第 43 卷 第 11A 期
2016 年 11 月

计 算 机 科 学
Computer Science

Vol. 43 No. 11A
Nov 2016

GMRES 算法求解烟雾仿真 N-S 方程

李修昌[1,3] 段 锦[1,3] 祝 勇[2] 肖 博[1]
（长春理工大学电子信息工程学院 长春 130022）[1] （长春理工大学计算机科学技术学院 长春 130022）[2]
（长春理工大学空间光电技术研究所 长春 130022）[3]

摘 要 烟雾在大规模战场仿真和复杂环境仿真中扮演着重要角色，因此研究烟雾仿真具有重大意义。提出用广义极小残差算法（GMRES）来求解烟雾仿真中的 N-S 方程。首先给出 GMRES 算法的计算原理；其次用 GMRES 算法对烟雾仿真 N-S 方程进行求解，并对求解结果进行收敛性分析，分析结果表明 GMRES 算法可以对烟雾仿真 N-S 方程进行求解，结果收敛；最后运用 GMRES 算法通过计算机技术对烟雾进行可视化仿真，仿真结果表明，采用 GMRES 求解算法的烟雾仿真效果比较真实，基本符合现实中的烟雾。

关键词 GMRES 算法，N-S 方程，收敛性分析，烟雾仿真
中图法分类号 TP391.9 **文献标识码** A

GMRES Algorithm to Solve Navier-Stokes Equation of Smoke Simulation

LI Xiu-chang[1,3] DUAN Jin[1,3] ZHU Yong[2] XIAO Bo[1]
(School of Electronic and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)[1]
(School of Computer Science and Technology, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)[2]
(Institute of Space Optoelectronics Technology, Changchun University of Science and Technology, Changchun, 130022, China)[3]

Abstract Smoke plays an important role in large-scale battlefield simulation and complex environment simulation, so the smoke simulation is of great significance. A generalized minimal residual algorithm (GMRES) to solve smoke simulation of N-S equation was presented . The calculation principle of GMRES algorithm is given first. Secondly, GMRES algorithm for smoke simulation are applied to solve the navier-stokes equation and the solving result convergence analysis, and the analysis results show that when GMRES algorithm are applied to solve the smoke simulation navier-stokes equations the results are convergent. Finally GMRES algorithm of smoke visualization simulation through computer technology is used, and the simulation results show that smoke simulation effect of the algorithm is real, basic in line with the reality of smoke.

Keywords GMRES algorithm, Navier-Stokes equation, Convergence analysis, Smoke simulation

自然现象的仿真一直是虚拟现实领域的重要研究内容之一，也是计算机图形学的重要研究课题。在流体自然现象的研究中，对烟雾仿真的研究在大规模战场仿真、火灾安全评估、影视效果等方面起到至关重要的作用，尤其在大规模战场仿真中，烟雾仿真的逼真度和实时性尤其重要，因此国内外学者提出了许多有效的烟雾仿真的理论和方法。

从 20 世纪 80 年代至今，人们在不断地寻找仿真烟雾的新方法，2009 年潘远航等在实时降雪和积雪模拟中用 N-S 方程建模风场控制雪花运动[1]，利用 N-S 方程来描述烟雾等流体运动，其运动严格遵循物理规律的约束，能够仿真出逼真的烟雾效果，但是在整个烟雾仿真过程中对 N-S 方程的求解占用了大量时间，不能保证在烟雾仿真中的逼真度和实时性，因此怎样不失真地快速求解 N-S 方程一直是学者们研究的难点和重点。2005 年，Song 等通过增强对流本身来减少耗散[2]，他们采用约束插值剖面法（Constrained Interpolation Profile, CIP）[3]来提高空间精度，但增加了执行的复杂性和计算时间。2006 年周永霞等在采用半拉格朗日求解对流项时引入高阶精度紧致格式弥补了数值耗散[4]。综上所述，基于 N-S 方程烟雾仿真的研究成果大都是围绕如何解决 N-S 方程求解的问题，本文把广义极小残差算法（GMRES）引入 N-S 方程的求解过程中，为烟雾仿真中 N-S 方程的求解带来新的方法和思路，实验结果表明 GMRES 算法可以运用到烟雾仿真 N-S 方程的求解过程中。

1 GMRES 算法的计算原理

Krylov 子空间方法[5-7]是非定常迭代方法，对于线性方程组：

$$Ax=b, A\in R^{n\times n}, x,b\in R^n \tag{1}$$

给定初值 x_0，计算初始残差 $r_0=b-Ax_0$，Krylov 子空间是指 R^n 的子空间：$K_m=span\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \cdots, A^{m-1}r_0\}$，而

