第43卷 第5期
2016年5月

计 算 机 科 学
Computer Science

Vol. 43 No. 5
May 2016

与数据挖掘相关的整数矩阵的左右可逆性研究

陆成刚

（浙江工业大学理学院　杭州 310023）

摘　要　考虑了数据挖掘中基于整数矩阵的离散数据观测模型，并提出了观测矩阵的整数分解问题。该问题实质上是求解经典的线性丢番图系统，只是要求基矩阵是被分解矩阵的一个部分。提出了一个新的求解方法——左右逆法，并研究了与此相关的一类满秩非方整数矩阵的整数左右可逆性问题，提出了一些左右可逆的充分条件以及求整数左右逆的方法。该方法可以求出某些最小二乘法无法求出的整数逆，并与最小二乘法结合构成了一个整数分解的完整解决方案。

关键词　整数矩阵，整数左右可逆性，Moore-Penrose 逆，最小二乘法

中图法分类号　O151.21　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2016.5.046

Research on Left-Right Invertibility for Integer Matrix Related with Data Mining

LU Cheng-gang

(School of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract　We considered the discrete data observation model based on integer matrix like boolean observation matrix, or non-negative observation matrix in history. We proposed the problem on the integer decomposition for any integer observation matrix. The problem is equivalent to solving one classical Diophantine linear system in nature, but the only condition is that the base matrix is originated from the decomposed matrix part. Then we provided a new method based on left-right inverse to find the integer inverse of the base matrix. Because the base matrix choice is an option designing in engineering, it is convenient to consider the base matrixes only of possessing integer inverse. Additionally, it is known that any non-full rank matrix can be decomposed into the product of two full rank matrixes. So we explored some sufficient conditions on the existence of integer left-right inverse only for full-rank rectangular matrix, and also designed the integer inverse algorithm in computation. Our proposed integer inverse constructor can find integer inverse under some conditions while the constructor based on the least squares method fails. Lastly our method merged with the least squares method will become a complete solution to integer decomposition of integer observation matrix.

Keywords　Integer matrix, Integer left-right invertibility, Moore-Penrose inverse, Least squares method

1　引言

近年来，在数据挖掘的热点理论领域里有一类布尔矩阵分解方法的研究受到了较多的重视，其核心的工作主要是 P. Miettinen 的布尔离散基问题[1] 以及 H. Lu 的扩展布尔矩阵分解研究[2,3]。布尔矩阵分解与历史上更知名的 NMF 非负矩阵分解工作[4-6]相关，布尔矩阵被认为在某些离散数据的表述上更切合实际的背景。本文从另外一个角度考虑一般的整数矩阵的分解问题，与布尔矩阵一样，对于实际场景的离散数值描述，有时候整数形式更加合适。

整数分解的一个典型例子就是计算机位图格式里的调色板应用。调色板是一个颜色表，其定义了图像中用到的颜色信息，如下面的矩阵分解式：

$$\begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \\ g_1 & \cdots & g_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}_{3\times n} = \begin{pmatrix} r_{i_1} & \cdots & r_{i_K} \\ g_{i_1} & \cdots & g_{i_K} \\ b_{i_1} & \cdots & b_{i_K} \end{pmatrix}_{3\times K} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{K\times n} \tag{1}$$

等式(1)左端的矩阵是位图 n 个像素的颜色值分布。右端第一个矩阵是调色板包含的 K 个颜色值，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_K$ 互不相同且 $i_1, i_2, \cdots, i_K \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$K$ 远小于 n；第二个矩阵就是所谓的表示矩阵，提示了某个位图像素所对应于调色板的颜色索引值，根据位图数据存储的原理，自然地，此处的表示矩阵均是每列含一个 1、其余元素皆为 0 的单位向量。基于调色板颜色索引的位图表示是非真彩数字图像的无损压缩方法之一。

一般地，本文考虑如下的矩阵分解问题：在某个离散数据观测的应用场合涉及到一个整数值的观测向量集合，需要求解在某个子集下的表示问题，例如

$$A = A_b \cdot X \tag{2}$$

或

$$B = Y \cdot B_b \tag{3}$$

式(2)中 A 是观测矩阵，列向量是一个观测值向量，A_b 是观测向量子集形成的基矩阵，X 为整数元素的表示矩阵；式(3)中 B 是观测矩阵，行向量是观测值向量，B_b 是观测向量子

