

带等时空载返程运输的双机 Flow shop 调度问题复杂性

兰 艳^{1,2} 张明会^{1,2} 武宗涛¹ 韩 鑫¹

(大连理工大学软件学院 大连 116620)¹ (大连东软信息学院软件工程系 大连 116023)²

摘 要 流水作业(Flow shop)问题是调度算法研究中经典问题模型之一,有两台处理机和一台运输机且运输机每次只运输一个工件的流水作业调度问题模型在现实中有着广泛的应用。同时考虑运输机去程(从机器 M_1 到 M_2)与返程(从机器 M_2 到 M_1)时间,在假定运输机去程运输时间及返程空载时间相等的情况下,通过把一个强 NP-complete 问题——3-PARTITION 问题归约成一个研究问题的实例,来证明对这个问题求解是强 NP-hard 的。

关键词 Flow-shop 问题,空载返程运输,调度,复杂性

中图分类号 TP3-05 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.9.003

Complexity of Flow Shop Scheduling Problems with No-load Return Transportation

LAN Yan^{1,2} ZHANG Ming-hui^{1,2} WU Zong-tao¹ HAN Xin¹

(School of Software Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116620, China)¹

(Department of Computer Science and Technology, Dalian Neusoft University of Information, Dalian 116023, China)²

Abstract Flow shop is one of the most classic scheduling problems. The model of a flow shop problem with two machines and a transporter which can transport a job from machine 1(M_1) to machine 2(M_2) every time is widely applied in most manufacturing systems. In this paper, the no-load return transportation time from machine M_2 to M_1 was considered, and we assumed that it equals with the time from M_1 to M_2 . Then we showed that the NP-complete problem 3-PARTITION is reducible to an instance of the problem we researched, so that we can demonstrate that this problem is a NP-hard problem in the strong sense.

Keywords Flow-shop problems, No-load return transportation, Scheduling, Complexity

1 引言

流水作业(Flow shop)问题是调度算法研究中经典问题模型之一,是指一个包含了多台机器,多个待加工的工件需要在这些机器上依次加工的生产系统。一个标准的流水线调度问题是不计运输时间的,任务可以在被处理完之后立即移动到另一台机器上,其数学模型可表述为:给定 $m(m \geq 2)$ 台机器和 n 个待加工工件 $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$, 每个工件 J_j 包含 m 个工序 $Q(i, j) (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$, 其加工顺序为: $Q(1, j), Q(2, j), Q(3, j), \dots, Q(m, j)$ 。工序 $Q(i, j)$ 在机器 M_i 上的加工时间为 $p_{i,j}$ 且不允许中断,一台机器同一时刻只能加工一个工件。按照 Lawler 等人^[1]在 1993 年提出的流水线问题表示方法中,可以把一个两台机器的标准流水线问题表示成 $F2 \parallel C_{\max}$, 其中“F”表示这是一个 Flow shop 问题,“2”表示有两台机器,“ C_{\max} ”表示问题的目标变量,即所有工件完成加工所需的最小时间。

对于多机($m \geq 3$)不考虑级间运输时间的 Flow shop 调度问题,文献[2,3]首先做了详细的研究,文献[4]又做了进一步探讨,并已证明该问题是 NP-hard 问题,因此大部分学者都已

不再探讨这类问题的复杂性,而转移至近似算法、在线算法等算法优化领域的研究,如文献[5]给出了一种遗传分枝定界算法求解 3 机 Flow shop 调度问题,文献[6]对流水作业批调度问题的一系列优化算法进行研究,文献[7]对置换流水线车间调度问题进行研究,文献[8-10]对遗传算法在流水车间调度问题做了一系列的研究及改进。

对带运输时间的 Flow shop 问题,目前也有不少学者做了大量的研究。文献[11]讨论了带一台运输机的 3 台机器级间运输调度复杂性,并证明所有工件在 3 台机器上加工时间相同而运输时间各不相同的情况下,即 $F3, R1 | p_{i,j} = p; t_{j,k} | C_{\max}$ 是强 NP-hard 问题。

对于有两台加工机器和考虑级间运输时间的流水线调度问题, Lee 等人于 2001 年曾对此进行详细定义,问题的模型为:有 2 台加工机器,运输机从机器 M_1 到机器 M_2 一次运输 y 个作业,从机器 M_1 到机器 M_2 的运输时间为 τ ,从机器 M_2 回到机器 M_1 的时间为 σ ,规定此类问题可以用符号 $TF2 | \nu = 1, c = y | C_{\max}$ 来表示,其中“T”表示有考虑级间运输时间,“F”表示 Flow-shop 问题,“ ν ”表示运输机的数量,“c”表示运输机一次运输多少个作业, C_{\max} 表示所有工件完成加工所需的最

