第 43 卷 第 9 期
2016 年 9 月
计 算 机 科 学
Computer Science
Vol. 43 No. 9
Sep 2016

3-Set Packing 参数化计数问题的复杂性及近似算法

刘运龙

(湖南师范大学数学与计算机科学学院高性能计算与随机信息处理省部共建教育部重点实验室 长沙 410081)

摘 要 3-Set Packing 参数化计数问题即在一个 3-Set Packing 实例中统计所有大小为 k 的不同 packing 的个数。首先证明了该问题的计算复杂性是＃W[1]-难的，表明该问题不大可能存在固定参数可解的精确算法(除非＃W[1]＝FPT)。然后，通过拓展 3-D Matching 参数化计数问题的算法对 3-Set Packing 参数化计数问题提出了一个基于 Monte-Carlo 自适应覆盖算法和着色技术的随机近似算法。

关键词 3-Set Packing，计数，复杂性，近似算法

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.9.004

Research on Complexity and Approximation Algorithm for Counting 3-Set Packings of Size k

LIU Yun-long

(Key Laboratory of High Performance Computing and Stochastic Information Processing, Ministry of Education of China, College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract Counting 3-Set Packings of size k is to count distinct packings of size k in a given instance of 3-Set Packing. We first showed that the complexity of this problem is ＃W[1]-hard, which indicates that there exists no efficient fixed-parameter tractable algorithm for it(unless ＃W[1]＝FPT). Subsequently, by extending the algorithm for counting 3-D Matchings of size k, we obtained a generalized approximation algorithm for counting 3-Set Packings of size k. This algorithm is heavily based on the Monte-Carlo self-adjusting coverage algorithm and the recent improved color-coding techniques.

Keywords 3-Set Packing, Counting, Complexity, Approximation algorithm

1 引言

计数即统计问题实例中解的个数，是计算机科学中 4 类主要运算(判定、求解、计数和枚举)之一。对于一些难解的计数问题，运用参数计算理论来研究其参数复杂性及固定参数可解算法是近年来理论计算机科学中的一个新兴分支[1-3]。确定一个参数化计数问题的计算复杂性以及对不存在固定参数可解精确算法的问题提出相应的固定参数可解近似(或随机近似)算法是这一方向的重要研究目标。

在参数化计数问题中，图匹配参数化计数问题是一个备受关注的重要问题。2006 年图匹配参数化计数问题的计算复杂性被列为一个开放性难题[4]，在 2013 年被 Curticapean 证明为＃W[1]-难的[5]。3-Set Packing 问题与图匹配问题密切相关，因此在图匹配参数化计数问题的复杂性被确定之后，3-Set Packing 参数化计数问题的计算复杂性受到了关注。

对于＃W[1]-难的计数问题，固定参数可解近似(或随机近似)算法是一种重要的实际处理途径。然而，就目前的研究现状来看，已被找到固定参数可解随机近似算法的＃W[1]-难问题仅有少量几个，如图匹配计数问题、路径计数问题等[2,5,6]。因此对于一个参数化计数问题，如果其计算复杂性被证明为＃W[1]-难的同时又存在固定参数可解近似(或随机近似)算法，则该问题在参数计算复杂性理论中具有重要意义。

本文主要研究 3-Set Packing 参数化计数问题，下面给出其相关定义。

设 S 为一个含有 n 个元组的集合，S' 为 S 的一个子集，如果 S' 中任何两个元组之间均没有相同元素，则称 S' 为 S 中的一个 packing。一个 packing 的大小是指该 packing 中所含有元组的个数。一个正好含有 k 个元组的 packing 称为一个 k-packing。

定义 1(3-Set Packing[7]) 给定一个含有 n 个元组的集合 S，其中每个元组包含最多 3 个元素，目标是构造 S 中一个含有元组个数最多的 packing。

定义 2(参数化 3-Set Packing[8]) 给定一个组对(S,k)，其中 S 是含有 n 个元组的集合，每个元组包含最多 3 个元素，k 是一个非负整数，目标是判定 S 中是否存在一个含有 k 个元组的 packing。

定义 3(3-Set Packing 参数化计数问题) 给定一个组对(S,k)，其中 S 是含有 n 个元组的集合，每个元组包含最多 3 个元素，k 是一个非负整数，目标是统计 S 中所有不同的 k-