到稿日期：2015-06-02　返修日期：2015-08-21　本文受浙江省重点科技专项重大工业项目(2013C01045)资助。

陆成刚(1973－)，男，博士，高级工程师，主要研究方向为信号处理、应用数学，E-mail：luedge@163.com。

集形成的基矩阵，Y 为整数元素的表示矩阵。基矩阵 A_b、B_b 往往表示有特定的含义，如上面的调色板的例子，它揭示了观测数据集合的重要特征。以上涉及到的所有矩阵不一定是方阵。从线性代数的角度看，问题(2)、(3)的表示形式实质上是等价的，在文献[1-3]中分别是任选一进行讨论的。这类问题的研究还和布尔矩阵分解、NMF 矩阵分解的意义相仿，具有精简化数据表示形式的作用。

关于问题(2)、(3)在已知基矩阵的情形下整数表示矩阵的求解，其实质上是线性丢番图系统的问题[7]，通过将基矩阵(A_b 或 B_b)Smith 正则对角化才能判断其有无整数解。本文着重考虑基矩阵的整数可逆性问题。虽然基矩阵不存在整数逆时也可能有整数分解式存在，例如 $\begin{pmatrix}2&3&5\\2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 且其基矩阵之逆 $\begin{pmatrix}2&3\\2&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&\frac{3}{2}\\1&-1\end{bmatrix}$ 不是整数矩阵，但具备整数逆的基矩阵却是获得整数分解式的充分条件；更因为在观测矩阵中选取具备整数逆的基矩阵也是工程上的可行因素1)，所以判断基矩阵是否整数可逆以及设计具体的求逆算法显得更为实用。

一般整数方阵的整数可逆性由其行列式值决定，当且仅当其值为+/−1 时有整数逆[8]。由于基矩阵一般是非方矩阵(可能是非满秩的，也可能是行或列满秩的)，并且非满秩矩阵经满秩分解可化归为满秩矩阵的乘积，因此这里重点讨论满秩非方矩阵的整数左右可逆性，研究它的判别条件和计算。最后结合最小二乘法提出整数分解的有效解决方案。

2 整数分解的左右逆法

2.1 整数分解的左右逆法的可替性

Penrose 于 1955 年提出了一般矩阵的广义逆方程[9]：

$$\begin{aligned}&AXA=A &&\text{(i)}\\&XAX=X &&\text{(ii)}\\&(AX)^{\mathrm T}=AX &&\text{(iii)}\\&(XA)^{\mathrm T}=XA &&\text{(iv)}\end{aligned}\tag{4}$$

满足上述条件组合的各种形式的 X 称为 A 的 Moore-Penrose 广义逆，共有 15 种，满足所有 4 个条件方程的广义逆称为 Moore-Penrose-{1,2,3,4}逆，记作 A^+。当 A 是行满秩非方阵时，满足 $AX=E$(E 为单位矩阵)之 X 称右逆，右逆满足 Penrose 方程(4)(i,ii,iii)；同理当 A 是列满秩非方阵时，满足 $XA=E$ 之 X 称左逆，左逆满足 Penrose 方程(4)的(i,ii,iv)。A 的右逆或左逆可以记作 A^{-r} 或 A^{-l}。

如果去掉问题(2)、(3)矩阵的整数限制，则其本质上是一个线性系统的求解问题。一般线性系统的求解问题基于 Moore-Penrose 广义逆可以得到较彻底的解决，它可以看作是最小二乘法的推广[10]。以(2)为例，可以证明在问题(2)有解的情形下，左右逆法也可以求得问题(2)的表示矩阵，并且当 A_b 的列向量组为 A 的列向量组的极大无关组时，左右逆法与最小二乘法的求解结果是一致的。此外，由于问题(2)、(3)局限在整数范围内求解，Moore-Penrose 广义逆方法(即最小二乘法)并不优于左右逆法，在 Moore-Penrose 广义逆为非整数矩阵时却可以存在整数左右逆，文末给出了证明和实验比较。