到稿日期:2015-08-05 返修日期:2015-09-21 本文受国家自然科学基金项目:在线背包问题的相关模型和算法分析(11101065)资助。

兰 艳(1981-),女,博士生,副教授,主要研究方向为组合优化、流水调度、并行机调度,E-mail:lanyan@mail.dlut.edu.cn;张明会(1980-),女,硕士,副教授,主要研究方向为组合优化、bin-packing 近似算法与在线算法设计,E-mail:neusoftzhang@163.com;武宗涛(1989-),男,硕士,主要研究方向为算法分析与设计;韩 鑫(1976-),男,博士,副教授,主要研究方向为算法分析与设计、组合优化。

小时间^[12]。1991年 Kise 等人^[13]已经证明在 $\tau + \sigma$ 等于常数的情况下,问题 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 是一个弱 NP-hard 问题;2001年 Hurink 等人^[14]进一步证明问题 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 在 $\sigma=0$ 的情况下是一个强 NP-hard 问题。目前众多学者在前人的研究基础上,对两台机器带级间运输的调度问题加入一系列约束限制,进而进一步证明其复杂性,文献[15]对两机无等待流水车间调度问题的基本性质进行了研究并给出同时存在普通工件和无等待工件的两机流水车间调度问题在排列排序范围内是 NP 困难的;文献[16]对带“不可用约束”前提的两台平行机排序算法进行了优化改进。

然而对有两台加工机器的带级间运输时间的 Flow shop 问题,目前的研究者均未考虑空载返程时间,本文要证明的即是 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 在 $\sigma \neq 0$ 且 $\tau = \sigma$ 情况下的流水调度是一个强 NP-hard 问题。

2 问题描述及相关符号定义

2.1 问题描述

问题描述如下: n 个工件(job)在两台机器 M_1, M_2 上处理加工,同一工件必须先机器 M_1 上完成加工,由运输机 R 在一定时间内运输到机器 M_2 并在其上加工,且 R 一次最多运输一个工件,运输机 R 到达机器 M_2 立即返回。每一工件在机器 M_1, M_2 上加工时间不一定相同,每台机器有无限个缓存区来缓存待处理的作业;运输机 R 从机器 M_1 到机器 M_2 的运输的时间为 τ ,从机器 M_2 返回到机器 M_1 的时间为 σ 。该问题的目标是设计一个合理调度,使得所有工件全部加工完毕所需的时间最短,最短时间用 $C_{\max}(S)$ 来表示,其中 S 表示一种调度。按 Lee 等人^[12]的表示法可表示为 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$, 本文将证明在 $\tau = \sigma \neq 0$ 的情况下该问题是一个强 NP-hard 问题。

2.2 符号定义

为了方便后文的证明,此处定义 Flow shop 问题中与时间有关的符号; $Start_{i,j}$ 表示工件 j 在机器 M_i 上的开始时间; $p_{i,j}$ 表示工件 j 在机器 M_i 上的加工时间; $End_{i,j}$ 表示工件 j 在机器 M_i 上的完成时间,不难得出 $End_{i,j} = Start_{i,j} + p_{i,j}$; τ 表示运输机从 M_1 到机器 M_2 的运输时间, σ 表示从机器 M_2 到机器 M_1 的空载返回时间; $C_{\max}(S)$ 表示所有工件全部加工完毕所需的最短时间。

2.3 3-PARTITION 问题

给定正整数 b 和 $3m$ 个正整数集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3m}\}$, 满足式(1)和式(2)两个条件。

$$\frac{b}{4} < x_i < \frac{b}{2}, i=1, 2, 3, \dots, 3m \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{3m} x_j = mb \quad (2)$$

其中,式(1)表明集合 X 中每个元素都大于 $\frac{b}{4}$ 同时小于 $\frac{b}{2}$; 式

(2)表明集合中所有元素的加和恰巧是 m 倍的 b 。

确定是否存在一个将正整数集合 X 分成 m 个互不相交的由 3 个元素构成的子集 $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_m\}$ 且满足式(3)。

$$\sum_{x_j \in X_i} x_j = b, i=1, 2, 3, \dots, m \quad (3)$$

式(3)表明对任何一个子集 X_i , 集合中所有元素的加和恰好是 b 。

3-PARTITION 问题的目的是确定是否存在满足条件的划分,即是否能将这 $3m$ 个正整数分成 m 个集合且保证每个

集合中元素加和恰巧为 b , Garey 等人 1979 年已经证明出该问题是强 NP-Hard 的问题。

3 $\tau = \sigma$ 情况下的 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 问题复杂性

