

难解问题的固定参数近似算法研究进展

刘运龙¹ 崔梦天²

(湖南师范大学数学与计算机科学学院高性能计算与随机信息处理部共建教育部重点实验室 长沙 410081)¹
(西南民族大学计算机科学与技术学院 成都 610041)²

摘 要 固定参数近似算法采用参数计算方法寻求问题的近似解,是实际中处理难解问题的一种新的有效手段。根据难解问题的参数计算复杂性类别,综述了固定参数可解问题、参数计算复杂性未定问题和 $W[t]$ -难问题($t \geq 1$)固定参数近似算法近年来的研究进展。对于上述每一类问题,分别归纳了当前的主要研究结果,分析了其中的主要算法设计技术并探讨了有待研究的相关问题。

关键词 固定参数近似算法, $W[t]$ -难, 分支限界技术

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.8.002

Advances in Fixed-parameter Tractable Approximation Algorithms for NP-hard Problems

LIU Yun-long¹ CUI Meng-tian²

(Key Laboratory of High Performance Computing and Stochastic Information Processing (Ministry of Education of China),

College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)¹

(School of Computer Science and Technology, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041, China)²

Abstract Fixed-parameter tractable approximation algorithm produces the approximation solution by using the approach of parameterized computation, which becomes one of the practical approaches to deal with NP-hard problems. In this paper, we investigated the fixed-parameter tractable approximation algorithms for various NP-hard problems according to their parameterized computational complexity. More specifically, we gave a survey on the fixed-parameter tractable approximation algorithms for the fixed-parameter tractable problems, the problems with unknown parameterized computational complexity, and the $W[t]$ -hard problems ($t \geq 1$) respectively. For each kind of problems, we summarized typical examples with their results obtained in recent years, analyzed the main techniques employed in the algorithms and discussed some issues to be further studied.

Keywords Fixed-parameter tractable approximation algorithm, $W[t]$ -hard, Branching and searching

1 引言

NP 难解问题是理论计算机科学中的主要研究对象。参数计算和近似算法是处理 NP 难解问题的两种重要手段^[1-3]。固定参数近似算法就是采用参数计算方法寻求难解问题近似解的算法。

参数计算方法通常将一个优化问题(以最小值问题为例)转化为参数化问题“判定问题是否存在一个大小至多为参数 k 的解”。一个参数化问题如果可以在时间 $O(f(k) \cdot n^{O(1)})$ 内求解,其中 $f(k)$ 是一个关于参数 k 的单调非减函数, n 为实例的规模,则该问题称为固定参数可解的(Fixed Parameter Tractable)^[4],习惯上用 FPT 表示该类问题的集合。相应的算法称为固定参数可解算法。在参数计算理论中,主要的复杂性类及其关系为 $FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \dots \subseteq W[P]$ ^[4]。

固定参数近似算法是随着参数计算理论的发展于 2006 年在参数计算国际年会上首次被提出^[5-7]。

设 $I = (x, k)$ 为最小值问题 P 的一个参数化实例,如果存

在一个算法 A 和一个非减函数 $\rho(k)$,使得 A 能够在时间 $O(f(k) \cdot |x|^{O(1)})$ 内要么输出 I 的一个大小至多为 $k \cdot \rho(k)$ 的解,要么确定 I 不存在任何大小至多为 k 的解,其中 $f(k)$ 是一个关于参数 k 的单调非减函数,则问题 P 称为固定参数可近似求解的,并且算法 A 称为问题 P 的一个近似率为 $\rho(k)$ 的固定参数近似算法^[5]。

用算法 A 来求 x 近似解的过程 A^* 可描述为:依次在实例 $(x, 1), (x, 2), \dots$ 上运行算法 A ,直到在某个实例 (x, j) 上第一次输出一个非“No”解 S 时为止,并设 $|S| \leq j \cdot \rho(j)$ 。由于最优解的大小 $OPT \geq j$,解 S 的近似率 $r = |S|/OPT \leq j \cdot \rho(j)/j = \rho(j)$, A^* 的时间复杂度 $O(j \cdot f(j) \cdot |x|^{O(1)}) = O(f(OPT) \cdot |x|^{O(1)})$ 。

对于最大值问题,其定义是类似的。为便于区分,本文称前述固定参数可解算法为固定参数精确算法。

除了上述以解的大小作为参数的标准型固定参数近似算法之外,还有以某种测度或者结构属性作为参数的广义型固定参数近似算法^[8]。本文主要介绍标准型固定参数近似算法。

到稿日期:2016-01-16 返修日期:2016-05-11 本文受国家自然科学基金项目(61572190,61379019),四川省科技计划项目(2015JY002)资助。

刘运龙(1971—),男,博士后,副教授,主要研究方向为参数计算、算法及复杂性理论,E-mail:hnsdlyl@163.com;崔梦天(1972—),女,博士后,教授,主要研究方向为可信软件、优化算法。

固定参数近似算法的主要特征是近似率 $\rho(k)$ 不依赖实例的规模 $|x|$, 时间复杂度 $O(f(k) \cdot |x|^{O(1)})$ 中参数 k 从实例规模 $|x|$ 的指数位置分离出来。另外, 不同于固定参数精确算法, 当实例 (x, k) 为假实例时固定参数近似算法也有可能输出一个大小不超过 $k \cdot \rho(k)$ 的解。

固定参数近似算法可以克服单独用某类计算方法求解时的局限性, 在可计算理论中具有重要意义。例如对于 NP 完全的 Directed Vertex Disjoint Cycle 问题(在给定的有向图 G 上找出顶点互不相交的最多个圈), 一方面, 以顶点互不相交圈的个数作为参数时, 该问题是 $W[1]$ -难的; 另一方面, 传统多项式时间近似算法中解的近似率与实例规模相关。为此, Grohe 和 Grüber 以顶点互不相交圈的个数作为参数, 对该问题提出了一个近似率为 $\rho(k)$ 的固定参数近似算法^[9]。当参数 k 比较小时, 固定参数近似算法是实际有效的。

