

# 灰色 GM(1,1)模型优化研究进展综述

许泽东 柳福祥

(三峡大学理学院 宜昌 443002)

**摘要** 灰色预测技术是灰色系统理论的重要分支之一。分别从灰生成技术、边值条件的改进、背景值的改进、模型参数估计方法改进、残差序列的优化、综合优化 6 个方面对近年来灰色预测模型中的 GM(1,1)模型优化研究现状进行了比较全面的介绍,同时也对灰色 GM(1,1)预测模型未来的发展方向提出了一些建议。

**关键词** 灰色系统,GM(1,1)模型,灰色预测,优化

中图分类号 N941.5 文献标识码 A

## Survey on Gray GM(1,1) Model

XU Ze-dong LIU Fu-xiang

(Science College, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

**Abstract** Grey prediction is an important branch of the grey system theory. Six aspects for the optimization research of GM(1,1) model in recent years are given more comprehensive introduction. They are the technology of grey generating, improvement of initial value, methodology improvement of background value, parameters optimization, residual sequence optimization and comprehensive optimization, meanwhile some suggestions are given for the future study of grey prediction models.

**Keywords** Grey system, GM(1,1) model, Grey prediction, Optimization

1982 年,北荷兰出版公司(North-Holland Publishing Company)的期刊“Systems and Control Letters”发表了我国学者邓聚龙教授的第一篇灰色系统论文“The Control Problems of Grey systems”<sup>[1]</sup>,标志着灰色系统理论<sup>[2]</sup>这一新兴学科的正式问世。30 多年来,灰色系统理论受到国内外学者的广泛关注,不少著名专家和学者给予了充分的肯定,无论是在实际应用还是在理论研究方面,灰色系统理论都获得了飞速的发展,其实用性已经得到了广泛的证明。灰色系统理论在预测中得以广泛应用的主要是 GM(1,1)模型,由于 GM(1,1)模型建模时所需样本数据少,计算简便,已广泛应用于工业、农业、能源、交通、地质、气象、水文、生态、环境、医学、军事、经济、社会等众多科学领域,成功地解决了生产、生活和科学研究中的大量实际问题。尤其在小样本、贫信息、不确定系统中得到了成功的应用,这就决定了灰色系统中的 GM(1,1)模型在预测、决策等领域中占有重要的地位。GM(1,1)模型作为灰色预测的核心模型,其原始算法存在一些不足,在数据的适应性与预测精度方面往往达不到人们所期望的值,因此为了提高灰色预测建模的精度,越来越多的学者从不同角度对灰色预测模型做了大量的优化研究,得到了许多新方法,取得了许多新突破,使得灰色预测模型的体系得到壮大,且一些改进后的模型的预测精度也有所提升。所以有必要对这些优化方法进行综述整理,本文从原始数据的处理、初值条件选取、背景值改进、模型参数求解、残差优化、综合优化这 6 个方面依次对灰色预测模型中最常用、最有效的 GM(1,1)模型优

化方法做了比较全面的介绍,并对灰色预测模型未来的发展方向提出了几点建议。

## 1 GM(1,1)模型优化方法整理

### 1.1 灰生成技术

所谓灰生成,就是将原始数据通过某种运算变换为新数据,通过灰生成能改变数据的层次性、可比性及极性。灰生成是使灰过程变白的一种方法,能为灰建模提供中间信息,并弱化原始数据的随机性,在灰色系统建模理论中占有极其重要的地位。GM(1,1)模型原始数据的处理方法主要有两类:1)数值变换生成;2)层次变换生成。针对灰色系统中凌乱的现实数据,通过灰生成可以使离散的原始数据中蕴涵的积分特性或规律充分显露,使任意非负数列、摆动的与非摆动的数列转化为具有近似的指数规律的数列,由此可以建立灰色模型或进行系统分析。通过模型的求解,达到认识系统及预测未来的目的。灰生成不单单是对原始序列的一种数据变换,还是对数据的发掘和升华,能把数据上升到更高的层次。因此,灰生成是发展灰建模技术的重要手段。正因为灰生成具有如此重要的作用,所以许多学者针对该问题的研究花了不少的心血,有力地推动了灰生成技术的发展。下面从两类主要的生成(数值变换生成和层次变换生成)来进行综述。