李修昌（1991—），男，硕士，主要研究方向为事图像仿真；段 锦（1971—），男，教授，博士生导师，主要研究方向为图像处理、模式识别、光电检测等；祝 勇（1980—），男，讲师，主要研究方向为计算机仿真、图像处理、模式识别；肖 博（1987—），男，博士，主要研究方向为图像目标识别和图像复杂度。

Krylov 子空间方法是指在仿射空间：$x_0+K_m=x_0+span\{r_0, Ar_0, A^2r_0, \cdots, A^{m-1}r_0\}$中寻找方程组(1)的解的近似值 x_m。在迭代过程中，x_m 满足一定的正交条件，如满足 Petro-Galerkin 条件：$r_m=b-Ax_m\perp L_m$，其中，L_m 是一个 m 维子空间，通过选择不同的子空间 L_m 便可得到不同的方法。根据这种思想，Krylov 子空间方法在取 $L_m=K_m$ 并利用 Arnoldi 过程[8]中把矩阵 A 化为上 Hessenberg 矩阵的形式，则得到 Arnoldi 方法；若取 $L_m=A_m$ 并结合 Arnoldi 过程和最小二乘算法时，便可得到本文所用到的 GMRES 算法。

2　GMRES 算法求解 N-S 方程并作收敛性分析

烟雾仿真 N-S 方程可表示成通用形式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y})+S_\phi \tag{2}$$

其中，通用变量 ϕ 可以代表 u(x 方向流速)，v(y 方向流速)，k(紊动能)，ε(耗散率)，T(温度)；Γ 是广义扩散系数，S 是源项。

采用有限体积法[9,10]离散上述方程，其中对流项采用一阶迎风格式，时间项采用一阶隐格式，扩散项采用二阶中心差分格式，源项作线性化处理，可以得到以下离散方程组：

$$a_p\phi_p=a_W\phi_W+a_E\phi_E+a_S\phi_S+a_N\phi_N+b \tag{3}$$

其中

$$a_W=D_W+\max(0,F_w) \tag{4}$$

$$a_E=D_E+\max(0,-F_e) \tag{5}$$

$$a_N=D_N+\max(0,-F_n) \tag{6}$$

$$a_S=D_S+\max(0,F_s) \tag{7}$$

$$b=S_c\Delta V+a_P^0\phi_P^0 \tag{8}$$

$$a_P^0=\frac{\rho_P^0\Delta V}{\Delta t} \tag{9}$$

$$a_P=a_W+a_E+a_N+a_S+(F_e-F_w)+(F_n-F_s)+a_P^0-S_P\Delta V \tag{10}$$

其中，F 表示通过界面上单位面积的对流质量通量，简称对流质量流量；D 表示界面扩散传导性，具体算法如下：

$$F_w=(\rho u)_wA_w, D_w=\frac{\Gamma_w}{(\delta x)_wA_w} \tag{11}$$

其中，A 表示控制面的面积[9,12,13]。

以上为烟雾仿真 N-S 方程运用有限体积法离散后的方程组，下面将使用 GMRES 算法对其进行迭代求解，具体算法如下。

首先将方程组(3)进行变形，具体变形方法有：

$$-a_S\phi_S+a_P\phi_P-a_N\phi_N=a_W\phi_W+a_E\phi_E+b \tag{12}$$

$$-a_W\phi_W+a_P\phi_P-a_E\phi_E=a_S\phi_S+a_N\phi_N+b \tag{13}$$

式(12)和式(13)等号右侧是上次迭代的结果，可以认为是已知的，从而成为 3 对角方程组[14-16]。迭代过程如图 1 所示，首先选取一个计算方向(这里选取从西到东的方向，也可以选取其它方向)，相当于一维问题的计算。

采用式(12)来计算，具体算法如下：

(1)选取 ϕ 的初始值 x_0；

(2)对于 $i=1,2,3,\cdots,m$，执行步骤(3)、(4)(m 条 S-N 方向上的线)；

(3)利用 GMRES 算法求解方程(12)，得到每条 S-N 线上 ϕ 的值(按照从东到西的顺序计算)，直到 $i=m$ 为止；

(4)设第 k 次迭代得到的计算解为 X_k；

(5)若 $\| X_k-X_{k-1}\|\leqslant\varepsilon$，其中相关残差$\frac{r_k}{r_{k-1}}\leqslant\varepsilon$ 结束迭代，输出计算解；否则返回(2)继续迭代。