近年来, 固定参数近似算法受到了人们的关注, 其相关研究取得了较大的进展。本文综述了固定参数可解问题、参数计算复杂性尚未定论问题和 $W[l]$ -难问题($l \geq 1$)固定参数近似算法的研究进展。对于每一类问题, 首先归纳了当前的主要研究结果, 接着着重分析了固定参数近似算法设计中用到的典型技术或方法, 最后探讨了有待研究的相关问题。

2 固定参数可解问题

对于任意一个固定参数可解问题, 其固定参数精确算法可看作近似率为 1 的平凡固定参数近似算法。但平凡的固定参数近似算法, 要么近似率明显优于传统多项式时间近似算法的近似率, 要么时间复杂度明显低于固定参数精确算法的时间复杂度。

2.1 当前主要结果

自 2010 年 Brankovic 和 Fernau 对顶点覆盖(Vertex Cover)问题提出解的近似率为 $(2l+1)/(l+1)$ ($l=1, 2, \dots$) 的固定参数近似算法以来, 一系列问题得到了研究。相应结果如表 1 所列, 其中对于 Vertex Cover 问题, 文献[10]中的算法结果仅列出 $l=1$ 时的情况, $\rho' \approx 0.21$, m, n 和 h 的含义在后续算法设计技术中的 2.2.3 节解释。

在表 1 中, Vertex Cover 和 3-Hitting Set 两个问题分别从不同的角度得到了研究。首先 Brankovic 和 Fernau 针对它们提出了解的近似率为某些常数的固定参数近似算法^[10,11], 接着 Fellows 等人提出了近似率为某个区间内任意值的固定参数近似算法^[12]。

表 1 固定参数可解问题及其固定参数近似算法的结果

问题	近似率	时间复杂度	文献
Vertex Cover	1.5	$O^*(1.09^k)$	[10]
Vertex Cover	α ($1 \leq \alpha \leq 2$)	$O^*(1.273^{(2-\alpha)k})$	[12]
Connected VC	α ($1 \leq \alpha \leq 2$)	$O^*(2^{(2-\alpha)k})$	[12]
3-Hitting Set	2	$O^*(1.29^k)$	[11]
3-Hitting Set	α ($1 \leq \alpha \leq 3$)	$O^*(2.076^{k(3-\alpha)/2})$	[12]
d-Skew-Symmetric Multicut ($d \geq 1$)	$2d(k+1)$	$O(dk^5(m+n+h))$	[13]
Almost 2-SAT	$2(k+1)$	$O(k^5(m+n))$	[13]
Deletion q-Horn BDSs	$6(k+1)$	$O(k^6(n+h))$	[13]
Edge Dominating Set	$(1+\rho)$	$O^*(2.374^{(1-\rho)k})$ ($\rho \leq \rho'$)	[14]
	$(0 \leq \rho \leq 1)$	$O^*(1.466^{(2-\rho)k})$ ($\rho \geq \rho'$)	

2.2 主要算法设计技术

对于固定参数可解问题的固定参数近似算法, 当前用到的主要技术包括有限分支结构扩展、保真变换和近似分割等。

2.2.1 有限分支结构扩展

分支结构扩展就是以规约规则为基础, 以预定近似率为目标, 对有关固定参数精确算法中的有限分支结构进行扩展。在扩展后的各个分支中, 其元素全部放入近似解, 同时以必定属于精确解中的元素的数量作为相应参数的改变量。

Brankovic 和 Fernau 在文献[10]中针对 Vertex Cover 问题提出了固定参数近似算法, 其主要策略就是扩展有关分支结构, 并运用文献[15]中的局部近似率技术来保证解的近似率。

Vertex Cover 问题描述: 对于给定的一个图 $G=(V, E)$, 判定是否存在 $S \subseteq V$, 使得 $|S| \leq k$ 且 S 覆盖 G 上所有的边。

文献[10]中的算法使用了参数计算中经典的规约和分支限界技术。同时, 由于目标解的近似率为 $(2l+1)/(l+1)$, 这些技术在实现过程中都被作了相应的拓展。下面仅阐述 $l=1$ (即近似率为 1.5) 时算法的具体步骤。

首先, 规约规则除了使用固定参数精确算法中的 0 度点、1 度点和 2 度点规约规则之外, 还设置了下述局部近似率为 1.5 的规约规则。

(1) 2 度点近似规约规则: 如果存在一个 2 度点 y , 其邻居 x 和 z 之间没有边相连, 则选择 y 的邻居顶点 x , 连同 x 的一个邻居 $u (u \neq y)$ 放入近似解。接着触发 1 度点规则, 将顶点 z 也放入近似解。显然 x, u, z 中必有 2 个点属于精确解, 其局部近似率为 1.5。

(2) 3 度点近似规约规则: 如果当前图上不存在度至多为 2 的顶点, 则至少存在一个 3 度点(设为 v)。选择 v 的一个邻居 u , 连同 u 的一个邻居 $x (x \neq v)$ 放入近似解。此时结果图上顶点 v 变成了 2 度点, 接着对顶点 v 执行 2 度点精确规约中的折叠规则^[16]。此时共有 3 个顶点放入近似解, 其中必有 2 个点属于精确解, 局部近似率为 1.5。

在依次穷尽地执行前述规约规则之后, 当前的结果图上不存在三角形和任何度小于 4 的顶点。

接着, 在当前图上确定一个有限分支结构, 对其进行扩展并分支求解。

选择一个度最大的顶点 v 和一个与 v 距离为 2 的顶点 u , 并且使得 $|N(u) \cup N(v)|$ 取最大值, 其中 $N(u), N(v)$ 分别表示顶点 u, v 的邻居点集合。当 $N(u) \cup N(v) \neq N(u)$ 时(否则可在多项式时间内求解), 执行下述分支规则。

1) 当 u, v 中至少一个顶点属于某个精确解时, 则将 u, v, x 同时放入近似解, 其中 $x \in N(u) \cap N(v)$;

2) 当 u, v 都不属于任何精确解时, 则将 $N(u) \cup N(v)$ 中的点放入近似解, 同时选择 $f = |N(u) \cup N(v)|$ 条互不相交的边, 并将它们的端点都放入近似解。