#### 1.1.1 数值变换生成

在灰色系统理论建模中,数据变换技术是研究热点之一,数据序列变换能为灰色预测建模提供中间信息,并弱化原始

本文受三峡大学科学基金(KJ2013B030, KJ2013B031)资助。

许泽东(1989—),男,硕士生,主要研究方向为灰色系统理论建模、人工智能算法, E-mail: 1357992053@qq.com;柳福祥(1973—),男,博士,副教授,主要研究方向为灰色系统理论、空间计量、应用统计等, E-mail: liufx100@126.com(通信作者)。

数据的随机性,以改善其光滑性,是提高灰色预测模型精度的一种重要方法。文献[3]最早提出了采用对数函数对原始序列进行变换的方法,从而拓宽了灰色预测模型的应用范围,还给出了预测全国电视机产量的结果,并使这个预测结果的平均相对误差由不进行函数变换的 263.16% 下降到 23.6%。文献[4,5]分别提出了幂函数  $x^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) 变换、对数函数-幂函数复合函数变换来改善原始数据序列的光滑性。文献[6]在文献[3,5]的研究基础上提出了函数  $\cot x$  变换,并从理论证明和具体实例两个方面说明了该方法比对数函数-幂函数变换的效果好。文献[7]结合三角函数和幂函数,构造了函数  $\cot(x^T)$  变换法,并证明了该变换比对数函数、三角函数、幂函数和对数函数-幂函数变换更优,有效地提高了预测精度。

但是,上述所提数据变换处理方法综合起来主要存在两个方面的问题:1)对于各个文献给出的预测实例,都能得到较理想的精度,但这些方法不具有普遍性,许多应用实例表明一种方法解决这个问题有效,但在解决另一个问题时预测精度不甚理想,从某种程度上说,也就是与要处理数据的特征有一定的关系。其实,出现这种现象是正常的,因为客观存在的系统表象错综复杂,数据混乱不堪,很难找到一种数据处理方法对所有预测系统均有效。所以,在应用中应重视数据的处理方法,采用不同的方法得到不同的模型,从中选择与现实问题拟合较好的预测模型,以便提高模型的拟合效果和预测精度。另外,函数变换方法是对原始序列进行数据变换预处理,所以还存在还原误差的问题以及如何控制还原误差。另一方面,多数文献在变换过程中仅仅强调提高光滑性,这对提高灰色预测模型的模拟和预测精度并无必然联系。文献[8]指出,光滑性条件仅仅是保证一次建模具有高精度的充分条件,而非必要条件。因此,仅仅改造序列的光滑性可能不够,并且已经有文献通过实例说明,经过变换后离散数据序列的光滑性得到了很大提高,但是预测的误差反而增大了很多<sup>[9]</sup>。为此,我们需要寻找影响模型精度的其他因素,一些文献,如文献[10]开始从差异信息、还原误差、凹凸性等新角度来研究各种数值变换生成方法,得到了比较理想的结果。文献[11]针对冲击扰动可能导致模型在预测时失效这一问题,提出了缓冲算子的概念,并在此基础上构造了弱化缓冲算子和强化缓冲算子。文献[12]首次将缓冲算子的构造与函数联系起来,开辟了如何利用函数来构造缓冲算子的新方向。文献[13]根据“新信息优先利用”的原理和“反向累积法”,构造和整合了一类新的弱化缓冲算子。文献[14]提出了变权缓冲算子的概念,构造了一类变权缓冲算子,在控制缓冲算子作用强度的灵活性方面要明显优于高阶缓冲算子,克服了传统缓冲算子不能实现微调而导致作用强度过强或过弱的缺点。

从 GM(1,1)模型原始序列数据处理的数值变换方法可以看出,构造缓冲算子是因为原始数据受到外来因素干扰而失去本来的数据特性,而它的作用是使扰动数据序列的扰动因素减弱,实现对序列的真实变化规律的正确把握,从而提高 GM(1,1)模型模拟和预测的精度。函数变换则是将原始数据序列通过某一函数关系变换为一组新的数据序列,使新序列更适合建立 GM(1,1)模型,从而达到提高模型的模拟和预测的精度。但这两种方法的实质都是对原始序列数据进行数据变换处理,然而缓冲算子对原始数据变换无需对数据作还原处理。

