3 在用时方面略大于方案 2。排除网络及测试误差等因素后,本文提出的基于本体 KNN 的分布式缓存数据交换策略能够提升系统的数据交换效能,具有一定的实用价值。

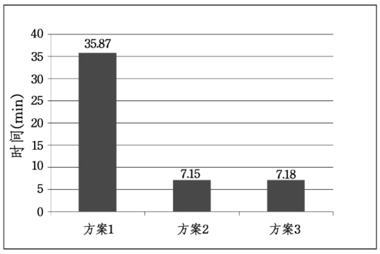

图 3 实验 1 数据交换方案的测试结果

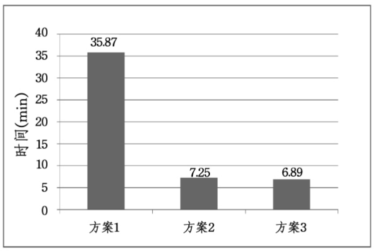

图 4 实验 2 数据交换方案的测试结果

结束语 本文以国家开放大学教务管理系统为例,以数据资源获取的时间开销,以及数据质量作为目标,设计了基于本体 KNN 的分布式缓存数据交换策略能。仿真实验结果表明,该策略可以进一步优化数据交换过程,进而提升系统的整体性能,具有一定的实用价值。

参考文献

[1] 秦秀磊,张文博,魏峻,等. 云计算环境下分布式缓存技术的现状与挑战[J]. 软件学报,2013,24(1):50-66

[2] 罗军,陈席林,李文生. 高效 Key-Value 持久化缓存系统的实现[J]. 计算机工程,2014,40(3):33-38

[3] 奉国和,吴敬学. KNN 分类算法改进研究进展[J]. 图书情报工作,2012,56(21):97-100

[4] Min Jun-ki, Lee M Y. DICE: An Effective Query Result Cache for Distributed Storage Systems [J]. Journal of Computer Science & Technology, 2010, 25(5): 933-944

[5] 胡丽聪,徐雅静,徐惠民. 基于动态反馈的一致性哈希负载均衡算法[J]. 微电子学与计算机,2012,29(1):177-180

[6] 王立,邸瑞华. 分布式本体集成框架下虚拟本体集合动态生成算法[J]. 计算机工程与设计,2010,31(24):5183-5186

(上接第 307 页)

[17] Efe K. The Crossed cube architecture for parallel computation [J]. IEEE Transactions on Parallel and distributed systems, 1998, 3(5): 513-523

[18] Hwang, Briggs F A. Computer architecture and Parallel processing[M]. McGrawHill College, 1984

[19] Hsu L H, Lin C K. Graph theory and Interconnection networks [M]. New York: CRC Press, 2009

[20] Bhuyan L N, Agrawal D D. Greneralized hypercube and hyperbus structures for a computer network[J]. IEEE Transactions on Computer, 1994, 33(4): 323-333

[21] 师海忠. 正则图连通圈:多种互连网络的统一模型[C]// 中国运筹学会第十届学术交流会论文集. 北京,2010:202-208

[22] 师海忠,牛攀峰,马继勇,等. 互连网络的向量图模型[J]. 运筹学学报,2011,15(3):115-123

[23] 师海忠,路建波. 关于互连网络的几个猜想[J]. 计算机工程与应用,2008,44(31):112-115

[24] 师海忠. 互连网络的新模型:多部群论模型[J]. 计算机科学,2013,40(9):21-24

[25] 师海忠. 几类新的笛卡尔乘积互连网络[J]. 计算机科学,2013,40(6A):265-270

[26] Shi Hai-zhong, Shi Yue. A new model for interconnection network: k-hierarchical ring and r-layer graph network[OL]. http://vdisk. weibo. com/s/dliJyfer2-2l

[27] Shi Hai-zhong, Shi Yue. A hierarchical ring group-theoretic model for interconnection networks[OL]. http://vdisk. weibo. com/s/dlizJyfeBX-2J

[28] Shi Hai-zhong, Yue Shi. Cell-breading graph model for interconnection networks [OL]. http://vdisk. weibo. com/s/dlizJyfesb05y