该分支规则在分支 1) 中共有 3 个顶点被放入近似解, 其中必有 2 个点属于精确解, 其局部近似率为 1.5; 在分支 2) 中共有 $3|N(u) \cup N(v)|$ 个顶点被放入近似解, 其中必有 $2|N(u) \cup N(v)|$ 个点属于精确解, 其局部近似率也为 1.5。

整个算法在递归过程中依次地执行规约规则与分支规则。相应地, 分支规则的分支向量为 $(2, 22)$, 分支数为 1.09。

类似地, Brankovic 和 Fernau 运用分支结构扩展策略针对 3-Hitting Set 问题提出了一个近似率为 2、时间复杂度为 $O^*(1.29^k)$ 的固定参数近似算法^[11]。

2.2.2 保真变换

2012 年 Fellows 等人在研究固定参数近似算法性能与时

间之间的权衡关系时,提出了固定参数近似算法的一种新的设计思路^[12]。其关键概念就是基于某个保真度(Fidelity Preserving)的保真变换。

给定语言 L 上一个 $U \rightarrow U$ 的变换 t 和一个实数 $\alpha \geq 1$, 对于任意 $(x, k) \in U$, 后续两个条件同时成立: 1) 如果 $(x, k) \in L$, 则 $t(x, k) \in L$; 2) 如果 $t(x, k) \in L$, 则 $(x, \alpha k) \in L$, t 就称为一个保真度为 α 的保真变换^[12]。

以规约步骤为基础的压缩变换是保真变换的一种具体实现方式。

对于一个变换步骤 r , 设任意 $(x, k) \in U$, $(x', k') = r(x, k)$, 且有: 1) $k' = k - a$; 2) 如果 $(x, k) \in L$, 则 $(x', k') \in L$; 3) 对于任意整数 $n \geq 0$, 如果 $(x', k' + n) \in L$, 则 $(x, k + b + n) \in L$, r 就称为 L 上的一个 (a, b) -规约步骤^[12]。

给定语言 L 、一个 (a, b) -规约步骤 r 和一个实数 $\alpha \leq (a + b)/a$, 并且 r 可在多项式时间内完成, 则存在一个可在多项式时间内完成、秩为 $k(b + a - \alpha a)/b$ 的压缩变换^[12]。

Fellows 等人运用保真变换针对 Vertex Cover、 d -Hitting Set 等问题提出了固定参数近似算法。其解的近似率与时间复杂度直接关联, 并且可取得区间 $[1, \beta]$ 内的任意值 (β 为问题的当前最好多项式时间近似率)。现以 Vertex Cover 问题为例阐述算法的主要步骤。

第一步, 对实例作保真度为预定值 α 的压缩变换。

设 (G, k) 为 Vertex Cover 问题的一个实例, 现作下述变换: 在 G 上任意选择一条边 $\{u, v\}$, 设 $G' = G \setminus \{u, v\}$, 并令 $r(G, k) = (G', k - 1)$ 。容易验证, r 为一个可在常量时间内完成的 $(1, 1)$ -规约步骤。因此对于任意 $1 \leq \alpha \leq 2$, 存在一个可在多项式时间内完成的且秩为 $(2 - \alpha)k$ 的压缩变换。

第二步, 在变换后的实例上调用固定参数精确算法。

设压缩变换后的实例为 (G', k') , 接着在此实例上执行当前时间复杂度为 $O^*(1.273^{k'})$ 的固定参数精确算法。如果固定参数精确算法输出 “Yes”, 表明实例 (G, k) 存在一个大小不超过 αk 的解; 如果算法输出 “No”, 表明实例 (G, k) 不存在任何大小至多为 k 的解。由于 $k' = (2 - \alpha)k$, 整个算法的时间复杂度为 $O^*(1.273^{(2 - \alpha)k})$ (忽略实现变换所需的多项式时间)。

类似地, Fellows 等人针对 3-Hitting Set 问题提出了一个近似率为 $\alpha (1 \leq \alpha \leq 3)$ 、时间复杂度为 $2.076^{k(3 - \alpha)/2}$ 的固定参数近似算法, 对 Connected Vertex Cover 问题提出了一个近似率为 $\alpha (1 \leq \alpha \leq 2)$ 、时间复杂度为 $O^*(2^{(2 - \alpha)k})$ 的固定参数近似算法^[12]。

除了上述“先作保真变换, 再执行固定参数精确算法”的思路之外, Escoffier 等人研究 Edge Dominating Set 问题时, 采用了“先作分支, 再构造近似解”的不同策略^[14], 即首先通过相关问题的分支算法求得一个足够大的顶点集合, 然后以该集合为基础构造近似解。

2.2.3 近似分割

近似分割是研究有关图分割问题固定参数近似算法的一种重要技术。它最初由 Gaspers 等人于 2013 年在研究 Deletion q -Horn BDSs (Back Door Sets) 问题时提出^[17]。

Deletion q -Horn BDSs 问题: 给定一个合取范式 F 和一个参数 k , 目标为判定 F 中是否存在 k 个变量使得其被删除后 F 变为 q -Horn 公式。

根据 q -Horn 公式的性质, 求解该问题的基本策略是在 F

的隐含图 $D(F_2)$ 上递归地处理违规三元组。

设 $\{var(l_1), var(l_2), var(l_3)\}$ 为 $D(F_2)$ 上的任意一个违规三元组, 其中 l_i 为 F 中的文字, $var(l_i) (1 \leq i \leq 3)$ 为对应的变量。通过分析, 问题的任意解或者包含某个 $var(l_i) (1 \leq i \leq 3)$, 或者包含某组 $l_i \rightarrow l_j (1 \leq i \leq 3)$ 之间的变量分割集。其中 $l_i \rightarrow l_j$ 之间的分割集是由 F 中的一些文字组成的集合 B , 使得在图 $D(F_2) \setminus B$ 上 l_i 与 $\neg l_j$ 之间不存在路径。变量分割集是由 B 中各文字的对应变量组成的集合 $var(B)$ 。

设 X 为包含某组 $l \rightarrow l'$ 之间变量分割集的一个解。在求 X 时如何选择 $l \rightarrow l'$ 之间的变量分割集是算法需要处理的重点。为满足固定参数近似算法的要求, 变量分割集的大小应能被某个函数 $g(k)$ 限定, 同时当它被放入近似解之后剩余图上解的大小应严格减小。满足这些要求的变量分割集称为近似分割集。