到稿日期：2015-12-23 返修日期：2016-01-24

刘运龙(1971－)，男，博士，副教授，主要研究方向为参数计算、算法及复杂性理论，E-mail：hnsdlyl@163.com。

packing 的个数。为表述简便，该问题简记为 p-#3-Set Packing。

一个元组如果正好含有 3 个元素，则称为一个 3-元组；对于 3-Set Packing 计数问题的任意一个实例 (S,k)，不失一般性，可假定 S 中每个元组都为 3-元组；否则，可以将 S 中不足 3 个元素的元组通过添加一些不同的新元素转化为 3-元组。

3-Set Packing 问题是一个 NP 难解问题[7]，在资源调度、代码优化和生物信息学等方面有着广泛的应用背景。参数化 3-Set Packing 问题近年来是参数计算领域中的一个研究热点，人们已从多个角度对其进行了一系列研究[8-11]。

多年前人们已经开始对 Set Packing 计数问题进行研究。文献[12]对给定实例中统计所有权值和最大的 Set Packing 问题提出了一个时间复杂度为 $O(1.3247^n)$ 的算法，其中 n 为实例中元组的个数。显然，该算法的时间复杂度函数为关于 n 的指数函数，而且其统计的解仅局限于权值累加和最大的解。

本文旨在运用参数化计数理论及技术来研究定义 3 中的 p-#3-Set Packing 问题。首先运用图匹配参数化计数问题的计算复杂性结果证明它的计算复杂性是 #W[1]-难的，然后通过拓展 3-D Matching 参数化计数问题的算法得到该问题的一种固定参数可解的随机近似算法。

2 相关定义和引理

首先引述参数化计数复杂性理论的一些相关概念。

定义 4[2] 对于一个参数化计数问题，如果存在一个时间复杂度为 $O(f(k)n^{O(1)})$ 的算法，其中 f 是一个仅仅依赖于参数 k 的函数，则称该计数问题是固定参数可解的(fix-parameter tractable, FPT)。相应地，该算法称为计数问题的一个固定参数可解算法。当参数 k 比较小时，固定参数可解算法是实际有效的。相反，一个参数化计数问题如果不是固定参数可解的，其复杂性类包含 #W[1]-难、#W[2]-难等多个层次。

定义 5[6] 设 $\boldsymbol{I}$ 为参数化计数问题 $\boldsymbol{P}$ 的任意一个实例，$\#(\boldsymbol{I})$ 为 $\boldsymbol{I}$ 中所有大小为 k 的不同解的个数，n 表示实例 $\boldsymbol{I}$ 的规模大小，实数 $\varepsilon>0, 0<\delta<1$，如果一个随机近似算法方案能在时间 $f(k)g(n,1/\varepsilon,\ln(1/\delta))$ 内以至少 $1-\delta$ 的概率计算出 $\#(\boldsymbol{I})$ 的一个 ε-近似值 $A(\boldsymbol{I})$，即关系式 $\mathrm{Prob}[(1-\varepsilon)\#(\boldsymbol{I})\leqslant A(\boldsymbol{I})\leqslant(1+\varepsilon)\#(\boldsymbol{I})]\geqslant 1-\delta$ 成立，则称这个随机近似算法方案为问题 $\boldsymbol{P}$ 的一个固定参数可解的随机近似算法方案(FPTRAS)。其中 f 是关于 k 的任意函数，g 是关于 $n, 1/\varepsilon$ 和 $\ln(1/\delta)$ 的一个多项式函数。

在研究 p-#3-Set Packing 问题的计算复杂性时，本文运用了图匹配参数化计数问题的相关结果。

定义 6[5](图匹配参数化计数问题(p-#MATCHING)) 给定一个简单无向图 G 和一个参数 k，统计 G 上所有大小为 k 的不同匹配的个数。其中一个大小为 k 的匹配是指图 G 上 k 条相互之间没有公共端点的边。

设图 $G=(V,E)$，$u\in V, v\in V, u\neq v$ 表示 u,v 为两个不同的点。设 $e\in E$，$V(e)$ 表示由 e 的两个端点构成的集合。

引理 1[5] p-#MATCHING 问题的计算复杂性为 #W[1]-难的。

在研究 p-#3-Set Packing 问题的随机近似算法时，本文拓展了文献[13]中求解 3-D Matching 参数化计数问题的算法。有关 3-D Matching 参数化计数问题的定义如下。

设 X,Y,Z 为 3 个互不相交的有限符号集，并设 $x\in X$，$y\in Y$，$z\in Z$，则有序元组 (x,y,z) 称为 X,Y,Z 上的一个三元组。对于一个含有多个有序三元组的集合 M，如果其中任意两个元组之间都没有相同符号，则称 M 为一个 matching。一个正好含有 k 个三元组的 matching，称为一个 k-matching。