### 1.1.2 层次变换生成

在层次变换生成方法中,累加、累减生成是两种主要的生

成方法,在灰色系统建模中应用最为普遍。累加、累减生成可以说是灰生成方法中最具核心的生成方法。文献[15,16]在传统累加的基础上提出了一种更适合单调递减序列建模的反向累加生成方法。文献[17]对传统的累加生成和累减生成进行推广,提出了广义累加生成和广义累减生成的概念,并讨论了它们的几何意义。文献[18,19]对广义累加灰色预测模型进行了深入研究,分析了广义累加生成矩阵模式、参数结构和模型的优化方法,通过经典实例“电视机销售问题”的应用,其拟合预测结果较传统方法得到了极大的改进。文献[20]基于分数阶的“in between”思想,将整数阶累加推广到分数阶累加,提出了分数阶累加离散灰色模型。另外,文献[21,22]分别提出了倒数累加生成法和加权累加生成法,丰富了原始序列的累加生成方式。

上述累加生成中,广义累加生成最具一般性,其中传统的一次累加生成、反向累加生成、分数阶累加生成、加权累加生成等都是其特殊形式。然而,广义累加生成矩阵的确定一般是根据人的主观判断确定的,很难保证累加生成的规律性和模型的精度。如文献[18]通过观察原始序列的一次累加序列图像,根据突变点的情况,从而将原始序列分为 4 段。由此可知,广义累加生成矩阵的确定还没有达到理论的高度,是一个亟待解决的问题。

### 1.2 边值条件的改进

由于传统 GM(1,1)模型初始值选择为原始数据序列的第一个数据,这种解决办法在处理上很方便,但是如果从理论上考察,此办法在某些场合可能会造成预测结果的误差过大。文献[23]通过理论证明了 GM(1,1)模型预测值与原始数据序列第一点无关,即 GM(1,1)预测模型实际上是丢弃了  $x^{(0)}(1)$  的作用,尽管它使得预测序列第一点误差最小,但这样做既不能保证整个预测序列误差平方和最小,而且还浪费原始序列的第一点信息。因此,在原有初始值选取的基础上,出现了多种改进方法。文献[24]摒弃了传统 GM(1,1)模型把原始序列中的  $x^{(0)}(1)$  作为初始条件,认为应该选用序列中使得预测误差最小的数据。文献[25]提出了带有修正项  $b$  的初值表达式,即用初值  $x^{(0)}(1) + b$  来替代传统初值  $x^{(0)}(1)$ 。文献[26]提出了两种不同的初值修正法,即分别用  $\alpha x^{(0)}(1)$  和  $x^{(0)}(1) + \alpha_n k^n + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \dots + \alpha_1 k + \alpha_0$  来替代传统初值  $x^{(0)}(1)$ 。文献[27]以生成序列误差平方和最小确定最优边值条件。文献[28]全面分析了各种初始点的优化准则,认为模型优化准则和检验标准不一致会导致优化效果不理想,提出了以相对误差平方和最小为目标优化 GM(1,1)模型。文献[29]和文献[30]为了让原始序列的信息得到充分反应,应用新信息优先原理,分别将初值条件由  $x^{(0)}(1)$  改为  $x^{(1)}(n)$  和  $x^{(1)}(n) + \beta$ ,提高了所建模型的预测精度。文献[31]提出了基于初始条件滚动的  $x^{(1)}(n)$ GM(1,1)模型,与各种不同初始条件的 GM(1,1)模型及新陈代谢 GM(1,1)模型进行比较,结果均表明,初始条件滚动的  $x^{(1)}(n)$ GM(1,1)模型具有较好的预测精度。

综上所述可以看出,针对 GM(1,1)模型边值条件的优化,主要分为如下几类:1)以原始观测数据  $x^{(0)}(m)$  ( $1 \leq m \leq n$ ) 为初始条件;2)根据新信息优先原理以  $x^{(1)}(n)$ 、 $x^{(1)}(n) + \beta$  和原始序列  $x^{(0)}$  的每一个数据的非等加权的和,即  $\alpha_1 x^{(0)}(1) + \alpha_2 x^{(0)}(2) + \dots + \alpha_n x^{(0)}(n)$  等作为初值条件;3)根据原始序列与模拟序列残差和为零、原始序列与模拟序列偏差平方和最小、原始

累加序列与模拟累加序列偏差平方和最小和平均相对偏差最小等方法选取初值;4)根据新陈代谢或等维新息原理建立GM(1,1)模型,根据3)中的某种准则确定初值(此时初值不固定)。

从上述优化边值条件的思想和最终的预测结果,可以看出,选择某个原始数据作为初始条件建立灰色模型,只能用到这个数据的信息,而没有充分发挥数据序列中其它数据对模型的作用,对信息利用不够充分。另外,如果该数据有偏差,根据初始条件对微分方程的影响可知,所建的模型为偏差比较大的灰色模型,用这种方法得到的模型的预测精度一般比用上面提到的其他方法得到的模型的预测精度要低。