这里先说明当问题(2)有解时总能通过左右逆法计算表示矩阵。首先假设(2)中基矩阵 A_b 列满秩，则取其左逆 A_b^{-l}，使得 $A_b^{-l}A_b=E$。令 $X=A_b^{-l}A$，考虑到 $A-A_bX=A-A_bA_b^{-l}A=(E-A_bA_b^{-l})A$。由于 $(E-A_bA_b^{-l})A_b=A_b-A_b=0$，可知 A_b 的列向量属于 $E-A_bA_b^{-l}$ 的零核，因为(2)有解，所以 A 的列向量可以视作由 A_b 的列向量线性组合得到。因而 A 的列向量仍属于 $E-A_bA_b^{-l}$ 的零核，从而 $A-A_bX=(E-A_bA_b^{-l})A=0$。其次若 A_b 行满秩，则取其右逆 A_b^{-r}，使得 $A_bA_b^{-r}=E$。令 $X=A_b^{-r}A$，则 $A-A_bX=A-A_bA_b^{-r}A=A-EA=A-A=0$。最后当 A_b 非满秩时，总存在满秩分解 $A_b=A_b^{col}\cdot A_b^{row}$，其中 A_b^{col} 为列满秩，A_b^{row} 为行满秩。对式(2)两边同时左乘 A_b^{col} 的左逆，就可以将问题(2)化为基矩阵为行满秩的情形。

当问题(2)的 A_b 列向量组为 A 列向量组的极大无关组时，通过左右逆法求得的表示矩阵与最小二乘求得的结果 $X=(A_b^{\mathrm T}A_b)^{-1}A_b^{\mathrm T}A$ 一致。这是由于 A_b 列向量作为 A 列空间的一组基，使得表示系数唯一。问题(2)中 A_b 行满秩时，表示矩阵往往不唯一，通过最小二乘法(即 Moore-Penrose 广义逆方法)可能无法获得整数逆，进而无法获得整数表示矩阵，但是却可能存在整数左右逆，进而获得整数表示矩阵。

当问题(2)在左右逆方法下无整数解时，通过 Moore-Penrose 广义逆可以获得在 $\|A-A_b\cdot X\|$ 矩阵范数最小条件下的非整数解 X[10]。左右逆法未必能获得范数意义下最优(非整数)表示矩阵，此时整数最优近似可以取上述 X 的每个元素取整的矩阵。综上所述，左右逆法和最小二乘法结合可以构成有效的整数分解方法：可以先试用左右逆法求取整数表示矩阵；若不成功，再使用最小二乘法求取有理数表示矩阵，然后对每一个元素取整，获得近似的整数表示矩阵。

2.2 整数左右逆的存在性

在讨论定理 1 之前，首先定义整数初等变换。整数初等行(列)变换分别为将矩阵的任意两行(列)交换顺序，将矩阵的某一行(列)乘以±1，以及将某一行(列)的任意整数倍加到另外一行(列)。整数初等变换对应的初等矩阵称为整数初等矩阵，整数初等矩阵是行列式为±1 的方阵。下面定理 1 给出了右逆或左逆的解析形式，该结果融合了行列式和矩阵块分解形式，不同于文献[11]中关于广义逆的行列式表示式。

定理 1 A 为 $m\times n$ 行满秩非方矩阵，$m<n$，则其右逆 A^{-r} 可取

$$A^{-r}=P\begin{pmatrix}A_1^{-1}-A_1^{-1}A_2X_2\\X_2\end{pmatrix}\tag{5}$$

P 是整数初等矩阵，仅限于交换任意两行(列)的顺序，且 P 满足 $AP=(A_1\quad A_2)$，A_1 是 $m\times m$ 可逆方阵，A_2 为 $m\times(n-m)$ 矩阵，X_2 为 $(n-m)\times m$ 自由块，可见右逆具有无穷多种取值。当自由块 X_2 受如下条件(6)约束时，右逆 A^{-r} 变成唯一的 Moore-Penrose-{1,2,3,4}逆 A^+。

$$\begin{aligned}&(A_1^{-1}A_2X_2A_1)^{\mathrm T}=A_1^{-1}A_2X_2A_1\\&(X_2A_1)^{\mathrm T}=A_1^{-1}A_2-A_1^{-1}A_2X_2A_2\\&(X_2A_2)^{\mathrm T}=X_2A_2\end{aligned}\tag{6}$$