按照证明强 NP-hard 问题的思路,只要证明一个强 NP-hard 问题的实例可以归约成要证明的问题的实例,即可得到该问题是一个强 NP-hard 问题。本文利用强 NP-Hard 的 3-PARTITION 问题到 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 的规约来证明本文所讨论的问题是强 NP-hard 的。

对带一台运输机的两台机器的流水调度问题, Hurink 等人 2001 年已经证明 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 在 $\sigma=0$ 的情况下是一个强 NP-hard 问题, 本文将进一步证明在 $\tau = \sigma \neq 0$ 的情况下 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 仍是一个强 NP-hard 问题。

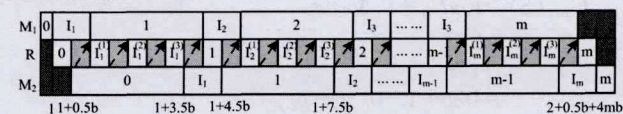
给定 3-PARTITION 问题的任一实例, 现构造一 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 问题实例, 该实例中将 n 个工件分成 4 类, 为方便表述, 假设 $n=4m+1$, 则各工件编号为 $0, 1, 2, 3, \dots, 4m$ 。

- 1 个开始工件 *Start-job* 0: $p_{1,0}=1, p_{2,0}=3b$
- 1 个结束工件 *End-job* m : $p_{1,m}=3b, p_{2,m}=1$
- $m-1$ 个大工件 *Big-job* $1, 2, \dots, m-1$:
 $p_{1,j}=3b, p_{2,j}=3b, j=1, 2, 3, \dots, m$
- $3m-1$ 个划分工件 *Part-job* $m+1, m+2, \dots, 4m$:
 $p_{1,i+m}=a_i, p_{2,i+m}=a_i, i=1, 2, \dots, 3m$

本实例中设定 $\tau = \sigma = 0.5b$, 且工件在两台机器上加工的序列一致。按照强 NP-hard 问题的规约证明思路, 只要证明满足 $C_{\max}(S) \leq y$ 的调度 S 存在当且仅当 3-PARTITION 问题有解, 即可证明 $C_{\max}(S)$ 在 $\tau = \sigma \neq 0$ 情况下是一个强 NP-hard 问题。

3.1 3-PARTITION 问题有解, 则满足条件的调度序列 S 存在

现假定 m 个互不相交的子集 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_m$ 即为 3-PARTITION 的解, 每个子集含 3 个划分工件, 则构造如图 1 所示的调度序列。



注: ■ 表示空闲状态, □ 表示运输机空车返回状态(以下类同)。

图 1 根据 3-PARTITION 实例构造的调度序列

从图 1 中可以看出, 开始工件 *Start-job* 0 在机器 M_1 上开始加工的时刻为 0, 运输机开始运输的时刻为 1, 在机器 M_2 上开始加工的时间为 $1+0.5b$; 最后一个结束工件 *End-job* m 在 M_2 上的完成的时间是 $2+0.5b+4mb=2+nb-0.5b$, 所以按照图 1 的构造的实例序列可知, 总的加工时长为 $2+nb-0.5b$, 显然, 这个调度序列 S 符合 $C_{\max}(S) \leq y$, 即 3-PARTITION 问题有解 $TF2|\nu=1, c=1|C_{\max}$ 则有解。

3.2 若调度序列 S 存在, 则 3-PARTITION 问题有解

若存在一个调度序列 S 符合 $C_{\max}(S) \leq y=2+nb-0.5b$, 则根据所构造的实例特征, 不难得出引理 1—引理 5。

引理 1 工件 *Start-job* 0 一定最先在机器 M_1 上开始加工。

证明: 若工件 *Start-job* 0 不是最先在机器 M_1 上开始加工的工件, 现假定工件 j 最先在机器 M_1 上开始加工, 如图 2 所示。

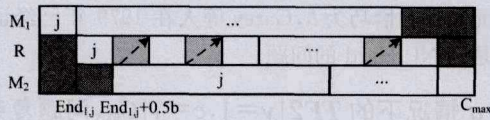


图2 j 是最先开始加工的情况下的调度序列图

根据所构造的实例特征,除 $Start-job$ 0 外的其它任何工件在 M_1 上的加工时长均大于 1,因此有 $p_{1j} > 1$,即 $End_{1,j} > 1$ 。