### 1.3 背景值的改进

传统GM(1,1)模型背景值 $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k-1) + 0.5x^{(1)}(k)$ 的构造公式是一个平滑公式,当序列数据变化平缓时,这样的背景值是合适的,模型偏差较小,但当序列数据变化较快时,模型偏差往往也比较大。文献[32]通过拉格朗日中值定理证明了传统灰色预测模型背景值赋值是不合理的。事实上,由GM(1,1)模型的时间响应式可以看出,它的模拟和预测精度取决于参数 $a$ 和 $b$ ,而参数 $a$ 和 $b$ 的值又依赖于原始数据序列和背景值,因此背景值公式构造是否合理直接影响模型的预测精度。文献[33]将GM(1,1)模型扩展为算术加权(即背景值 $z^{(1)}(k) = \alpha x^{(1)}(k-1) + (1-\alpha)x^{(1)}(k)$ )灰色预测模型,即GM(1,1, $\alpha$ )模型,该模型的核心问题就是如何确定权重 $\alpha$ ,该文通过理论分析和迭代法确定最佳生成系数 $\alpha$ ,得到了新的背景值计算公式。文献[34]用遗传算法求解最优的 $\alpha$ 值,使模型的精度较传统GM(1,1)模型有所提高。文献[35]构造了一种几何加权的新背景值的优化模型,其对低指数和高指数增长序列预测保持了较高的精度。文献[36]从 $z^{(1)}(k)$ 的几何意义出发,用齐次指数函数对一次累加生成序列重构背景值,扩大了模型的适用范围。但是,从GM(1,1)模型白化微分方程解的形式可以看出,一次累加生成序列是非齐次指数形式,文献[37]以此为基础,进一步优化了背景值的构造公式。文献[38]在文献[37]等文献的基础上,为了改善近似齐次指数序列建模背景值的适应性,对其添加动态修正项来优化背景值。文献[39]提出了一种同时满足无偏性和最小误差性背景值构造方法。文献[40]首次运用分割求和的思想,采用逐步试凑法确定面积重构了一个表达形式简洁、计算简单、适应性极强的背景值计算公式。文献[41,42]分别提出了用数值积分中的Newton-Cotes公式和Gauss公式重构模型中的背景值,可以有效地提高模型的预测精度和适用性。另外,文献[43]研究了灰色GM(1,1, $\alpha$ )模型中背景值与相对误差之间的变化关系,从而达到通过调整背景值的大小来减少模型的相对误差的目的。

一般地,优化背景值的思路主要有:1)从背景值各种加权生成形式出发,给出了背景值的不同确定方法。2)从背景值构造的物理意义的角度出发,即背景值的大小实际上等于曲边梯形面积。此时,主要从两个方向来构造新背景值,一个方向是将背景值看作是某个齐次指数函数或非齐次指数函数在区间 $[k-1, k]$ 上的定积分。另一个方向是将曲边梯形划分成若干份,用矩形法、梯形法、中位线法或抛物线法等方法求出这若干份的面积和,而对于某些数值不存在的点,可以利用数值分析中的插值法求解。一般来说,第二种方法,即从背景值的物理意义考虑,重构后的背景值更加趋近于真值,模型的拟

合精度比各种加权生成的精度要高。

### 1.4 模型参数估计方法改进

为了估计参数 $a$ 和 $b$ ,传统GM(1,1)模型和许多文献都采用最小二乘准则,然而,对于小样本预测问题,最小二乘法的稳健性较差,即当样本中存在异常值时,经最小二乘法拟合的直线可能会偏离真实直线。因此,在处理存在奇异点的预测问题时,模型不能得到很好的拟合精度。于是,后续研究提出了许多改进方法。文献[44]提出了估计GM(1,1)模型参数的相除法,使参数估计的计算量大大减少。文献[45]提出了用3种差商代替灰导数与不同的灰导数相结合,得到了估计模型参数的一簇算法。文献[46,47]分别提出了全最小一乘法和加权最小二乘方法求解微分方程的参数,提高了模型的稳健性和预测精度。另外,文献[48,49]分别提出了带有线性时间项的灰色作用量的GM(1,1)模型和参数动态变化的灰色预测模型,并且通过实例验证结果均说明可变参数动态预测模型比固定参数的传统GM(1,1)模型具有更好的预测精度。