1) 关于整数可逆的基矩阵选取的研究成果将另文阐述。

列满秩非方阵可以获得相仿的结果,此处不予赘述。

证明:代入验证可得 $A\cdot A^{-r}=(A_1\quad A_2)P^{-1}P\begin{pmatrix}A_1^{-1}-A_1^{-1}A_2X_2\\X_2\end{pmatrix}=(A_1\quad A_2)\begin{pmatrix}A_1^{-1}-A_1^{-1}A_2X_2\\X_2\end{pmatrix}=E$。根据 $A\cdot A^{-r}=E$ 易验证满足 Penrose 方程(4)的(i,ii,iii),若限制自由块 X_2,使之满足条件式(6),则由于 $P=P^{\mathrm{T}}=P^{-1}$,易验证 A^{-r} 满足 Penrose 方程(4)的(iv),从而得到其为 A 的 Moore-Penrose-{1,2,3,4}逆。证毕。

推论 1 当行(列)满秩非方整数矩阵含有值为±1 的满阶子式时,必有整数右(左)逆。满阶表示子式的阶数与秩数相同。

由定理 1 左右逆的解析形式知道推论 1 是显然的。引言所述整数方阵含有整数逆的充分必要条件是其行列式为±1,可见推论 1 是该结论的充分性向非方阵情形的整数可逆的推广。推论 1 只是满秩非方阵整数(左右)可逆的一个充分而非必要条件,例如

$$\begin{pmatrix}4&15&64&43\\2&9&37&24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5&9\\93&-156\\-47&79\\38&-64\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\tag{7}$$

式(7)左端的第一个矩阵没有 2 阶值为±1 的子式,但它具有右逆。

后文将基于对 Gregory 问题[12]的讨论,研究一般满秩整数非方阵的其他(左右)整可逆充分条件。

2.3 Gregory 问题

Gregory 问题是研究含对角块的满秩非方阵的(左右)整可逆性问题,例如考虑行满秩非方阵如 $M=(\Lambda\quad A)$,其中 Λ 为 $m\times m$ 的主对角元均不小于 2 的整数对角阵,A 为 $m\times n$ 整数矩阵,Gregory 猜想在 M 中每行元素相素(即它们的最大公因子为 1)条件下有整数右逆。这个猜想不成立。反例如下:

$$\begin{pmatrix}2&0&1&3\\0&2&7&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\tag{8}$$

方程(8)没有整数解,因为如果假设有解,将 2 个方程相加得到:

$$2x+2y+8z+12w=1\tag{9}$$

等式(9)左端是偶数,右端是奇数,这是不可能的,所以式(8)一定无整数解。修正 Gregory 问题的相素性表述如下,若 M 每行元素相素并且在任意有限次整数初等行变换下保持每行的相素性不变,则猜测 M 有整数右逆。该相素性保持不变实际上是要求保证类似的方程(8)在同解变换时不会生成矛盾方程。后文将对 Gregory 问题作出其它相异的修正并给出证明,此处先对 Gregory 问题的结论作修正,即在 M 中每行元素间相素的条件下可以证明 M 存在整数右因子使得乘积为一个整数对角阵,即定理 2。

定理 2 当行满秩矩阵

$$M=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&\lambda_2&\cdots&0&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_m&a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

对任意固定 i,λ_i 与 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 为相素整数,$i=1,2,\cdots,m$;则一定存在 $(m+n)\times m$ 整数矩阵 $\widetilde{M}$,使得

$$M\cdot\widetilde{M}=\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&&&\\&\frac{1}{\lambda_2}&&\\&&\cdots&\\&&&\frac{1}{\lambda_m}\end{pmatrix}\tag{10}$$

证明:考虑以 $\widetilde{M}$ 的第 i 列为未知量的如下线性方程组:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1x_{1i}+a_{11}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{1n}x_{(m+n)i}=0 &(1)\\
&\cdots\\
&\lambda_{i-1}x_{(i-1)i}+a_{(i-1)1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{(i-1)n}x_{(m+n)i}=0 &(\mathrm{i}-1)\\
&\lambda_ix_{ii}+a_{i1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{in}x_{(m+n)i}=\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j &(\mathrm{i})\\
&\lambda_{i+1}x_{(i+1)i}+a_{(i+1)1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{(i+1)n}x_{(m+n)i}=0 &(\mathrm{i}+1)\\
&\cdots\\
&\lambda_mx_{mi}+a_{m1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{mn}x_{(m+n)i}=0 &(\mathrm{m})
\end{aligned}\tag{11}$$