定义 7[13](3-D Matching 参数化计数问题(p-# 3-D Matching)) 给定一个组对 (S,k)，其中 S 是 X,Y,Z 上 n 个有序三元组的集合，k 是一个非负整数，目标是统计 S 中所有不同 k-matching 的个数。

算法中主要运用了文献[14]中改进的着色技术。

定义 8[14] 设 U 是一个包含多个元素的集合，U 的一个 k-着色是一个把 U 中元素映射到自然数集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的函数。对于 U 的一个着色函数 f 和 U 的一个子集 $\boldsymbol{W}$，如果 $\boldsymbol{W}$ 中的任意两个元素都没有被 f 着上相同的颜色，则称 $\boldsymbol{W}$ 被 f 正确着色。假设 $\boldsymbol{F}$ 是 U 的多个 k-着色函数的集合，如果对于 U 中的任意一个含有 k 个元素的子集 $\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{F}$ 中总存在一个 k-着色函数将 $\boldsymbol{W}$ 正确着色，则称 $\boldsymbol{F}$ 是 U 的一个 k-着色方案。k-着色方案 $\boldsymbol{F}$ 的大小等于 $\boldsymbol{F}$ 中 k-着色函数的个数。

引理 2[14] 对于任意一个含有 n 个元素的有限集 U 和任意正整数 $k(k\leqslant n)$，总存在 U 的一个大小为 $O(6.4^k n)$ 的 k-着色方案 $\boldsymbol{F}$，并且 $\boldsymbol{F}$ 可在时间 $O(6.4^k n)$ 内被构造。

3 p-#3-Set Packing 的计算复杂性

在确定 p-#3-Set Packing 的计算复杂性时，本文根据 Flum 和 Grohe 在文献[2]中提出的参数化节俭规约(Parameterized Parsimonious Reduction)将 p-#MATCHING 问题规约至 p-#3-Set Packing 问题。

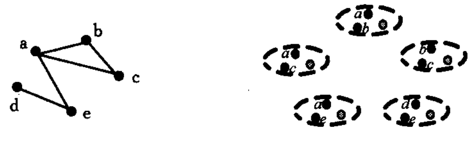
定义 9[2] 设 $P:\Sigma^*\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$ 和 $R:\Pi^*\times\mathrm{N}\rightarrow\mathrm{N}$ 为两个参数化计数问题。如果存在一种从 P 到 R 的规约，对于问题 P 的任意一个实例 (x,k)，该规约都能在时间 $f(k)|x|^c$ 内产生问题 R 中的一个对应实例 (y,l)，使得 $l\leqslant g(k)$，并且 $P(x,k)=R(y,l)$，其中 f 和 g 是两个可计算函数，则称该规约为从 P 到 R 的一种参数化节俭规约。

定理 1 p-#3-Set Pac-king问题的计算复杂性是 #W[1]-难的。

证明：首先描述由 p-#MATCHING 到 p-#3-Set Packing的规约过程。

设 $(G=(V,E),k)$ 为 p-#MATCHING 的任意一个实例。由于图中的孤立点不可能存在于任何匹配之中，因此假设图 G 上不存在任何孤立点。现按如下过程构造 p-#3-Set Packing的一个对应实例 (S,l)。初始情况设 $S=\varnothing$，然后按照后续规则依次往集合 S 中添加对应的三元组。具体来说，对于 V 中任意一个顶点对 (u,v)，如果 u,v 之间存在一条边，则设置一个三元组 (u,v,w) 并放入集合 S 中，其中 w 为一个新增加的元素，即 $w\notin V$ 且 w 不属于 S 中当前已有的任何元组中。设图 G 中共存在 m 条边 $e_1,e_2,\cdots,e_m$，执行此构造规则之后集合 S 中将含有 m 个三元组(如图 1 所示，其中灰色的点表示新增加的元素)，并令 $l=k$。该构造过程显然可在多项

式时间内完成。进一步，设 S 中各元组新增加的元素构成集合 $V'=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$，可以看出，$V'\cap V=\emptyset$，并且对于任意 $i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant m)$ 都有 $w_i\neq w_j$。