综上,可以看出模型参数改进方法主要有以下两个方面:1)改变模型参数的求解方式;2)建立动态预测模型,求解时变参数。

### 1.5 残差序列的优化

在灰色预测的模型检验中,若残差检验不合格时,需要建立残差修正模型,对模型的预测值做进一步修正,提高模型的拟合效果和预测精度。文献[50]提出了一种具有残差校正的 $n$ 次累加灰色模型,其对随机性强、数据波动“无序”的序列拟合效果好,拓宽了GM(1,1)的应用范围。文献[51]在传统GM(1,1)残差修正模型的基础上,重新定义误差序列,得到了两种新的误差修正模型。文献[52]在文献[51]的基础上,结合函数变换的思想,建立新的GM(1,1)残差优化模型。文献[53]运用马尔柯夫过程判断残差符号来改进残差GM(1,1)模型。文献[54-56]对残差修正模型进行了研究,分别提出了三角函数残差修正模型、马尔柯夫残差修正模型、残差变化趋势的修正模型。这些模型都有效地提高了灰色模型的建模精度和预测精度。

在残差序列优化的模型中,应用较为普遍的残差序列优化方法是取出一定数目的残差尾段进行二次建模,但如何消除残差序列的波动性带来的影响还有待进一步研究。在实际应用中,还可以做多次残差模型叠加对模型进行修正,使精度更高<sup>[57]</sup>。

### 1.6 综合优化

纵观上述优化模型可以看出,许多学者对灰色模型的研究只是从单方面进行研究,虽然做到了单方面提高模型的整体预测效果,但是单方面的提高往往是有限的,只有同时提高多方面的特性才可能更好地提高系统性能。因此根据上述理论,许多学者同时优化多个要素,使模型更具有广泛性,进一步提高模型的精度。文献[58]假定原始数据为非齐次指数序列,提出了用向前差商和向后差商的加权平均值作为直接建模的灰导数,并依据新息优先原理,以 $x^{(0)}(n)$ 为初始条件,建立了新的直接GM(1,1)模型,不仅提高了建模的精度,而且扩大了模型的适用范围。文献[59]提出了基于遗传算法求解最佳背景值参数 $\lambda$ 和最佳边界修正项 $\epsilon$ 的方法,明显提高了模型的预测精度。文献[60]结合文献[29,36]的方法,提出了一种新的优化方法,其模拟效果和预测精度都得到了提

高。文献[61]从背景值构造和初始值确定两个方面分析了GM(1,1)模型的不足,建立了加权背景值和带有修正项的初始值,实例表明改进的GM(1,1)模型优于普通灰色预测模型。文献[62]根据最小二乘法理论求解模型中的初始值,并采用自动寻优定权的方法,取预测精度最高的权重作为背景值的最佳权重两方面优化来改进传统GM(1,1)模型。文献[63]运用幂函数变换法提高序列的光滑性和通过累积法对GM(1,1)模型参数进行估计,用GM(1,1)模型内涵型解代替白化响应式来增强模型的稳定性,大大地改善了模型的适用范围。文献[64]利用文献[40]构造的背景值和GM(1,1)内涵型推导的白化响应式(模型的两个参数通过累积法求解)两方面优化来改进传统GM(1,1)模型,显著扩大了GM(1,1)模型的适用范围。文献[65]采用积分优化、二次拟合优化以及残差改进方法,建立多重修正模型,对GM(1,1)模型进行分步改进。文献[66]给出了反向累加生成的灰色预测GOM(1,1)模型,优化了传统GM(1,1)模型背景值构造方式和初始点的选取,拓展了GOM(1,1)模型的适用范围,显著改善了预测效果。文献[67]将GM(1,1)模型中的灰色作用量改为动态形式,并利用最小二乘法和新陈代谢的思想,提出一种改进的灰色预测模型,拓宽了灰色预测模型的适用范围。

从多方面优化的模型及实际应用上可以看出,综合优化确实比单一方面的优化在拟合效果和预测精度上提高了许多。

## 2 灰色预测模型研究展望

经过30多年的发展,GM(1,1)模型虽然已经形成了一个比较完善的理论体系,在许多领域的分析、预测中得到了广泛的应用。但是,在灰色预测理论中还有许多重要的问题没有得到有效的解决。本文认为,在以下几个方面还有待于进一步研究:

(1)大量的研究者对灰色GM(1,1)模型不断深入研究的同时,提出了许多GM(1,1)的拓展模型。如GM(1,N)、GM(0,N)、GM(1,1,t)、GM(2,1)以及灰色Verhulst模型等,探索各种模型的适用范围,同时进一步完善这些模型的性质和扩大其适用范围、提高建模精度具有重要的理论意义和现实价值。

(2)从GM(1,1)优化模型的大量研究文献中可以看出,许多研究者观察模型拟合的好坏都是从模型精度等某一个角度来进行研究的,并就给出的具体算例说明其方法的有效性。然而,就预测方法而言,衡量一个预测方法的好坏,单考虑它实际上所达到的精度是不够的,还应考虑预测理论上所达到的精度,即考虑是否充分利用了系统的白色信息、预测精度与极限精度之间的接近程度如何。因为有些客观对象本身的发展就很有规律,对这类对象的预测即使是很粗糙的方法也能达到很高的精度;反之,一些对象灰度很大,发展过程也不平稳,那么最好的预测方法也难以达到较高的精度。但目前对此类问题的研究很少,然而它却有很重要的理论和实际意义。

(3)纵观灰色预测模型的既有研究成果,通常都是对认识到的灰数信息进行白化处理,将灰数序列转化为实数序列,然后构建灰色预测模型。换言之,现有的灰色预测模型及其拓展模型,其建模对象局限于白化数序列。随着科学技术的发展,人类所涉及的系统越来越复杂,表征系统的信息灰度也越来越大,在这样的大背景下,以实数序列为建模对象的传统

灰色预测模型及其拓展模型,已经难以满足系统建模的实际需要。因此,进一步完善灰数的定义和灰代数运算体系并构建有效的基于“灰数序列”的灰色预测模型,更符合人们对系统未来趋势的把握和认识,对丰富与完善灰色预测模型的理论体系具有十分重要的意义。

(4)目前,灰色预测模型研究的均为小样本(一般样本容量 $n \leq 10$ ),并且样本为一维数据。然而,对于样本容量 $n$ 满足: $20 \leq n \leq 50$ 的灰色预测模型或多维数据的灰色预测模型的研究很少,这类数据在实际生活中也是大量存在的,是未来需要关注和研究的方向之一。

(5)灰色预测模型优化的结果不仅取决于优化模型的研究,同时取决于优化方法的研究。近年来,在广泛应用遗传算法和一些改进的遗传算法的基础上,着眼于群体智能优化的研究越来越多。于是,算法与算法组合研究,即将多种算法结合起来以改进复杂、高功能的灰色预测模型的预测效果也可能是有待关注的方向之一。

结束语 灰色系统理论创立至今,其应用的范围越来越广泛,对于各种应用数据,发现传统GM(1,1)模型在进行拟合与预测时,模型出现了一定的缺陷和不足,大量研究从不同的方面改进了这些不足,然而,现有的文献均没有对灰色GM(1,1)预测模型的优化方法进行比较全面系统的综述。本文对近些年来研究比较深入的灰色预测中最常用的GM(1,1)模型优化方法的概貌以及发展动态从6个方面进行了比较详细的介绍,使得对GM(1,1)模型发展有更加全面的了解与认识。本文的创新点在于比较全面地介绍了GM(1,1)模型的优化方法,同时提出了一些GM模型中未能得到有效解决的问题和需要进一步研究的领域;以期为后续相关研究提供思路和一些参考。

## 参考文献

- [1] Deng Ju-long. Control problem of grey system [J]. System & Control Letter, 1982, 1(5): 288-294
- [2] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1988
- [3] 陈涛捷. 灰色预测模型的一种推广[J]. 系统工程, 1990, 8(4): 50-53
- [4] 吴惠荣. 灰色预测模型的进一步推广[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 14(8): 31-34
- [5] 李群. 灰色预测模型的进一步推广[J]. 系统工程理论与实践, 1993, 13(1): 64-66
- [6] 李翠凤, 戴文战. 基于函数 $\cot x$ 变换的灰色建模方法[J]. 系统工程, 2005, 23(3): 110-114
- [7] 关叶青, 刘思峰. 基于函数 $\cot(x^T)$ 变换的灰色GM(1,1)建模方法[J]. 系统工程, 2008, 26(9): 89-93
- [8] 李福琴. 灰色模型的稳定性和建模精度研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2006
- [9] 潘家英, 闵祥云. 原始数据函数变换对GM(1,1)模型精度的影响[J]. 疾病控制杂志, 1999, 3(2): 110-111
- [10] 钱吴永. 数据变换技术与GM(1,1)模型研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2008
- [11] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27
- [12] 吴正朋, 刘思峰, 崔立志, 等. 基于单调函数的新弱化缓冲算子研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(7): 1055-1058
- [13] 吴正朋, 刘思峰, 米传民, 等. 基于反向累积法的弱化缓冲算子序列研究[J]. 中国管理科学, 2009, 17(3): 136-141