从机器 M_2 来看,整个调度的最小完工时间 $C_{max}(S)$ 一定满足:

$$\begin{aligned} C_{max}(S) &\geq End_{1,j} + 0.5b + \sum_{k=0}^{4m+1} p_{2,k} \\ &= End_{1,j} + 0.5b + 4mb + 1 \\ &> 4mb + 0.5b + 2 \\ &= 2 + nb - 0.5b \end{aligned}$$

即调度序列 S 不可能在 $2 + nb - 0.5b$ 时间前完成,与假设相矛盾,因此引理 1 得证。

引理 2 工件 $End-job$ m 一定是最后在 M_2 上完成加工的工件。

证明:假设工件 $End-job$ m 不是最后在机器 M_2 上最后加工的工件,现假定工件 $j(j \neq m)$ 在机器 M_2 上开始最后加工,如图 3 所示。

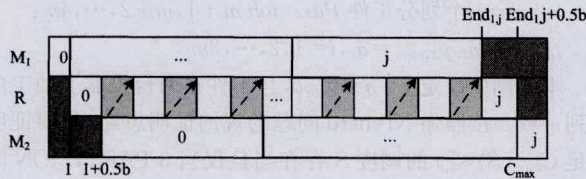


图3 j 是最后完成加工的情况下的调度序列图

根据所构造的实例特征,除结束工件 $End-job$ m 以外的其它任何工件 $j(j \neq m)$ 在 M_2 上的加工时长均大于 1,即 $p_{2,j} > 1$ 。

从机器 M_1 看,整个调度的最小完工时间 $C_{max}(S)$ 一定满足:

$$\begin{aligned} C_{max}(S) &\geq End_{1,j} + 0.5b + p_{2,j} \\ &\geq \sum_{k=0}^{4m+1} p_{1,k} + 0.5b + p_{2,j} \\ &= 4mb + 1 + 0.5b + p_{2,j} \\ &> 4mb + 1 + 0.5b + 1 \\ &= 2 + nb - 0.5b \end{aligned}$$

即调度序列 S 不可能在 $2 + nb - 0.5b$ 时间前完成,与假设相矛盾,因此引理 2 得证。

引理 3 机器 M_1 在时间段 $[0, (n-1)b + 1]$ 内加工工件且无空闲。

证明:依据引理 1 和引理 2 可构造如图 4 所示的调度序列。

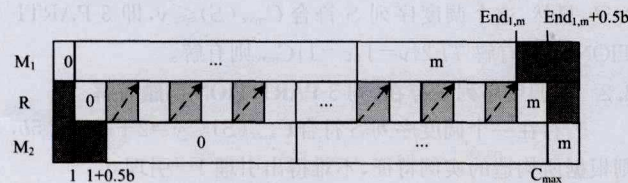


图4 工件 0 最先加工,工件 m 最后完成加工的调度序列图

若 M_1 在时间段 $[0, (n-1)b + 1]$ 内有空闲,则一定有

$$End_{1,m} > \sum_{k=0}^{4m+1} p_{1,k} = (n-1)b + 1$$

而

$$\begin{aligned} C_{max}(S) &\geq End_{1,m} + 0.5b + p_{2,m} \\ &> (n-1)b + 1 + 0.5b + 1 \\ &= 2 + nb - 0.5b \end{aligned}$$

即调度序列 S 不可能在 $2 + nb - 0.5b$ 时间前完成,与假设相矛盾,因此引理 3 得证。

引理 4 运输机 R 在 $[1, (n-0.5)b + 1]$ 内无空闲,即要么在从机器 M_1 运输工件到机器 M_2 ,要么在从机器 M_2 返回至机器 M_1 。

证明:依据引理 1 易知,运输机在 1 时刻开始运输 $Start-job$ 0。所有工件被运输至机器 M_2 的时间为 $(n-0.5)b$,若运输机 R 在 $[1, (n-0.5)b + 1]$ 内有空闲,则一定有

$$Start_{2,m} > 1 + (n-0.5)b$$

而

$$\begin{aligned} C_{max}(S) &\geq Start_{2,m} + p_{2,m} \\ &> 1 + (n-0.5)b + 1 \\ &= 2 + nb - 0.5b \end{aligned}$$