为此, Gaspers 等人首先在 $D(F_2)$ 上利用文献[18]中的 Ford-Fulkerson 算法求出 $l \rightarrow l'$ 之间一个大小不超过 $2k$ 的初始分割集 B 。设 $L = R(l, var(B))$ 为 $D(F_2) \setminus B$ 上从 l 出发可到达文字的集合。然后执行下述循环过程, 动态地调整当前分割集 B : 当 $L \cup \{l'\} \rightarrow L \cup \{\neg l'\}$ 之间存在大小不超过 $2k$ 的分割集时 (其中 l' 为一个属于 B 且从 L 可达的文字), 求出此分割集并替换当前的分割集 B , 接着令 $L = R(L, var(B))$ 。循环过程结束时返回的变量分割集 $S = var(B)$ 满足 $(S \cup var(R(l, S))) \cap X \neq \emptyset$ 。

同时, 利用图 $D(F_2)$ 的特殊性质可以证明下述结论。设 X' 为 $l \rightarrow l'$ 的一个变量分割集, 并且 $(X' \cup var(R(l, X'))) \cap X \neq \emptyset$, 则实例 $F \setminus X'$ 存在一个大小至多为 $|X| - 1$ 的解。

因此, 上述循环过程结束时返回的变量分割集 S 就是一个满足要求的近似分割集。在此基础上, 运用分支限界技术可得到求解 Deletion q -Horn BDSs 问题的一个时间复杂度为 $O^*(6^k)$ 、解的近似率为 $k + 1$ 的固定参数近似算法。

2014 年 Kolay 等人对更为一般化的 d -Skew-Symmetric Multicut 问题进行了研究^[13]。

d -Skew-Symmetric Multicut 问题 ($d \geq 1$) 如下。

输入: 一个 Skew Symmetric 图 $D = ((V, A), \sigma)$, 一个含有若干 d -元组的集类 T 和参数 k ;

目标: 判定 D 中是否存在弧集 $S \subseteq A$, 使得 $S = \sigma(S)$, $|S| \leq 2k$, 并且对于 T 中任意 d -元组 $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$, 都存在一个顶点 $v_i (i \in [1, d])$ 使得 v_i 与 $\sigma(v_i)$ 属于 $D \setminus S$ 的不同强连通部件中。

在研究该问题的算法时, Kolay 等人提出了 (L, k) -Sets 的概念, 其中 $L \subseteq V$ 。 (L, k) -Sets 是一个满足下述性质的组合结构。

(1) (L, k) -Sets 存在一个其大小可被关于参数 k 的某个函数限定的“边界”, 并且两者的并集与实例中每一个解都存在非空交集;

(2) 删除 (L, k) -Sets 的“边界”之后, 剩余图上最优解的大小严格减小。

运用 (L, k) -Sets 和递归技术可得到 d -Skew-Symmetric Multicut 问题的一个时间复杂度为 $O(dk^5(m + n + h))$ 、近似率为 $2d(k + 1)$ 的固定参数近似算法, 其中 $m = |A|$, $n = |V|$, $h = d|T|$ 。进一步地, Almost 2-SAT 可规约为 1-Skew-Symmetric Multicut 问题, 因此存在近似率为 $2(k + 1)$ 的固定参数

近似算法。Deletion q -Horn BDSs 可规约为 3-Skew-Symmetric Multicut 问题,因此存在近似率为 $6(k+1)$ 的固定参数近似算法^[13]。

2.3 有待研究的问题

对于有关固定参数可解问题的固定参数近似算法,下述问题有待深入研究。

(1) 无向图上的反馈集问题(Feedback Vertex Set)存在固定参数精确算法^[19],并且其多项式时间近似算法中解的近似率为 2。分支结构扩展策略是否可应用于该问题以得到一个近似率为 1.5 的固定参数近似算法^[10]? 该问题是否存在一个基于保真变换的固定参数近似算法^[12]?

(2) Vertex Cover 问题是参数计算领域中备受关注的问题之一,如何改进文献^[10]中该问题的固定参数近似算法的时间复杂度?

(3) 近似分割集和 (L, k) -Sets 是研究图切割问题固定参数近似算法的一类很有潜力的工具,但目前仅被应用在极为特殊的图类上。如何将它们应用到其他图类并研究相关问题的算法?

(4) 对于具有多个禁戒导出子图的图修改问题,链式分支策略是其固定参数精确算法设计中的一种有效分支策略^[20,21]。如何将本节中的一些方法与链式分支策略结合起来针对此类图修改问题提出相应的固定参数近似算法?

3 参数计算复杂性未定问题

对于参数计算复杂性至今尚未确定的问题,固定参数近似算法是一种有效的可解途径。

3.1 当前主要结果

参数计算复杂性至今未定但已被提出的固定参数近似算法的问题如表 2 所列¹⁾,其中 $|F|$ 表示合式公式 F 的长度。

表 2 参数计算复杂性未定但存在固定参数近似算法的问题及结果

问题	近似率	时间复杂度	文献
Subtree Prune and Regraft	2	$O^*(4^k)$	[22]
Strong Forest-BDSs Detection	$2^k/k$	FPT 时间	[23]
Strong Nested-BDSs Detection	$2^k/k$	FPT 时间	[24]
Strong $W_{\leq 1}$ -BDSs Detection	$2^k/k$	$O(F ^3)$	[25]

除此之外,Edge Multicut 问题和 Deletion q -Horn BDSs 问题在其参数计算复杂性未定时也被提出固定参数近似算法^[17,26],但后来被证明为固定参数可解的^[27,28]。

3.2 主要算法设计技术

自 2012 年开始,Gaspers 和 Szeider 先后针对基础类为森林(Forest)、嵌套(Nested)公式和树宽有界($W_{\leq 1}$)公式的 Strong BDSs Detection 系列问题提出了固定参数近似算法^[23-25]。由于这些算法在设计方法上有相似之处,本文仅以 Strong Forest-BDSs Detection 问题为例。