- [14] 王正新,党耀国,刘思峰. 变权缓冲算子及缓冲算子公里的补充[J]. 系统工程,2009,27(1):113-117
- [15] Song Zhong-min, Xiao Xin-ping, Deng Ju-long. The character of opposite direction AGO and its class ratio[J]. The Journal of Grey System,2002,14(9):9-14
- [16] 魏勇,张怡. 灰色模型的最优化及其参数的直接求法[J]. 数学的实践与认识,2006,36(12):203-207
- [17] 肖新平,宋中民,李峰. 灰技术基础及应用[M]. 北京:北京科学出版社,2005
- [18] 黄继,种晓丽. 广义累加灰色预测控制模型及其优化算法[J]. 系统工程理论与实践,2009,29(6):147-156
- [19] 肖新平,刘军,郭欢. 广义累加灰色预测控制模型的性质及优化[J]. 系统工程理论与实践,2014,34(6):1547-1556
- [20] 吴利丰,刘思峰,姚立根. 基于分数阶累加的离散灰色模型[J]. 系统工程理论与实践,2014,34(7):1822-1827
- [21] 杨保华,张忠泉. 倒数累加生成灰色 GRM(1,1)模型及应用[J]. 数学的实践与认识,2003,33(10):21-26
- [22] 钱吴永,党耀国,王叶梅. 加权累加生成的 GM(1,1)模型及其应用[J]. 数学的实践与认识,2009,39(15):47-51
- [23] 耿继进. 灰色预测理论若干问题的研究[J]. 武汉测绘科技大学学报,1994,19(1):57-62
- [24] 张大海,江世芳,史开泉. 灰色预测公式的理论缺陷及改进[J]. 系统工程理论与实践,2002,22(8):140-142
- [25] 张辉,胡适耕. GM(1,1)模型的精确解法[J]. 系统工程理论方法应用,2001,10(1):72-74
- [26] 李俊峰,戴文战. GM(1,1)改进模型的研究及在上海市发电量建模中的应用[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(3):140-144
- [27] 刘斌,赵亮,翟振杰,等. 优化的 GM(1,1)模型及其适用范围[J]. 南京航空航天大学学报,2003,35(4):451-454
- [28] 郭金海,杨锦伟. GM(1,1)模型初始条件和初始点的优化[J]. 系统工程理论与实践,2014,34(1):1-6
- [29] Dang Yao-guo, Liu Si-feng, Chen Ke-jia. The GM models that  $x(n)$  be taken as initial value [J]. Kybernetes,2004,33(2):247-254
- [30] 骆公志,崔杰,谢乃明. 灰色 GM(1,1)模型新的改进方法[J]. 统计与决策,2008,24(9):11-13
- [31] 高彩云,崔希民,高宁. 顾及不同初始条件的 GM(1,1)变形建模研究[J]. 大地测量与地球动力学,2014,34(4):157-160
- [32] 黄元生,陈子儒. 灰色预测模型背景值赋值不合理性的证明及改进[J]. 电子测试,2013,20(13):70-71
- [33] 周世健,赖志坤,藏德彦,等. 加权灰色预测模型及其计算实现[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2002,27(5):451-455
- [34] 谢开贵,李春燕,周家启. 基于遗传算法的 GM(1,1, $\lambda$ )模型[J]. 系统工程学报,2000,2015(2):168-172
- [35] 卢懿,戴文战. 一种带有调节因子的背景值构造方法及在灰色系统建模中的应用[J]. 江南大学学报(自然科学版),2013,12(5):565-570
- [36] 罗党,刘思峰,党耀国. 灰色模型 GM(1,1)优化[J]. 中国工程科学,2003,5(8):50-53
- [37] 王正新,党耀国,刘思峰. 基于离散指数函数优化的 GM(1,1)模型[J]. 系统工程理论与实践,2008,28(2):61-67
- [38] 刘侃,田鑫鑫,林园. GM(1,1)模型系列背景值优化的内在联系及其改进[J]. 统计与决策,2010,26(24):26-27
- [39] 徐宁,党耀国,丁松. 基于误差最小化的 GM(1,1)模型背景值优化方法[J]. 控制与决策,2015,30(2):283-288
- [40] 谭冠军. GM(1,1)模型背景值构造方法和应用(I)[J]. 系统工程理论与实践,2000,20(4):98-103