即调度序列 S 不可能在 $2 + nb - 0.5b$ 时间前时间完成,与假设相矛盾,因此引理 4 得证。

引理 5 机器 M_2 在时间段 $[1 + 0.5b, (n-1)b + 1]$ 内加工工件且无空闲。

证明:依据引理 1 和引理 4 知,工件 $Start-job$ 0 在机器 M_2 上开始加工的时刻为 $1 + 0.5b$,而所有工件在机器 M_2 上的加工总时长为 $\sum_{k=0}^{4m+1} p_{2,k} = 4mb + 1 = (n-1)b + 1$,若 M_2 在时间段 $[1 + 0.5b, (n-1)b + 1]$ 内有空闲,则一定有

$$\begin{aligned} C_{max}(S) &\geq 1 + 0.5b + \sum_{k=0}^{4m+1} p_{2,k} \\ &> 1 + 0.5b + (n-1)b + 1 \\ &= 2 + nb - 0.5b \end{aligned}$$

即调度序列 S 不可能在 $2 + nb - 0.5b$ 时间前完成,与假设相矛盾,因此引理 5 得证。

依据引理 1—引理 5 进一步证明若调度序列 S 存在,则 3-PARTITION 有解。现将调度序列 S 用图例表示出来,如图 5 所示。

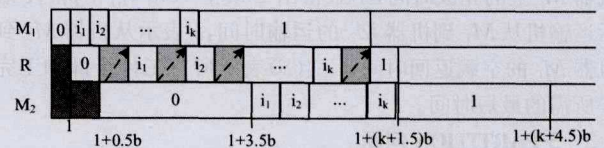


图5 调度序列可行解至 3-PARTITION 解的分析过程图

不失一般性,假设工件 $1, 2, 3, \dots, m-1$ 在 M_1 上按递增顺序加工,集合 I_1 为在 $Start-job$ 0 和 $Big-job$ 1 之间加工的工件集合,假定 $I_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ 。

由于 $p_{1,1} = 3b$,而运输机 R 运输工件 $Start-job$ 0 至机器 M_2 及返回的时间为 b ,显然若集合 $I_1 = \emptyset$,则运输机 R 在 $1 + b$ 开始必定有一段空闲才能开始运输工件 $Big-job$ 1,这与上述引理 4 运输机在 $1 + 0.5b$ 开始工作且无空闲相矛盾,因此 $I_1 \neq \emptyset$ 。接下来,进一步证明 $\sum_{i \in I_1} a_i = b$ 且 $k = 3$ 。

引理 6 在上述构建的 Flow shop 实例中,若存在调度序列使得 $C_{max}(S) = y = 2 + nb - 0.5b$,则集合 I_1 中的工件数目必须为 3。

证明:在构造的实例中,对任一 $Part-job$ j 均有

$$p_{1,j} = p_{2,j} = a_j, j = 1, 2, 3, \dots, 3m$$

根据式(1)所示的 3-PARTITION 问题特征及上式知, $\forall i_\mu \in I_1$ 均有

$$\frac{b}{4} < x_j < \frac{b}{2}, j=1,2,3,\dots,3m \quad (4)$$

根据式(4)的结果, 不难得出 $\forall i_\mu \in I_1, \text{End}_{1,i_\mu} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\mu} p_{2,i_\lambda} < 1 + \mu \cdot \frac{b}{2} < 1 + \mu b, \mu=1,2,\dots,k$.

根据引理 4, 运输机在 $[1, 1+(k+1)b]$ 时间内无空闲, 即要么在运输工件 $0, i_1, i_2, \dots, i_k$, 要么在返回机器 M_1 的途中。

若 $k \leq 2$, 运输机完成工件 i_k 的运输并空载返回至机器 M_1 的时间为 $1+(k+1)b$, 即一定在 $1+3b$ 时间前完成运输工件 i_k 并返回, 而 $\text{End}_{1,1} = 1 + \sum_{\lambda=1}^k p_{2,i_\lambda} + 3b > 1+3b$, 即工件 1 在机器 M_1 完成加工时间 $1+3b$ 时间后, 因此运输机在运输完工件 i_k 返回至 M_1 后与开始运输工件 1 之间定有空闲, 这与引理 4 相矛盾, 因此 $k > 2$ 成立。

若 $k \geq 4$, 则依据式(4)有

$$\sum_{\lambda=1}^k p_{2,i_\lambda} < k \cdot \frac{b}{2} \leq k \cdot \frac{b}{2} + (k-4) \cdot \frac{b}{2} = (k-2) \cdot b$$