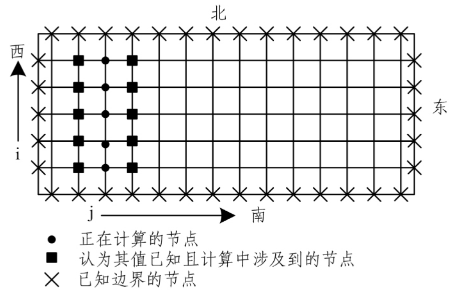


图 1　GMRES 算法求解烟雾仿真 N-S 方程的计算网格

对 GMRES 算法在求解烟雾仿真 N-S 方程时作如下收敛性分析。

定理 1　在二维对流扩散问题中，若离散出的方程组的系数矩阵是严格对角占优或不可约对角占优的，则 GMRES 算法在迭代上述方程组时是收敛的。

证明：在数值求解二维对流扩散问题(2)所得的线性方程组(3)中用 GMRES 算法逐列进行迭代求解，可得：

$$(-W-S+P-N)x^{(k-1)}=Ex^{(k-1)}+b, k=1,2,\cdots \tag{14}$$

即

$$x^{(k)}=Mx^{(k-1)}+g, k=1,2,\cdots \tag{15}$$

其中，$M=(-W-S+p-N)^{-1}E$，$g=(-W-S+P-N)^{-1}b$，M 为迭代矩阵，当且仅当 $\rho(M)<1$ 时，上述迭代法收敛[17]。

现只需证明 $\rho(M)<1$。假设式(15)的迭代矩阵 M 的某个特征值$|\lambda|\geqslant1$，则$(-W-S+p-N)-\frac{1}{\lambda}E$ 是严格对角占优或者不可约对角占优，其为非奇异矩阵。

考察

$$\begin{aligned}\det(\lambda I-M)&=\det(\lambda I-(-W-S+P-N)^{-1}E)\\&=\det[\lambda(-W-S+P-N)^{-1}((-W-S+P-N)-\frac{1}{\lambda}E)]\\&=\lambda^n\det((-W-S+P-N)^{-1})\det[(-W-S+P-N)-\frac{1}{\lambda}E]\neq0\end{aligned}$$

这与 λ 是 M 的特征值矛盾，即 M 的特征值的模均小于 1，所以式(15)收敛，即 GMRES 算法在逐列迭代求解烟雾仿真 N-S 方程的离散方程组时是收敛的。

3　烟雾可视化仿真实验结果

本文在如图 2 所示的二维空间中进行烟雾仿真。

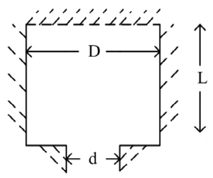


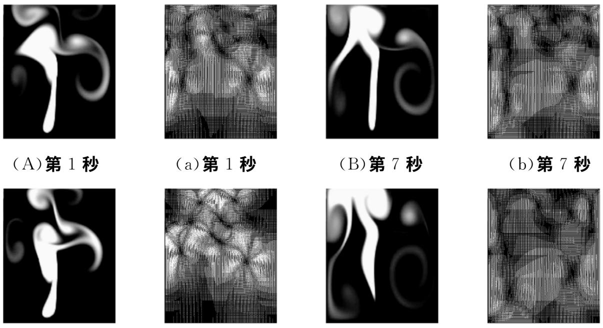
图 2　二维烟雾仿真空间

图 2 中 d 为烟雾流体的进口，进口为均匀流速，根据文献[18]提到的圆图扩管内流体流动雷诺数的定义 $\mathrm{Re}=ud/v$，导出相应的进口速度 $u_{in}=\mathrm{Re}*v/d$，二维空间壁面为光滑的无

滑移动边界，密度保持恒定不变，为 $\rho=1.0kg/m^3$，烟雾的进口宽度 $d=1$，二维空间内部 $D=2$，其上下管道足够长，这里取 $L=30$。

边界条件：对称线上 $u=0, \frac{\partial u}{\partial y}=0$，入口处 u, v 为给定值，固体边界 $u=v=0$，雷诺数 Re＝200。将求解区域进行剖分，网格数为 $150*100$，方程离散后的系数矩阵呈五对角状[19,20]，非零元素的个数为 1500，求解精度为 $\varepsilon=10^{-6}$，取 $k=8, m=20$，运用 GMRES 算法求解二维空间内烟雾流体的速度分布和压力分布，烟雾仿真算法实现的硬件环境是第二代英特尔酷睿 i3-2310MCPU，2GB 内存，NVIDIA GeForce GT 520M 的 1GB 独立显卡；软件平台是开放图形库 OpenGL 和 VC＋＋6.0。

烟雾仿真结果如图 3 所示。



(A)第 1 秒　(a)第 1 秒　(B)第 7 秒　(b)第 7 秒

(C)第 13 秒　(c)第 13 秒　(D)第 19 秒　(d)第 19 秒

图 3　烟雾仿真结果截图

上述 8 张图片为系统基于流体 N-S 方程所仿真的烟雾截图，分别为给定烟雾源一定初速度后，在自由扩散情况下第 1s,7s,13s 和 19s 的截图，图中(A)、(B)、(C)、(D)为烟雾仿真截图，(a)、(b)、(c)、(d)分别为对应烟雾在二维空间内的速度场分布，由上述 4 张烟雾仿真截图可以看出，由于是基于流体 N-S 方程来仿真烟雾，因此其运动形态逼真自然，烟雾的真实性得到了满足，广义极小残差算法(GMRES)可以用于烟雾仿真 N-S 方程的求解中。