G　　　　S

图 1　由图 G 构造对应集合 S 的示意图

接着证明实例 (G,k) 中大小为 k 的匹配的个数正好等于实例 (S,l) 中 k-packing 的个数。设 Q_1 表示 (G,k) 中所有大小为 k 的匹配的集合，Q_2 表示 (S,l) 中所有 k-packing 的集合。下面证明 Q_1 和 Q_2 之间存在一个一一映射。

一方面，对于 Q_1 中任意一个大小为 k 的匹配，Q_2 中必定存在唯一一个对应的 k-packing。不失一般性，设边集 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 为图 G 上任意一个大小为 k 的匹配，$\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 为 S 中对应的 k 个三元组。对于任意 $i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant k)$，根据匹配的定义可得，$V(e_i)\cap V(e_j)=\emptyset$。由前述构造过程可知 $s_i=V(e_i)\cup\{w_i\}$，$s_j=V(e_j)\cup\{w_j\}$。又 $w_i\neq w_j$ 且 $w_i\notin V(e_j)$，$w_j\notin V(e_i)$，因此 $s_i\cap s_j=\emptyset$。即 $\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 构成 S 中的一个 k-packing。进一步地，设 $M=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 和 $M'=\{e_1',e_2',\cdots,e_k'\}$ 为图 G 上两个不同的但大小均为 k 的匹配，$P=\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 和 $P'=\{s_1',s_2',\cdots,s_k'\}$ 为 S 中分别对应于 M 和 M' 的两个 k-packing。由 M 不同于 $M'(M\neq M')$ 可知，必定存在 $i\in[1,k]$ 使得 $V(e_i)\neq V(e_i')$。又由于 $s_i=V(e_i)\cup\{w_i\}$，$s_i'=V(e_i')\cup\{w_i'\}$，因此 $s_i\neq s_i'$，故有 $P\neq P'$。

另一方面，对于 Q_2 中任意一个 k-packing，Q_1 中必定对应存在一个大小为 k 的匹配。设元组集合 $S'=\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 为 S 中的任意一个 k-packing，下面证明图 G 中必定存在对应的 k 条边，并且这 k 条边构成图 G 上的一个匹配。首先证明对于 S' 中的任意一个元组 s_i，$i\in[1,k]$，图 G 中必定存在唯一一条对应边 e_i。1）反设在 G 中找不到与 s_i 对应的边。这时要么 s_i 中的 3 个元素都不属于 V，要么 s_i 中属于 V 的 2 个点为图 G 上互不邻接的两个顶点。前者与 s_i 中必有 2 个点属于 V 矛盾；后者与 s_i 中必定含有图 G 上某条边的 2 个端点矛盾。2）反设 G 上存在至少两条不同的边对应 s_i，由于简单图上两条不同的边至少含有 3 个端点，这说明 s_i 中的 3 个点同时来自于图 G，这与 s_i 中至少有一个顶点不属于 V 相矛盾。因此 $\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ 必定正好对应图 G 上的 k 条边 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$。进一步地，对于任意 $i\neq j(1\leqslant i,j\leqslant k)$，根据packing的定义知 $s_i\cap s_j=\emptyset$。又由于 $V(e_i)=s_i-\{w_i\}$，$V(e_j)=s_j-\{w_j\}$，可得 $V(e_i)\cap V(e_j)=\emptyset$。因此边集 $\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 构成图 G 上的一个大小为 k 的匹配。

综上所述，p-#MATCHING 到 p-#3-Set Packing 存在一种参数化节俭规约。根据引理 1，p-#MATCHING 的计算复杂性为 #W[1]-难的，因此 p-#3-Set Packing 的计算复杂性也是 #W[1]-难的。

4　p-#3-Set Packing 的随机近似算法

定理 1 表明，p-#3-Set Packing 不大可能存在固定参数可解的精确算法（除非 #W[1]=FPT）。本节根据 p-#3-D Matching 与 p-#3-Set Packing 两个问题结构上的联系（前者是后者的一种更为严格的约束形式），通过拓展文献[13]中求解 p-#3-D Matching 的算法，对 p-#3-Set Packing 提出一个基于 Monte-Carlo 自适应覆盖算法的随机近似算法。

Monte-Carlo 自适应覆盖算法的基本思想是将被估测集合分解成一些相互之间存在重复元素的子集，然后通过随机检测子集之间的重复程度来估计被估测集合中元素的个数[15]。根据这一思想，求解 p-#3-Set Packing 算法的总体思路如下。