由于 $\lambda_i,a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 相素,因此存在整数 $\varepsilon_i,\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_{m+n}$,使得

$$\lambda_i\varepsilon_i+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\varepsilon_{m+k}=1\tag{12}$$

对式(12)两边同时乘以 $\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j$,得到

$$\lambda_i\Big(\varepsilon_i\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\Big(\varepsilon_{m+k}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)=\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\tag{13}$$

令

$$x_{ii}=\varepsilon_i\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\tag{14}$$

和

$$x_{(m+k)i}=\varepsilon_{m+k}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j,\ k=1,2,\cdots,n\tag{15}$$

将式(15)代入式(11)中除式(i)之外的所有式子,可得到

$$x_{li}=-\frac{1}{\lambda_l}\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\Big(\varepsilon_{m+k}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)=-\frac{1}{\lambda_i\lambda_l}\Big(\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\varepsilon_{m+k}\tag{16}$$

其中,$l=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m$。

至此,已经构造出方程(11)的整数解,即式(14)一式(16)。证毕。

2.4 整数左右逆存在的另外一个充分条件

首先给出 Gregory 问题的一个修正,并作出证明;其次,给出一般满秩整数非方阵整可逆的另一个充分条件。

定理 3 当行满秩矩阵

$$M=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&\lambda_2&\cdots&0&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_m&a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

对任意固定 i,$\lambda_i,a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 为相素整数,且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两互素,$i=1,2,\cdots,m$;则 M 一定存在整数右逆。对于列满秩情形,也有相仿的结论,此处不予赘述。

证明:考虑以右逆 M^{-r} 的第 i 列为未知量的如下线性方程组:

$$\lambda_1 x_{1i}+a_{11}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{1n}x_{(m+n)i}=0 \tag{1}$$

$$\cdots$$

$$\lambda_{i-1}x_{(i-1)i}+a_{(i-1)1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{(i-1)n}x_{(m+n)i}=0 \tag{i-1}$$

$$\lambda_i x_{ii}+a_{i1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{in}x_{(m+n)i}=1 \tag{i}$$

$$\lambda_{i+1}x_{(i+1)i}+a_{(i+1)1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{(i+1)n}x_{(m+n)i}=0 \tag{i+1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda_m x_{mi}+a_{m1}x_{(m+1)i}+\cdots+a_{mn}x_{(m+n)i}=0 \tag{m}$$

(17)

记 p_i 为 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 的最大公因子，因此存在整数 $\varepsilon_{m+1},\cdots,\varepsilon_{m+n}$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\varepsilon_{m+k}=p_i \tag{18}$$

令

$$x_{(m+k)i}=t\cdot\varepsilon_{m+k}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j,\ k=1,2,\cdots,n \tag{19}$$

其中，t 为待定整数变量。将式(19)代入式(17)中除式(i)外的其余式子，得到

$$\begin{aligned}x_{li}&=-\frac{1}{\lambda_l}\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\Big(t\varepsilon_{m+k}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)\\&=-t\frac{1}{\lambda_i\lambda_l}\Big(\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)\sum_{k=1}^{n}a_{lk}\varepsilon_{m+k}\end{aligned} \tag{20}$$

其中，$l=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m$。再将式(19)代入式(17)中的(i)，得到

$$\lambda_i x_{ii}+a_{i1}t\cdot\varepsilon_{m+1}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j+\cdots+a_{in}t\cdot\varepsilon_{m+n}\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j=1$$

即

$$\lambda_i x_{ii}+(a_{i1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+a_{in}\varepsilon_{m+n})\Big(\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)t=1 \tag{21}$$

将式(18)代入式(21)，得到

$$\lambda_i x_{ii}+p_i\Big(\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)t=1 \tag{22}$$

由于 $\lambda_i,a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 相素，因此 λ_i,p_i 互素；又由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两互素，因此 $\lambda_i,\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j$ 互素。所以 $\lambda_i,p_i(\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j)$ 互素，从而存在整数 ξ,η，使得

$$\lambda_i\xi+p_i\Big(\frac{1}{\lambda_i}\prod_{j=1}^{m}\lambda_j\Big)\eta=1 \tag{23}$$