结束语　烟雾模拟是一项非常复杂的课题，本文从烟雾仿真中求解 N-S 方程的角度出发，提出 GMRES 算法来求解烟雾仿真的 N-S 方程，详细叙述了 GMRES 算法求解 N-S 方程的原理和步骤，并且给出了 GMRES 算法求解 N-S 方程可行性的证明，最后采用 GMRES 算法结合计算机仿真技术给出了烟雾仿真的可视化结果。烟雾仿真结果表明 GMRES 算法能够仿真出逼真度较高的烟雾，为烟雾仿真技术的发展提供了可参考的价值。

参 考 文 献

[1] Pan Yuan-hang, Ma Li-zhuang. Video based simulation on real-time snow falling and accumulation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2009, 21(8): 1164-1169

[2] Song O Y, Shin H, Ko H S. Stable but nondissipative water [J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, 24(1): 81-97

[3] Takahashi T, Fujii H, Kunimatsu A, et al. Realistic Animation of Fluid with Splash and Foam[J]. Computer Graphics Forum, 2003, 22(3): 391-400

[4] 周永霞，石教英，郁佳荣. 基于物理的烟雾动画[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2006，18(9)：1367-1371

[5] 关朋燕，李春光，景何仿. TDMA 算法在迭代求解二维对流扩散问题中的收敛性证明[J]. 高等学校计算数学学报，2014，36(1)：77-85

[6] 戴华. 求解大规模矩阵问题的 Krylov 子空间方法[J]. 南京航空航天大学报，2001，33(2)：44-54

[7] 李晓梅，吴建平. Krylov 子空间方法及其并行计算[J]. 计算机科学，2005，32(1)：21-22

[8] 贾仲孝，陈桂芝. 解大规模非对称矩阵特征问题的精化 Arnoldi 方法的一种变形[J]. 数值计算与计算机应用，2003，24(2)：101-110

[9] 李人宪. 有限体积法基础[M]. 国防工业出版社，2008

[10] 叶正寅，杨永年. 二维分离流中的 NS 方程数值计算方法[J]. 空气动力学学报，1994，12(3)：320-325

[11] 周瑜. 采用滑移网格的二维非定常 NS 方程数值计算[D]. 中国空气动力研究与发展中心，2009

[12] 王福军. 计算流体动力学分析[M]. 北京：清华大学出版社，2005

[13] 陶文铨. 数值传热学(第二版)[M]. 西安：西安交通学大学出版社，2011

[14] 李安志，仁继念，崔薇. 三对角方程组通用性迭代解法[J]. 教学与科技，2010，12(4)：33-37

[15] 李文强，马民. 对解循环三对角方程组的追赶法[J]. 科技导报，2009，27(14)：69-72

[16] Adduci J, Djakov P, Mityagin B. Convergence radii for Eigenvalues of tridiagonal Matrices[J]. Letters in Mathematical Physics, 2010, 9(1): 1-14

[17] 徐树方，高立，张平文. 数值线性代数[M]. 北京：北京大学出版社，2000

[18] 罗奇. 计算流体力学[M]. 钟锡昌，刘学宗，译. 科学出版社，1983

[19] 李文强，马民，李卫霞. 追赶法求解拟无对角线性方程组[J]. 科学导报，2010，28(18)：60-63

[20] 王礼广，蔡放，熊岳山. 五对角方程组追赶法[J]. 南华大学学报(自然科学学报)，2008，22(1)：1-4

(上接第 189 页)

[12] Candes E J, Li Xiao-dong, Ma Yi. Robust principal component analysis [J]. Journal of the ACM, 2011, 58(3): 1-20

[13] Wang Ping, Zhang Chu-han, Cai Si-jia, et al. Accelerated matrix recovery via random projection based on inexact augmented Lagrange multiplier method [J]. Transactions of Tianjin University, 2013, 19(4): 293-299

[14] Li Mu, Yan Ji-hong, Zhu Yan-he, et al. Improvement on Canny operator by algorithm of self-adaptive determining double-threshold [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2008, 38(4): 913-918

[15] 张正峰，马少飞，李玮. 新的种子点区域填充算法[J]. 计算机工程与应用，2009，45(6)：201-202

[16] El-baf F, Bouwmans T, Vachon B. Fuzzy Integral for Moving Object Detection[C] // 2008 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2008. Hong Kong: IEEE, 2008: 1729-1736

[17] Wan Qin, Wang Yao-nan. Background subtraction based on adaptive non-parametric model[C] // Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2008. Chongqing: IEEE, 2008: 5960-5965