- [41] 李俊峰,戴文战. 基于插值和 Newton-Cores 公式的 GM(1,1)模型背景值构造新方法与应用[J]. 系统工程理论与实践,2004,24(10):122-126
- [42] 江南,刘小洋. 基于 Gauss 公式的 GM(1,1)模型背景值构造新方法与应用[J]. 数学的实践与认识,2008,38(7):90-94
- [43] 肖新平,王欢欢. GM(1,1, $\alpha$ )模型背景值的变化对相对误差的影响[J]. 系统工程理论与实践,2014,34(2):408-415
- [44] 唐五湘. GM(1,1)模型参数估计的新方法及假设检验[J]. 系统工程理论与实践,1995,15(3):20-26
- [45] 何文章,宋国乡,吴爱弟. 估计 GM(1,1)模型中参数的一簇算法[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(1):69-75
- [46] 何霞,刘卫锋. 基于全最小一乘准则的灰色 GM(1,1)模型参数估计[J]. 统计与决策,2012,28(7):30-33
- [47] 何霞. 灰色 GM(1,1)模型参数估计的加权最小二乘方法[J]. 运筹与管理,2012,21(6):23-27
- [48] Cui Jie, Liu Si-feng, Zeng Bo, et al. A novel grey forecasting model and its optimization [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013,37(6):4399-4406
- [49] 张可,刘思峰. 线性时变参数离散灰色预测模型[J]. 系统工程理论与实践,2010,30(9):1650-1657
- [50] 戴文战. 具有残差修正的  $n$  次累加灰色模型[J]. 系统工程理论与实践,1997,17(12):121-124
- [51] 王明礼. 三种灰色系统模型的预测比较[J]. 统计与决策,2011,27(8):35-37
- [52] 何光,卢小丽. 两类新的 GM(1,1)残差优化模型的建立及预测[J]. 统计与决策,2012,27(11):23-25
- [53] 孙辰军,王翠茹,张江维,等. 残差灰色预测模型的改进与应用[J]. 统计与决策,2005,21(3):19-20
- [54] 程毛林. 灰色 GM(1,1)模型预测精度改进方法新探[J]. 统计与决策,2004,20(2):16-17
- [55] Li X Y, Yan Y S, Jiang G F. Grey-Markov model for road accidents forecasting[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2003,11(2):192-197
- [56] 高曙. 基于残差变化趋势的 GM(1,1)修正模型的算法实现与应用[J]. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版),2003,25(6):17-19
- [57] 肖俊. 基于粒子群算法的 GM(1,1)模型及其应用[D]. 武汉:华中科技大学,2005
- [58] 王瑞敏,魏勇. 优化灰导数的直接 GM(1,1)模型[J]. 统计与决策,2012,27(15):70-72
- [59] 何文章,宋国乡. 基于遗传算法估计灰色模型中的参数[J]. 系统工程学报,2005,20(4):432-436
- [60] 张怡,魏勇,熊常伟. 灰色模型 GM(1,1)的一种新优化方法[J]. 系统工程理论与实践,2007,27(4):141-146
- [61] 尹红健. 改进的 GM(1,1)模型及其应用[J]. 现代计算机,2009,6(12):72-74
- [62] 杨华龙,刘金霞,郑斌. 灰色预测 GM(1,1)模型的改进及应用[J]. 数学的实践与认识,2011,41(23):39-46
- [63] 曾祥艳,肖新平. GM(1,1)模型拓广方法研究与应用[J]. 控制与决策,2009,24(7):1092-1096
- [64] 曾祥艳,肖新平. GM(1,1)模型的改进及其适用范围[J]. 系统工程,2009,27(1):103-107
- [65] 彭正明,王腾军,曹冬冬,等. GM(1,1)模型的改进及其在变形预测中的应用[J]. 地球科学与环境学报,2012,34(4):102-106
- [66] 练郑伟,党耀国,王正新. 反向累加生成的特性及 GOM(1,1)模型优化[J]. 系统工程理论与实践,2013,33(9):2306-2312
- [67] 王健. 一类改进的灰色预测模型及其应用[J]. 数学的实践与认识,2013,43(9):181-18