首先给出有关 Strong Forest-BDSs Detection 问题的定义。

对于一个合取范式(CNF) F ,其关联图(incidence graph)为一个二分图 $inc(F) = (V, E)$,其中 $V = var(F) \cup cla(F)$, $var(F)$ 表示 F 中所有变量的集合, $cla(F)$ 表示 F 中所有子句的集合, $E = \{xc | x \in var(F), c \in cla(F) \text{ 且 } x \in var(c)\}$ 。

设 $X \subseteq var(F)$, 2^X 表示 X 上所有真值赋值 $\zeta: X \rightarrow \{0, 1\}$

的集合。对于一种真值赋值 $\zeta \in 2^X$, $F(\zeta)$ 定义为对 F 执行下述操作之后的结果公式:删除含有一个文字为被 ζ 赋予 1 的子句,并从剩余子句中删除所有被 ζ 赋予 0 的文字。设 $B \subseteq var(F)$, C 为某类特殊公式,如果对于每一个 $\zeta \in 2^B$, 均有 $F(\zeta) \in C$, 则称 B 为公式 F 的一个 Strong C -BDSs。

Strong Forest-BDSs Detection 问题:输入一个 CNF 公式 F 和一个非负整数 k , 其中 k 为参数,目标是确定 F 中是否存在一个大小至多为 k 的 Strong Forest-BDSs。

接下来介绍文献^[23]中该问题固定参数近似算法的主要思路。

第一步 寻求与解直接相关的有限分支结构。即寻求一个能被某个函数 $g(k)$ 限定的分支结构 S^* , 并且实例 (F, k) 的任意一个解至少包含 S^* 中的某个元素。

首先在图 $inc(F)$ 上执行文献^[29]中的算法,输出 $k' = k^2 2^{k-1} + k + 1$ 个顶点互不相交的圈 $C_1, C_2, \dots, C_{k'}$ (注:当输出为另一类情况,即一个大小至多为 $12k'^2 - 27k' + 15$ 的反馈集时,可运用一元二阶逻辑的相关结论在线性时间内求解)。

对于变量 $x \in var(F)$ 和圈 C , 如果 $x \in C$, 则称 x 可从内部消除 C ; 如果 $x \notin C$ 但 C 含有两个子句 u, v 使得 $x \in u$ 且 $\neg x \in v$, 则称 x 可通过 u 和 v 从外部消除 C 。对于一个可从外部消除的圈 C_i , 仅考虑满足如下要求的 x_i, u_i, v_i : 当 x_i 通过 u_i, v_i 从外部消除 C_i 时, 设沿着 C_i 从 u_i 到 v_i 存在的路径为 P_i , 如果存在变量 x_i' 通过 u_i', v_i' 从外部消除 C_i 且 $u_i', v_i' \in P_i$, 则 $\{u_i, v_i\} = \{u_i', v_i'\}$ 。设 $Cx_i = P_i \cup \{x_i\}$ 。对于一个变量 x_j , 如果在消除圈 Cx_i 时也可通过 u_i, v_i 从外部消除 C_i , 则称 x_j 为圈 C_i 的一个有趣外部消除变量。

接着,算法依次通过 $\binom{k'}{k}$ 种不同方式从 $C_1, C_2, \dots, C_{k'}$ 中选择 k 个假设从内部消除的圈,其余 $k'' = k' - k$ 个圈 $C'' = \{C_1, C_2, \dots, C_{k''}\}$ 为不能从内部消除的圈。对于任意一种确定的选择,设 $var'(F) = var(F) \setminus \bigcup_{i=1}^{k'} var(C_i)$, 执行下述规则中最先适合的某条规则。

(1) 如果 C'' 中存在某个 C_i , 其对应的 Cx_i 不含有外部消除变量,则设置 $S = \{x_i\}$;

(2) 如果 $var'(F)$ 中存在两个变量 y, z , 使得它们同时为 C'' 中至少 $2^{k-1} + 1$ 个圈的有趣外部消除变量,则设置 $S = \{y, z\}$;

(3) 如果 $var'(F)$ 中存在变量 y , 使得 y 为 C'' 中至少 $k2^{k-1} + 1$ 个圈的有趣外部消除变量,则设置 $S = \{y\}$;

(4) 其余情况,设置 $S = \emptyset$ 。

上述每条规则返回一个至多含有 2 个变量的集合 S , 各种不同选择返回集合的并集构成集合 S^* 。由于共有 $\binom{k'}{k}$ 种不同的选择, S^* 的大小为 $O(k^{2k} 2^{k^2 - k})$ 。同时,任何大小至多为 k 的 Strong Forest-BDSs 至少含有 S^* 中的一个变量。

第二步 运用分支限界技术求近似解。

根据解的要求,算法的后续求解过程为一个二重分支搜索过程:对于每一个 $x \in S^*$, 分别递归地为实例 $(F[x=0], k-1)$ 和实例 $(F[x=1], k-1)$ 计算一个 Strong Forest-BDSs。如果某个 $x \in S^*$ 在两种情况下分别返回非空集合 B_0 和 B_1 ,

¹⁾ FPT 时间即形式为 $O(f(k) \cdot n^{O(1)})$ 的时间,原文中未作明确表述。

则 $B_0 \cup B_1 \cup \{x\}$ 为实例 (F, k) 的一个近似解,其大小不超过 2^k 。反之,如果对于每一个 $x \in S^*$,递归调用都至少返回一个“No”,则表明实例不存在任何大小至多为 k 的解。

在此基础上,Gaspers 和 Szeider 接着对 Strong Nested-BDSs Detection 问题和更为一般化的 Strong $W_{\leq}$ -BDSs Detection($t \geq 0$)问题分别提出了固定参数近似算法^[24,25]。

除了上述“先寻求有限分支结构,再进行二重分支”的方法之外,问题转化策略在 Subtree Prune and Regraft 问题和 Edge Multicut 问题的固定参数近似算法中也得到了很好的应用^[22,26]。关于问题转化策略的基本思路将在 4.2.1 节中概述。

3.3 有待研究的问题

对于参数计算复杂性未定问题,下述问题有待进一步研究。

(1)对于 CNF 公式中的 Strong C-BDSs Detection 类问题,由于解的特殊要求,二重分支方法是构造近似解的关键。当前这类问题中,Strong r -CNF RHorn-BDSs Detection 问题(判定一个 r -CNF 公式是否存在一个含有最多 k 个变量的 RHorn-BDSs)的参数计算复杂性至今尚未确定^[23]。二重分支方法能否应用于该问题以得到一个固定参数近似算法?