另一方面, 由于运输机必须首先将工件 $0, 1, i_1, i_2, \dots, i_k$ 按顺序运输完成后才能在机器 M_2 上开始加工 Big-job 1, 故 $\text{Start}_{2,1}$ 不可能早于 $1+(k+1.5) \cdot b$; 而 $\text{End}_{2,0} = 1+3.5b$; $\text{End}_{2,i_k} = \text{End}_{2,0} + \sum_{\lambda=1}^k p_{2,i_\lambda}$, 即 $\text{End}_{2,i_k} = 1+3.5b + \sum_{\lambda=1}^k p_{2,i_\lambda} < 1+3.5b + (k-2)b = 1+(k+1.5)b$ 。也就是说, 工件 i_k 完成在机器 M_2 上的加工时间不晚于 $1+(k+1.5)b$, 即 M_2 在完成工件 i_k 与开始加工 Big-job 1 之间有空闲, 与引理 5 矛盾。

因此引理 6 得证, 即 $k=3$ 。

引理 7 在构建的 Flow shop 实例中, 若存在调度序列使得 $C_{\max}(S) = y = 2 + nb - 0.5b$, 则 $\sum_{i \in I_1} a_i = b$ 。

依据引理 6 知集合 I_1 中元素个数为 3, 这意味着工件 Big-job 1 需在 $[1+4b, 1+4.5b]$ 时间内被运输机 R 运输至机器 M_2 , 这也就是说 $\text{Start}_{1,1} \leq 1+b$ 且 $\text{Start}_{2,1} \geq 1+4.5b$ 。因为 $\text{Start}_{1,1} = p_{1,0} + \sum_{i \in I_1} p_{1,i} = 1 + \sum_{i \in I_1} p_{1,i} < 1+b$, 则有 $\sum_{i \in I_1} p_{1,i} \leq b$ 成立。

根据所构建实例特征, 对任何一个划分工件 Part-job j 均满足 $p_{1,j} = p_{2,j} = a_i$, 因此式(5)成立。

$$\sum_{i \in I_1} p_{2,i} \leq b \quad (5)$$

同时由于 $\text{Start}_{2,1} \geq 1+4.5b$, 依据引理 5, 机器 M_2 在时间段 $[1+0.5b, (n-1)b+1]$ 内加工工件且无空闲, 可以得出:

$$\text{Start}_{2,1} = \text{End}_{2,0} + \sum_{i \in I_1} p_{2,i} = 1+3.5b + \sum_{i \in I_1} p_{2,i}$$

因此式(6)成立。

$$\sum_{i \in I_1} p_{2,i} \geq b \quad (6)$$

综合式(5)和式(6)知 $\sum_{i \in I_1} p_{2,i} = b$ 。

在构造的实例中对 $3m$ 个划分工件 Part-job 规定 $p_{1,i+m} = a_i, p_{2,i+m} = a_i$, 因此易得出 $\sum_{i \in I_1} a_i = b$ 。

类似, 很容易得出被工件 $1, 2, \dots, m$ 个分割开来的集合 I_2, I_3, \dots, I_m 均满足集合元素个数为 3, 且 $\sum_{i \in I_j} a_i = b (j=2, 3, 4, \dots, m)$ 。因此 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_m$ 是 3-PARTITION 的解。

也就是说, 若满足条件的调度序列 S 存在, 则 3-PARTITION 存在可行解。

3.3 在 $\tau = \sigma \neq 0$ 情况下的 $TF2|v=1, c=1|C_{\max}$ 的复杂性

定理 1 $TF2|v=1, c=1|C_{\max}$ 在 $\tau = \sigma \neq 0$ 是强 NP-hard 的。

证明: 由于本文用 3-PARTITION 到 $TF2|v=1, c=1|C_{\max}$ 问题的规约来证明其复杂性, 通过设计的实例, 3.1 节中已经证明出若 3-PARTITION 有解, 则满足条件的调度序列 S 存在; 3.2 节证明出若调度序列 S 存在, 则 3-PARTITION 有解。因此定理 1 得证。

结束语 本文主要证明了 $TF2|v=1, c=1|C_{\max}$ 问题在 $\tau = \sigma \neq 0$ 情况下是一个强 NP-hard 问题, 即该问题不能在多项式的时间复杂度内求解。为了引出这个问题, 首先给出了前人的研究成果, 在证明过程中, 也用到了前人证明的 NP-complete 问题——3-PARTITION 问题来作为主要的证明依据, 通过证明 3-PARTITION 问题可以归约成一个所研究问题的实例, 来证明该问题是一个 NP-hard 问题。

关于 TF2 问题的研究, 不同的学者有不同的研究角度, 该问题的大部分模型都被证明是 NP-hard 问题, 因此具有很高的理论研究价值和实践价值, 如可进一步研究当 $\sigma \neq 0$ 且 $\tau \neq \sigma$ 或运输机容量 $c \geq 2$ 时该问题的复杂性。