对于给定的任意一个实例 (S,k)，设 U 表示 S 中所有元组的并集，首先采用文献[14]中改进的着色技术用 $3k$ 种颜色对 U 中的元素进行着色，根据引理 2 可以对 U 中的元素构造一个着色方案 $\boldsymbol{F}=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，其中 $m=O(6.4^{3k}n)$。设 $A_i=\{P\mid P$ 为着色函数 f_i 映射下 S 中正确着色的 k-packing$\}$，然后着重解决下述 3 个子问题。

（1）如何计算在任一着色函数 $f_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 映射下 A_i 的大小。实现这一功能的算法称为分块统计算法。

（2）如何以相同的概率 $1/|A_i|$ 随机地从 $A_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 中选择一个 k-packing。实现这一功能的算法称为样本抽取算法。

（3）给定集合 $A_j(1\leqslant j\leqslant m)$，如何判断随机选择的某个 k-packing P 是否属于集合 A_j。

由于子问题（3）可以容易地在多项式时间内解决，本节主要讨论解决子问题（1）的分块统计算法和解决子问题（2）的样本抽取算法。同时，由于后续分块统计算法和样本抽取算法是文献[13]中求解 p-#3-D Matching 相应算法的拓展，相关定理的正确性可由文献[13]推导出来。算法描述中主要阐述两者的不同点。

4.1　分块统计算法

分块统计算法的目标是统计在任一着色函数 $f_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的映射下 S 中被正确着色 k-packing 的个数。其基本思路是：从第 1 个元组出发，用动态规划技术依次判定各个元组能否组合扩充当前有关的 j-packing$(0\leqslant j<k)$。组合扩充的条件是当前的 packing 与当前被判定元组中元素被着上不同的颜色。同时，算法在存储空间 Q 中用形式为 (C,h,b) 的组对动态地记录当前的统计结果，其中 C 表示被正确着色的颜色集，h 表示相应 packing 的个数，b 表示相应 packing 的大小。

与求解 p-#3-D Matching 的算法比较，其主要不同点有：1）在动态规划过程执行之前，由于用 $3k$ 种颜色对 U 中所有的元素进行着色，因此无需对第一列元素按照元素名称进行归类处理。2）动态规划的执行过程用内、外二重循环而无须使用三重循环就可实现。具体来说，在内循环中依次处理存储空间 Q 中形式为 (C,h,b) 的组对，在外循环中依次处理 S 中的元组。（3）整个动态规划过程可在时间 $O(2^{3k}kn)$ 内完成。其分析过程为：由于对于任意一个含有 $3j(0\leqslant j\leqslant k)$ 种不同颜色的集合 C，存储空间 Q 保留了最多一个组对 (C,h,j)，同时在 $3k$ 种不同颜色中选择 $3j$ 种颜色的组合数为 $\binom{3k}{3j}$，因

此 Q 中不同组对(C,h,j)的总数 $d\leqslant\sum_{j=0}^{j=k}\binom{3k}{3j}\leqslant 2^{3k}$。相应地，完成动态规划过程需要的时间为 $O(2^{3k}kn)$。

类似于文献[13]中的定理 3，可以得到定理 2。

定理 2 在着色函数 f 的映射下如果 S 中存在 q 个($q\geqslant 0$)正确着色的 k-packing，则分块统计算法可在时间 $O(2^{3k}kn)$ 内返回整数 q。

4.2 样本抽取算法

设在任意 k-着色函数 f 映射下 S 中包含 q 个不同的正确着色的 k-packing，样本抽取算法的目标是以 $1/q$ 的相同概率随机输出其中一个 k-packing。样本抽取算法的主要步骤与分块统计算法相似，关键不同点有：1)由于要输出一个具体的 packing，存储空间必须进行预存。可用组对(C,h,P)表示一组含有 h 个大小相同且被着的颜色集都为 C 的packing，其中 P 表示以 $1/h$ 的概率从中随机选择的一个 packing。2)在动态规划过程中如果存储空间中已经存在一个组对(C,h',P') 满足$|P|=|P'|$，则通过一个随机函数 random(P,P')从 P 和 P'中进行选择，使得选择 P 的概率为 $h/(h+h')$，选择 P'的概率为 $h'/(h+h')$。该步骤可以在时间 $O(1)$内完成。

类似于文献[13]中的定理 5，可以得到定理 3。

定理 3 在着色函数 f 映射下如果 S 中存在 $q(q\geqslant 0)$个正确着色的 k-packing，则样本抽取算法可在时间 $O(2^{3k}kn)$内以 $1/q$ 的概率随机抽取其中一个k-packing(当 $q=0$ 时返回空集)。