(2)研究参数计算复杂性未定问题的固定参数近似算法也是寻求其固定参数精确算法的一个前期探索。因此,表 2 中的问题是否存在固定参数精确算法?

4 $W[t]$ -难问题($t \geq 1$)

对于 $W[t]$ -难问题($t \geq 1$),固定参数近似算法是一种新的可解途径,在可计算理论中具有重要意义。

4.1 当前主要结果

自 2007 年 Grohe 和 Grüber 针对 Directed Vertex Disjoint Cycle 问题提出固定参数近似算法以来,一些 $W[1]$ -难问题相继被提出了固定参数近似算法,具体问题及结果如表 3 所列。其中 OPT 表示最优解的大小¹⁾, ϵ 为任意一个大于 0 的常量。

表 3 $W[1]$ -难但存在固定参数近似算法的问题及结果

问题	近似率	时间复杂度	文献
Directed Vertex Disjoint Cycle(DVDC)	$\rho(k)$	多项式时间	[9]
2-ASAT-BFL	2	$O^*(25^k)$	[26]
Directed Steiner Forest	$OPT^{1+\epsilon}$	多项式时间	[30]
Directed Steiner Network	OPT^2	多项式时间	[30]
Minimum Edge Cover	$OPT-1$	多项式时间	[30]
Strongly Connected Steiner Subgraph(SCSS)	2	FPT 时间	[30]

除此之外,若干个 $\#W[1]$ -难的参数化计数问题也被提出了固定参数可解的随机近似算法,例如图匹配、路径等参数化计数问题^[31]。

4.2 主要算法设计技术

对于 $W[1]$ -难问题,通常首先将原问题转化为相关问题,然后利用相关问题的算法间接求解。对于 $\#W[1]$ -难的参数化计数问题,当前的算法主要是基于 Monte-Carlo 自适应覆盖算法。

4.2.1 问题转化

问题转化策略的基本思路如下。设 (x, k) 为问题 P 的一个实例(以最小值问题为例),经某种变换转化为固定参数精确可解问题 Q 的一个对应实例 (y, k') ,并且使得:1)当 (x, k) 为 P 的真实例时, (y, k') 为 Q 的真实例;2)当 (y, k') 为 Q 的真实例时, $(x, k\rho(k))$ 为 P 的真实例。

表 3 中一些问题的固定参数近似算法主要运用了问题转化策略。

对于 2-ASAT-BFL 问题,其转化的目标问题为 Almost 2SAT 问题。根据问题的定义,2-ASAT-BFL 问题实例中一个“子句块”包含了 Almost 2SAT 问题对应实例中的最多 2 个子句。因此,如果 2-ASAT-BFL 问题的实例 (x, k) 为真,则 Almost 2SAT 问题的对应实例 $(y, 2k)$ 为真;如果 Almost 2SAT 问题的实例 $(y, 2k)$ 为真,则 2-ASAT-BFL 问题的实例 $(x, 2k)$ 为真。又因 Almost 2SAT 问题是固定参数可解的,故 2-ASAT-BFL 问题存在一个近似率为 2 的固定参数近似算法^[26]。

对于强连通 Steiner 子图问题(SCSS),其转化的目标问题为有向 Steiner 树问题。由于一个强连通 Steiner 子图对应了边方向正好相反的两棵有向 Steiner 树,因此 SCSS 问题的一个实例 (G, k) 对应应有向 Steiner 树问题的两个实例 (I_1, k) , (I_2, k) ,并且满足:1)如果 (G, k) 为真,则 (I_1, k) , (I_2, k) 同时为真;2)如果 (I_1, k) , (I_2, k) 同时为真,则 $(G, 2k)$ 为真。有向 Steiner 树问题是固定参数可解的,因此 SCSS 问题存在近似率为 2 的固定参数近似算法^[30]。

对于 Directed Vertex Disjoint Cycle 问题,如果图 G 中存在顶点互不相交的至少 k 个圈,则 G 中存在一个含有至少 k 个顶点的反馈集。因此反馈集问题为其求解过程中的关键问题。根据问题转化策略,算法的主要任务是当 G 中最小反馈集的大小至少为 k 时,如何在 G 中寻找顶点互不相交的至少 $k/\rho(k)$ 个圈?

为此,首先运用 Chen 等人的固定参数精确算法求出图 G 的一个最小反馈集 T ^[32],然后运用分劈过程(splitting procedure)递归地在图 G 中寻找顶点互不相交的圈。具体来说,递归过程的初始设置为 (G, T) ,然后在每一阶段或者添加一个圈到当前已得到的圈集中(保持顶点互不相交),并持续下一阶段的递归直到迭代次数达到最大;或者调用链接过程(linkage procedure)寻找一批顶点互不相交的圈,将其添加到当前已得到的圈集中并结束算法。由于该问题的优化形式为最大值问题,因此其固定参数近似算法可以在多项式时间内完成^[9]。

4.2.2 基于 Monte-Carlo 自适应覆盖算法

Monte-Carlo 自适应覆盖算法的基本思想是将被估测集合分解成一些相互之间存在重复元素的子集,然后通过随机检测子集之间的重复程度来估计被测集合中元素的个数^[33]。

以 Monte-Carlo 自适应覆盖算法为基础,图匹配计数、路径计数和 3-D Matching 计数等问题都被提出了固定参数可解的随机近似方案。现以 3-D Matching 参数化计数问题为例说明其算法的主要思想^[34]。