参考文献

- [1] Lawler E L, Lenstra J K, Kan A H G R, et al. Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity [J]. Handbooks in Operations Research and Management Science, 1993, 4(2): 445-522
- [2] Garey M R, Johnson D S, Sethi R. The complexity of flow shop and job shop scheduling [J]. Math Ops Res, 1976, 1(2): 117-129
- [3] Taillard E. Some efficient heuristic methods for the flow shop sequencing problem [J]. European Journal of Operational Research, 1990, 47(1): 65-74
- [4] Reeves C R. A genetic algorithm for flow shop sequencing [J]. Computers & Operations Research, 1995, 22(1): 5-13
- [5] Chen Xiong, Tang Guang-qiang, Wu Qi-di. Study of three machine flow-shop scheduling problem [J]. Information and Control, 2008, 31(3): 211-215 (in Chinese)
- [6] 陈雄, 汤光强, 吴启迪. 3 机 Flow-shop 调度问题研究 [J]. 信息与控制, 2008, 31(3): 211-215
- [7] Yang Liu, Hu Zhi-gang, Long Jun. Optimization Algorithm for Batch Scheduling in Flow Shop [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2012, 33(6): 1333-1336 (in Chinese)
- [8] 杨柳, 胡志刚, 龙军. 流水作业批调度问题优化算法研究 [J]. 小型微型计算机系统, 2012, 33(6): 1333-1336
- [9] Liu Ying, Gu Wen-xiang, Li Xiang-tao. Research on Permutation Flow-shop Scheduling Problem [J]. Computer Science, 2013, 40(11): 1-7 (in Chinese)
- [10] 刘莹, 谷文祥, 李向涛. 置换流水线车间调度问题的研究 [J]. 计算机科学, 2013, 40(11): 1-7
- [11] Liu Yan-feng, Liu San-yang. Permutation flow shop scheduling algorithm based on ant colony optimization [J]. Computer Applications, 2008, 28(2): 302-304 (in Chinese)
- [12] 刘延凤, 刘三阳. 置换流水线车间调度的蚁群优化算法 [J]. 计算机应用, 2008, 28(2): 302-304
- [13] Li Xiao-bin, Bai Yan, Geng Lin-xiao. Improved genetic algorithm for solving permutation flow shop scheduling problem [J]. Computer Applications, 2013, 33(12): 3576-3579 (in Chinese)
- [14] 李小缤, 白焰, 耿林霄. 求解置换流水线车间调度问题的改进遗传算法 [J]. 计算机应用, 2013, 33(12): 3576-3579

- [10] Chen Cheng-dong, Chen Hua-ping, Zhu Qi, et al. Ant Colony Optimization Algorithm for Batch Scheduling Problem of Two-stage Flow Shop[J]. *Computer Engineering*, 2012, 38(19):137-141(in Chinese)
陈成栋, 陈华平, 朱庆, 等. 两阶段流水车间批调度问题的蚁群优化算法[J]. *计算机工程*, 2012, 38(19):137-141
- [11] Shi Ling, Wen Jun. Flow-shop Scheduling Problem with Transportation Times and a Single Robot[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2008, 28(5):967-970(in Chinese)
时凌, 文军. 带运输时间和自动机的流水作业排序问题的复杂性[J]. *数学物理学学报*, 2008, 28(5):967-970
- [12] Lee C Y, Chen Z L. Machine scheduling with transportation considerations [J]. *Journal of Scheduling*, 2001, 4:3-24
- [13] Kise H, Shioyama T, Ibaraki T. Automated two-machine Flow-shop scheduling, a solvable case[J]. *IIE Transactions*, 1991, 23(1):10-16
- [14] Hurink J, Knust S. Makespan minimization for flow-shop problems with transportation times and a single robot [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2001, 112(1):199-216
- [15] Chen Ke-jia, Wang Xiao. Properties of two-machine no-wait flowshop scheduling problems[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(10):1502-1506(in Chinese)
陈可嘉, 王潇. 两机无等待流水车间调度问题的性质[J]. *控制与决策*, 2013, 28(10):1502-1506
- [16] Chen Bai-long. Two parallel machines scheduling with one availability constraint and jobs with delivery times[J]. *Journal of Lanzhou University(Natural Sciences)*, 2009, 45(4):140-146(in Chinese)
陈伯龙. 带运输时间和一个不可用约束的两台平行机排序[J]. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2009, 45(4):140-146
- [17] Zhang Cui-lin, Wang Shuo, Wang Jun-qiang. Research on Flexible Flow Shop Scheduling with Relaxation Constrains[J]. *Machine Design and Manufacturing Engineering*, 2014(5):39-44(in Chinese)
张翠林, 王烁, 王军强. 考虑约束松弛的柔性流水调度研究[J]. *机械设计与制造工程*, 2014(5):39-44
- [18] Chen Ke-jia, Wang Xiao. Property of solving two-machine flow shop scheduling with unavailable interval[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2015, 39(2):202-205(in Chinese)
陈可嘉, 王潇. 机器具有不可用时间间隔的两机流水车间调度问题求解性质[J]. *南京理工大学学报(自然科学版)*, 2015, 39(2):202-205
- [19] Garey M R, Johnson D S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* [M]. Wh Freeman & Company, 1979