可令

$$x_{ii}=\xi,\ t=\eta \tag{24}$$

从而构造出方程(17)的整数解，即式(19)、式(20)和式(24)。证毕。

定理3中"$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两互素"是整数右逆存在的充分但非必要条件，例如

$$\begin{pmatrix}2&0&2&3\\0&2&7&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6\\3&20\\3&-3\\-3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{25}$$

式(25)左端第一个矩阵对角元间不互素，但仍有整数右逆。

引理1 对任意行满秩非方阵作整数初等行变换、列变换，总可使得其变形为$(\Lambda\ \ A)$形式。其中 Λ 是整数对角方阵，A 是整数非方阵，即对行满秩整数非方阵 M 存在对应阶数的整数初等方阵 P、Q，使得

$$PMQ=(\Lambda\ \ A) \tag{26}$$

对于列满秩非方阵也有类似的结论，不作赘述。

证明略。只简述一下理由，每行(列)的元素都是它们的最大公因子的倍数，而最大公因子可由辗转相除法得到。对一行(列)的元素作辗转相除相当于对该矩阵作整数初等列(行)变换，经有限次变换总可以变成除最大公因子外其余元素皆为0的状态。

定理4 对行满秩非方整数矩阵 M，存在整数初等矩阵 P、Q 使得 $PMQ=(\Lambda\ \ A)$；当$(\Lambda\ \ A)$每一行元素间相素，且 Λ 的对角元素两两互素时，则 M 存在整数右逆：

$$M^{-r}=Q(\Lambda\ \ A)^{-r}P \tag{27}$$

对于列满秩矩阵仍有相仿的结论，此处不再赘述。

证明：前半部分由引理1自然可得。由 $PMQ=(\Lambda\ \ A)$ 得到 $M=P^{-1}(\Lambda\ \ A)Q^{-1}$，令 $M^{-r}=Q(\Lambda\ \ A)^{-r}P$，则 $M\cdot M^{-r}=P^{-1}(\Lambda\ \ A)Q^{-1}\cdot Q(\Lambda\ \ A)^{-r}P=E$。

现在说明推论1是定理4的特例：当行满秩非方阵含有值为±1的满阶子式时，必可在整数初等变换下变形为$(E\ \ A)$，由于单位方阵 E 对角元素为1，自然满足"$(\Lambda\ \ A)$每一行元素间相素，且 Λ 的对角元素两两互素"，因此存在整数右逆。

3 左右逆法与最小二乘法的比较以及整数分解式举例

对于满秩非方阵，也可以基于最小二乘法写出其左右逆形式。可以证明在整数情形下，满秩非方阵有整数左右逆时可能基于最小二乘法无法取得整数逆；反之，基于最小二乘法过程中的 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$ 有整数逆时，非方阵 A 一定有整数左右逆。

定理5 对于行满秩非方整数矩阵 A，方阵 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$ 有整数逆时，A 有整数右逆；反之，当 A 有整数右逆时，$A^{\mathrm{T}}\cdot(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$ 不一定是整数右逆。对于列满秩的情形，有相仿的结论，此处不予赘述。

证明：因为 $E=(A\cdot A^{\mathrm{T}})(A\cdot A^{\mathrm{T}})^{-1}=A\cdot(A^{\mathrm{T}}(A\cdot A^{\mathrm{T}})^{-1})$，所以 $A^{-r}=A^{\mathrm{T}}\cdot(A\cdot A^{\mathrm{T}})^{-1}$，当方阵 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$ 有整数逆（即 $\det(A\cdot A^{\mathrm{T}})=\pm1$）时，$A^{-r}$ 为整数矩阵。反之，

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-5\\-2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}，但\begin{pmatrix}1&2\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{13}{2}&-3\\-3&\frac{7}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{5}\\-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}。$$

定理5说明基于传统的最小二乘法求整逆并非是最好的方法。本文基于定理3、定理4提出了如下的整数逆求解算法：

1. 选定满秩非方阵的一个满阶子块作为目标块；
2. 对非方阵施加整数初等行(列)变换，使得目标块对角化；
3. 对含对角块的行(列)满秩非方阵，判别每行(列)的元素是否相素以及对角元元素是否两两互素；
4. 如果是，则使用定理3证明里的方法进行右(左)逆整数数值的构造，转到7；
5. 如果否，则判断是否还有其他的满阶子块作为目标块