设 (S, k) 为问题的任意一个实例, A 为 S 中所有 k -mat-

¹⁾文献[30]中提出的多项式时间 $f(OPT)$ 近似算法,解的近似率用关于 OPT 的函数表示。

ching构成的集合。通过文献[35]中改进的着色技术将集合 A 分解成 $m=O(6 \cdot 4^{2k}n)$ 个子集(子集之间可能有交集),不妨设 $A=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ 。根据 Monte-Carlo 自适应覆盖算法的要求,相应地设计实现后续 3 个功能的子算法。1)统计 $|A_i|$ ($1 \leq i \leq m$); 2)以 $1/|A_i|$ 的概率在 A_i 中随机抽取一个样本 k -matching; 3)判定样本 k -matching 是否属于随机选择的集合 A_j ($1 \leq j \leq m$)。在此基础上, Monte-Carlo 自适应覆盖算法调用这 3 个子算法,就得到了求解 3-D Matching 参数化计数问题的一个固定参数可解随机近似方案。

4.3 有待研究的问题

对于 $W[t]$ -难问题($t \geq 1$)的固定参数近似算法,目前的研究结果还比较少,很多问题有待进一步研究。

(1)问题转化策略除了应用于 $W[1]$ -难问题的近似算法,也可应用到固定参数可解问题的精确算法^[36]。在运用该策略时,如何寻求目标问题值得深入研究。

(2)对于 $W[t]$ -难问题($t \geq 1$),不能直接运用固定参数精确算法设计中的一些经典技术。除了问题转化策略,如何寻求其他新的技术是研究该类问题固定参数近似算法的关键。

(3)对于 $W[2]$ -难问题,至今还没有一个具体问题被提出固定参数近似算法。同时,下述 $W[2]$ -难问题是否存在固定参数近似算法近年来引起了人们的关注^[17,37,38]: Strong/Weak q -Horn-BDS Detection 问题(判定一个 CNF 公式是否存在一个大小至多为 k 的 Strong/Weak q -Horn-BDS), Hitting Set 问题(判定一个集类是否存在一个大小至多为 k 的碰撞集)和 Dominating Set 问题(判定一个图是否存在一个大小至多为 k 的支配集)。

结束语 本文以难解问题的参数计算复杂性类型为线索,综述了固定参数近似算法近年来的研究进展。对于每一类问题,归纳了当前的主要研究结果,分析了其固定参数近似算法设计中用到的典型技术或方法,探讨了有待进一步研究的相关问题。

参考文献

- [1] Hochbaum D S. Approximation algorithms for NP-hard problems [M]. PWS Publishing Company, Boston, MA, 1997
- [2] Cygan M, Kowalik L, Pilipczuk M, et al. Exponential-time approximation of hard problems [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/0810.4934v1>
- [3] Escoffier B, Paschos V T, Tourniaire E. Moderately exponential time and fixed parameter approximation algorithms [J]. Optimization, 2013, 62(8): 1019-1036
- [4] Downey R G, Fellows M R. Parameterized Complexity [M]. Springer, New York, 1999
- [5] Downey R G, Fellows M R, McCartin C. Parameterized approximation algorithms [C]//Proceedings of the 2nd International Workshop on Parameterized and Exact Computation (IWPEC'06). 2006: 121-129
- [6] Chen Y, Grohe M, Grüber M. On parameterized approximability [C]//Proceedings of the 2nd International Workshop on Parameterized and Exact Computation (IWPEC'06). 2006: 109-120
- [7] Cai L, Huang X. Fixed-parameter approximation: conceptual framework and approximability results [C]//Proceedings of the 2nd International Workshop on Parameterized and Exact Computation (IWPEC'06). 2006: 96-108
- [8] Marx D. Parameterized complexity and approximation algorithms [J]. The Computer Journal, 2008, 51(1): 60-78
- [9] Grohe M, Grüber M. Parameterized approximability of the disjoint cycle problem [C]//Proceedings of the 34th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'07, Track A). 2007: 363-374
- [10] Brankovic L, Fernau H. Combining two worlds: parameterised approximation for vertex cover [C]//Proceedings of the 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'10). 2010: 390-402
- [11] Brankovic L, Fernau H. Parameterized approximation algorithms for hitting set [C]//Proceedings of the 9th International Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA'11). 2011: 63-76
- [12] Fellows M R, Kulik A, Rosamond F, et al. Parameterized approximation via fidelity preserving transformations [C]//Proceedings of the 39th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'12). 2012: 351-362
- [13] Kolay S, Misra P, Ramanujan M S, et al. Parameterized approximations via d -skew-symmetric multicut [C]//Proceedings of the 39th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS'14). 2014: 457-468
- [14] Escoffier B, Monnot J, Paschos V T, et al. New results on polynomial inapproximability and fixed parameter approximability of edge dominating set [C]//Proceedings of the 7th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC'12). 2012: 25-36
- [15] Bar-Yehuda R. One for the price of two: a unified approach for approximating covering problems [J]. Algorithmica, 2000, 27: 131-144
- [16] Chen J, Kanj I A, Jia W. Vertex cover: further observations and further improvements [J]. Journal Algorithms, 2001, 41: 280-301
- [17] Gaspers S, Ordyniak S, Ramanujan M S, et al. Backdoors to q -Horn [C]//Proceedings of the 30th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'13). 2013: 67-79
- [18] Ford Jr L R, Fulkerson D R. Maximal flow through a network [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1956, 8: 399-404
- [19] Kociumaka T, Pilipczuk M. Faster deterministic feedback vertex set [J]. Information Processing Letters, 2014, 114(10): 556-560
- [20] Liu Yun-long, Wang Jian-xin, Xu Chao, et al. An efficient branching strategy based on structural relationship among multiple forbidden induced subgraphs [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2015, 29(1): 257-275
- [21] Liu Yun-long, Wang Jian-xin, You Jie, et al. Edge deletion problems: branching facilitated by modular decomposition [J]. Theoretical Computer Science, 2015, 573: 63-70
- [22] Downey R G, Fellows M R. Fundamentals of Parameterized Complexity [M]. Springer, 2013
- [23] Gaspers S, Szeider S. Backdoors to acyclic SAT [C]//Proceedings of the 39th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP'12). 2012: 363-374
- [24] Gaspers S, Szeider S. Strong backdoors to nested satisfiability [C]//Proceedings of the 15th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT'12). 2012: 72-85

(下转第 54 页)