(上接第 10 页)

- [67] Mariottini G L, Scheggi S, Morbidi F, et al. Planar Catadioptric Stereo; Single and Multi-View Geometry for Calibration and Localization[C]//Proc. ICRA. 2009:2711-2716
- [68] Ramalingam S, Bouaziz S, Sturm P, et al. The Light-Path Less Traveled[C]//Proc. CVPR. 2011:3145-3152
- [69] Reshetouski I, Manakov A, Bandhari A, et al. Discovering the Structure of a Planar Mirror System from Multiple Observations of a Single Point[C]//Proc. CVPR. 2013:89-96
- [70] Ihrke I, Kutulakos K N, Lensch H P A, et al. Transparent and Specular Object Reconstruction [J]. *CGF*, 2010, 29(8):2400-2426
- [71] Sturm P, Ramalingam S, Tardif J P, et al. Camera Models and Fundamental Concepts used in Geometric Computer Vision[J]. *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*. Now Publisher Inc., 2010, 6(1/2):1-183
- [72] Swaminathan R, Grossberg M D, Nayar S K. A Perspective on Distortions[C]//Proc. CVPR. 2003:594-601
- [73] Yu J, McMillan L, Sturm P. Multi-Perspective Modelling, Rendering and Imaging[J]. *CGF*, 2010, 29(1):227-246
- [74] Swaminathan R, Grossberg M D, Nayar S K. Caustics of Catadioptric Cameras[C]//Proc. ICCV. 2001:2-9
- [75] Geyer C, Danilidis K. Paracatadioptric Camera Calibration[J]. *IEEE Trans. PAMI*, 2002, 24(5):687-695
- [76] Geyer C, Danilidis K. Catadioptric Projective Geometry [J]. *IJCV*, 2001, 45(3):223-243
- [77] Agrawal A, Taguchi Y, Ramalingam S. Analytical Forward Projection for Axial Non-Central Dioptric & Catadioptric Cameras [C]//11th European Conference on Computer Vision. 2010:129-143
- [78] Agrawal A, Taguchi Y, Ramalingam S. Beyond Alhazen's Problem; Analytical Projection Model for Non-Central Catadioptric Cameras with Quadric Mirrors[C]//Proc. CVPR. 2011:2993-3000
- [79] Ding Y, Yu J. Recovering Shape Characteristics on Near-Flat Specular Surfaces[C]//Proc. CVPR. 2008:1-8
- [80] Ding Y, Yu J, Sturm P F. Recovering Specular Surfaces using Curved Line Images[C]//Proc. CVPR. 2009:2326-2333
- [81] Tarini M, Lensch H P A, Goesele M, et al. 3D Acquisition of Mirroring Objects[J]. *Graphical Models*, 2005, 67(4):233-259
- [82] Bonfort T, Sturm P, Gargallo P. General Specular Surface Triangulation[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, 2:872-881
- [83] Liu M, Hartley R, Salzmann M. Mirror Surface Reconstruction from a Single Image[C]//Proc. CVPR. 2013:129-136
- [84] Kang S B. Catadioptric Self-Calibration[C]//Proc. CVPR. 2000:201-207
- [85] Svoboda T, Pajdla T, Hlaváč V. Epipolar Geometry for Panoramic Cameras[C]//5th European Conference on Computer Vision. Springer, Heidelberg. 2010:218-231
- [86] Svoboda T, Pajdla T. Epipolar Geometry for Central Catadioptric Cameras[J]. *IJCV*, 2002, 49(1):23-37
- [87] Agrawal A, Ramalingam S. Single Image Calibration of Multi-Axial Imaging Systems[C]//Proc. CVPR. 2013:1399-1406
- [88] Kutulakos K N, Steger E. A Theory of Refractive and Specular 3D Shape by Light-Path Triangulation[J]. *IJCV*, 2008, 76(1):13-29