等待检验,如果有则返回到 1;

6. 如果没有待检目标块,对非方阵使用最小二乘法求右(左)逆,如果逆为非整数矩阵,对非整数元素取整;

7. 结束。

为验证算法对求取整数逆的有效性,使用 C++语言实现了上述整逆算法,采用随机生成的矩阵进行批量测试,并统计在整数逆情形下使用基于定理 3、定理 4 的算法和使用最小二乘法能解出精确整逆的数目比较,如表 1 所列。其中还特别列出了使用最小二乘法过程中 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$(或 $A^{\mathrm{T}}\cdot A$)整数不可逆对应的求解例子数,实验中对应的分项统计为 0。事实上对于行(列)矩阵而言,$A^{\mathrm{T}}\cdot(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$(或$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\cdot A^{\mathrm{T}}$)为整数右(左)逆当且仅当 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$(或 $A^{\mathrm{T}}\cdot A$)为整可逆方阵,对于一般多行多列情形也是成立的,这与实验的情况是吻合的。通过表 1 看到,本文提出的整逆求解算法求出了最小二乘法所不能解出的整逆的数目为 186-42=144,由此可见左右逆法在整逆求解上优于最小二乘法。表 1 中"矩阵数"表示随机生成的矩阵数目,其中存在整逆的矩阵数目为 287,判别标准以 Gregory 问题的修正条件"行(列)相素性在初等变换下保持不变"为依据。在这 287 个整数可逆矩阵中有 186 个满足定理 4 的可逆判别条件。而最小二乘法解出整逆的情形中没有一例是 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$(或 $A^{\mathrm{T}}\cdot A$)不整可逆的。

表 1 关于求解整逆算法的有效性评价

矩阵数	含整逆数[1]	由最小二乘解出 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$(或 $A^{\mathrm{T}}\cdot A$) 整可逆	由最小二乘解出 $A\cdot A^{\mathrm{T}}$(或 $A^{\mathrm{T}}\cdot A$) 不整可逆	基于定理 3、定理 4 解出
1000	287	42	0	186

表 1 说明,在求解整逆方面,最小二乘法的有效性没有左右逆法强。为了衡量左右逆法的执行效率,表 2 给出了在最小二乘、左右逆法求解整逆均有效时的算法复杂度分析,其中$(\Lambda\quad A_1)$右逆可由辗转相除法求得,所以在该项上复杂度呈对数级增长。

表 2 关于求解整逆算法的效率比较

算法名称	实现	时间复杂度(乘法)
最小二乘	$A^{\mathrm{T}}\cdot(A\cdot A^{\mathrm{T}})^{-1}$	$3N^3$
左右逆法	$Q(\Lambda\quad A_1)^{-r}P$	$N^2\ln M+2N^3$

整数逆解出后,根据 2.1 节的讨论可以得出整数分解式。

例 1 求矩阵 $\begin{pmatrix}-176&-114&-205&17&-455&-221\\9&-34&-50&-5&-44&47\\23&25&43&-1&76&20\\-40&-4&-14&6&-66&-70\\65&44&79&-6&171&80\end{pmatrix}$ 的整数分解式。选第一、二和四列作为基矩阵,且其有整数左逆

$$\begin{pmatrix}-176&-114&17\\9&-34&-5\\23&25&-1\\-40&-4&6\\65&44&-6\end{pmatrix}^{-l}=\begin{pmatrix}2&2&0&3&7\\-2&1&3&1&-6\\2&-1&2&-3&3\end{pmatrix}$$

整数分解式如下:

$$\begin{pmatrix}-176&-114&-205&17&-455&-221\\9&-34&-50&-5&-44&47\\23&25&43&-1&76&20\\-40&-4&-14&6&-66&-70\\65&44&79&-6&171&80\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-176&-114&17\\9&-34&-5\\23&25&-1\\-40&-4&6\\65&44&-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&2\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&5&1&-3&1\end{pmatrix}$$

其中右端第二个表示矩阵由基矩阵的左逆左乘被分解矩阵得到。

例 2 在某角斗类数字游戏的设计中含 9 个角色,每一个角色具有 2 个层级的武器件数,形成 2 行 9 列的矩阵:

$$\begin{pmatrix}4&19&15&45&64&21&43&32&24\\2&11&9&26&37&13&24&20&16\end{pmatrix}$$