结束语 本文通过选择 MCS 模式和 Raptor 码率的最佳组合,达到视频多播移动网络的跨层优化目的。在移动站相对速度为 1km/h、资源块 $K=1820$ 的情况下,Raptor 优化系统比其他纠错码在下行链路的吞吐量至少增加 28%;Raptor 码至少节约信道资源 18%;Raptor 优化系统在 SNR 小于 13dB 时,PSNR 的值比其他两种优化系统的要高,最大性能增益可达 4dB 以上,但随着 SNR 的增加,PSNR 的值趋于一致。本文只是在仿真环境下模拟,在实际的移动带宽系统上实现时,实验结果可能会随着参数值的不同有所变动。下一步工作将研究 Raptor 码优化算法对不同天线数的 MIMO 系统产生的影响。

参考文献

- [1] Multimedia broadcast/multicast services (mbms); protocols and codecs[S]. 3GPP TS 26. 346, technical specification group services and system aspects, 2007
- [2] Khalid F, Speidel J. Advances in MIMO Techniques for Mobile Communications—A Survey[J]. Network and System Sciences, 2010, 3(4): 213-252
- [3] Paper W. Global Mobile Data Traffic Forecast Update[R]. Cisco Visual Networking Index, 2013
- [4] Wang Peng, Wang Xin-mei. Fast encoding research on DPC code [J]. Journal of Electronic Science and Technology University, 2004, 32(9): 134-139(in Chinese)
王鹏,王新梅. DPC 码的快速编码研究[J]. 电子科技大学学报, 2004, 32(9): 134-139
- [5] Wu Ye-qing, Hu Fei, Zhu Ying-ying, et al. Cross-Layer Forward Error Correction Scheme Using Raptor and RCPC Codes for Prioritized Video Transmission Over Wireless Channels[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2014, 24(6): 1047-1060
- [6] Air Interface for Fixed and Mobile Broadband Wireless Access Systems[S]. IEEE Standard for Local and metropolitan area networks. IEEE Std, 2013
- [7] Esmailpour A, Nasser N, Dynamic. QoS-Based Bandwidth Allocation Framework for Broadband Wireless Networks[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2011, 6(7): 2690-2700
- [8] Sgardoni V, Bull D, Nix A. ARQ-aware scheduling and link adaptation for video transmission over mobile broadband networks [J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2013, 14(2): 401-415
- [9] Martikainen H, Sayenko A, Alanen O, et al. Optimal MAC PDU size in IEEE802. 16[C]// 4th International Telecommunication Networking Workshop on QoS in Multiservice IP Networks(IT-NEWS 2008). 2008: 66-71
- [10] Mobile WiMAX—part I: a technical overview and performance evaluation[S]. 2006
- [11] Spatial channel model for Multiple Input Multiple Output (MIMO) simulations (Release 6) [S]. 3GPP TR 25. 996 V6. 1. 0. 2009
- [12] Halls D, Nix A, Beach M. System level evaluation of UL and DL interference in OFDMA mobile broadband networks[C]// IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). 2014: 1271-1276
- [13] Luby M, Gasiba T, Stockhammer T, et al. Reliable multimedia download delivery in cellular broadcast networks [J]. IEEE Trans, Broadcast, 2007, 53(1): 235-246
- [14] Munaretto D, Jurca D, Widmer J. A fast rate-adaptation algorithm for robust wireless scalable streaming applications[C]// IEEE International Conference on Wireless and Mobile Computing, Networking and Communications (WIMOB 2009). 2009: 246-251
- [15] Thomas N, Frossard P. Collaborative videostreaming with Raptor network coding [C]// IEEE International Conference on Multimedia and Expo. 2008: 497-500
- (上接第 12 页)
- [25] Gaspers S, Szeider S. Strong backdoors to bounded treewidth SAT [C]// Proceedings of the 54th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'13). 2013: 489-498
- [26] Marx D, Razgon I. Constant ratio fixed-parameter approximation of the edge multicut problem [J]. Information Processing Letters, 2009, 109 (20): 1161-1166
- [27] Bousquet N, Daligault J, Thomassé S. Multicut is FPT [C]// Proceedings of the 43th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'11). 2011: 459-468
- [28] Ramanujan M S, Saurabh S. Linear time parameterized algorithms via skew-symmetric multicut [C]// Proceedings of the 25th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'14). 2014: 1739-1748
- [29] Bodlaender H L. On disjoint cycles [J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 1994, 5(1): 59-68
- [30] Chitnis R, Hajiaghayi M T, Kortsarz G. Fixed-parameter and approximation algorithms; a new look [C]// Proceedings of the 8th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC'13). 2013: 110-122
- [31] Arvind V, Raman V. Approximation algorithms for some parameterized counting problems [C]// Proceedings of the 13th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'02). 2002: 453-464
- [32] Chen Jian-er, Liu Yang, Lu Song-jian, et al. A fixed-parameter algorithm for the directed feedback vertex set problem [C]// Proceedings of the 40th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'08). 2008: 177-186
- [33] Karp R M, Luby M, Madras N. Monte-Carlo approximation algorithms for enumeration problems [J]. Journal of Algorithms, 1989, 10: 429-448
- [34] Liu Yun-long, Chen Jian-er, Wang Jian-xin. On counting 3-D matchings of size k [J]. Algorithmica, 2009, 54: 530-543
- [35] Chen Jian-er, Lu Songjian, Sze S H, et al. Improved algorithms for path, matching, and packing problems [C]// Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'07). 2007: 298-307
- [36] Liu Yun-long, Wang Jian-xin, Chen Jian-er. Improved parameterized algorithm for the Multicut problem [J]. Journal of Software, 2010, 21(7): 1515-1523(in Chinese)
刘运龙,王建新,陈建二. Multicut 问题参数算法的改进[J]. 软件学报, 2010, 21(7): 1515-1523
- [37] Marx D. Can you beat treewidth? [J]. Theory of Computing, 2010, 6: 85-112
- [38] Fellows M R, Guo J, Marx D, et al. Data reduction and problem kernels (Dagstuhl Seminar 12241) [R]. Dagstuhl Reports, 2012, 2(6): 26-50