根据定理 2、定理 3 和 Monte-Carlo 自适应覆盖算法，可以得到定理 4。

定理 4 p-#3-Set Packing 问题存在一个固定参数可解的随机近似算法方案。即给定任意一个实例(S,k)和两个正实数 ε 和 δ，该算法能在时间 $O(12.8^{3k}|S|^2k^3\ln(2/\delta)/\varepsilon^2)$内以 $\mathrm{Prob}[(1-\varepsilon)H_0\leqslant H\leqslant(1+\varepsilon)H_0]\geqslant 1-\delta$ 的概率输出一个非负整数 H，其中 H_0表示 S 中 k-packing 的精确个数。

结束语 本文以图匹配参数化计数问题为被规约对象，证明了 3-Set Packing 参数化计数问题的计算复杂性为#W[1]-难的。同时在求解 3-D Matching 参数化计数问题算法的基础上对 3-Set Packing 参数化计数问题提出了一个时间复杂度为 $O^*(12.8^{3k})$的固定参数可解随机近似算法。本文的结论表明了 3-Set Packing 参数化计数问题是又一个#W[1]-难的，但存在固定参数可解随机近似算法的典型实例。

最近我们已将本文的结论推广到更为一般的 m-Set Packing 参数化计数问题($m\geqslant 3$)[16]。由于参数化 3-Set Packing 问题在理论上具有独特意义[8-11]，如何运用文献[8-11]中的某些技术改进本文中的随机近似算法有待深入研究。

参 考 文 献

[1] McCartin C. Parameterized counting problems[C]//Proceedings of the 27th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science(MFCS'02). 2002:556-567

[2] Flum J, Grohe M. The parameterized complexity of counting problems[J]. SIAM Journal on Computing, 2004, 33(4): 892-922

[3] Zhang Chi-hao, Chen Yi-jia. Counting problems in parameterized complexity[J]. TsingHua Science and Technology, 2014, 19(4): 410-420

[4] Flum J, Grohe M. Parameterized complexity theory[M]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006

[5] Curticapean R. Counting matching of size k is #W[1]-hard[C]//Proceedings of the 40th International Colloquium on Automata, Languages and Programming(ICALP'13). 2013:352-363

[6] Arvind V, Raman V. Approximation algorithms for some parameterized counting problems[C]//Proceedings of the 13th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'02). 2002:453-464

[7] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness[M]. W. H. Freeman, New York, 1979

[8] Wang Jian-xin, Feng Qi-long. An $O^*(3.52^{3k})$ parameterized algorithm for 3-Set Packing[C]//Proceedings of the 5th International Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC'08). 2008:82-93

[9] Abu-Khzam F N. A quadratic kernel for 3-Set Packing [C]//Proceedings of the 6th Annual Conference on Theory and Applications of Models of Computation (TAMC'09). 2009:81-87

[10] Feng Qi-long, Wang Jian-xin, Chen Jian-er. Improved algorithms for weighted 3-Set Packing[J]. Journal of Software, 2010, 21(5):886-898(in Chinese)
冯启龙，王建新，陈建二. 加权 3-Set Packing 的改进算法[J]. 软件学报，2010，21(5):886-898

[11] Li Shao-hua, Feng Qi-long, Wang Jian-xin, et al. Kernelizaiton for weighted 3-Set Packing problem[J]. Journal of Computer Research and Development, 2012, 49(8):1781-1786(in Chinese)
李绍华，冯启龙，王建新，等. 加权 3-Set Packing 问题的核心化[J]. 计算机研究与发展，2012，49(8):1781-1786

[12] Dahllof V, Jonsson P. An algorithm for counting maximum weighted independent sets and its application [C]//Proceedings of the 13th annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'02). 2002:292-298

[13] Liu Yun-long, Chen Jian-er, Wang Jian-xin. On counting 3-D Matchings of size k [J]. Algorithmica, 2009, 54:530-543

[14] Chen Jian-er, Lu Song-jian, Sze S H, et al. Improved algorithms for path, matching, and packing problems[C]//Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'07). 2007:298-307

[15] Karp R M, Luby M, Madras N. Monte-Carlo approximation algorithms for enumeration problems [J]. Journal of Algorithms, 1989, 10:429-448

[16] Liu Yun-long, Wang Jian-xin. On counting parameterized matching and packing [C]//Proceedings of the 10th International Frontiers of Algorithmics Workshop (FAW'16). 2016:125-134