取第一、三、五和七列组成基矩阵,该矩阵为行满秩,存在整数右逆,使该右逆左乘上述矩阵得到整数分解的表示矩阵,分解式如下:

$$\begin{pmatrix}4&19&15&45&64&21&43&32&24\\2&11&9&26&37&13&24&20&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&15&64&43\\2&9&37&24\end{pmatrix}。$$

$$\begin{pmatrix}-2&4&6&9&13&12&1&20&24\\60&51&-9&129&180&-75&255&-144&-264\\-30&-24&6&-61&-85&40&-125&76&136\\24&18&-6&46&64&-34&98&-64&-112\end{pmatrix}$$

这样,任一角色的武力都可以用 4 个角色的线性组合得到。

结束语 本文考虑数据挖掘中基于整数矩阵的离散数据观测模型,并提出了观测矩阵的整数分解问题。由于整数可逆基矩阵的可选性,整数分解问题的核心需求是考虑如何求基矩阵的整数逆。对于一般满秩非方整数矩阵的整可逆性的研究,给出左右逆的解析形式,并探讨存在整数左右逆的若干个充分性条件。此外,本文还研究了在满秩情形下基于最小二乘法计算整数逆的局限性,设计了更优的整数逆构造算法。

参考文献

[1] Miettinen P. The boolean column and column-row matrix decompositions [J]. Data Min. Knowl. Discov. ,2008,17(1):39-56

[2] Lu H, Vaidya J, Atluri V. Optimal boolean matrix decomposition:Application to role engineering [C]// IEEE 24th International Conference on Data Engineering. 2008:297-306

[3] Lu H,Vaidya J,Atluri V. Extended Boolean Matrix Decomposition [C]// IEEE 9th International Conference on Data Mining. 2009:317-326

[4] Lee D,Seung H. Learning the parts of objects by Non-negative Matrix Factorization [J]. Nature,1999,401:788-791

[5] Wang Wan-liang,Cai Jing,Incremental Learning Algorithm of Non-negative Matrix Factorization with Sparseness Constraints [J]. Computer Science,2014,41(8):241-244(in Chinese)

(下转第 268 页)

[1] 由于尚没有含整数逆的等价性条件,此处以是否符合修正 Gregory 问题的已知条件为统计基准,即每行(列)整数元素相素并且在整数初等行(列)变换下保持每行(列)元素间相素性不变。

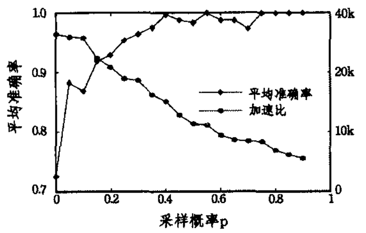

图 4 不完全网络测试结果(soc-Epinions1,$k=5$)

结束语 本文研究了大规模网络中的 k 团挖掘问题,k 团挖掘是各种基于网络应用的基础问题之一。将寻找最大密度的 k 团问题进一步转化为寻找超过给定密度值的 k 团的问题。接下来,以网络中的顶点和 k−1 团顶点为两类顶点构建二部图,并在该二部图中寻找网络的最大割。在稀疏网络中,本文提出的算法的时间和空间复杂度分别为 $O(c_k^2)$和 $O(c_k)$,因而可应用于大规模稀疏网络的 k 团挖掘。通过与文献[11]中的算法进行对比发现,提出的算法能更准确地挖掘大规模网络中的 k 团,并且具有更高的运行效率。此外通过实验发现,本文提出的算法可应用于不完全网络中的 k 团挖掘,并且在 k 较大时具有较高的准确率和性能加速比。在未来的研究工作中,将进一步研究 k 团挖掘问题的并行性,并在主流的分布式和并行系统中进行测试。

参 考 文 献

[1] Xu Ke, Zhang Sai, Chen Hao, et al. Measurement and analysis of online social network [J]. Chinese Journal of Computers, 2014, 37(1): 165-188(in Chinese)
徐恪,张赛,陈昊,等. 在线社会网络的测量与分析[J]. 计算机学报,2014,37(1):165-188

[2] Wang Li, Cheng Su-qi, Shen Hua-wei, et al. Structure inference and prediction in the co-evolution of social network [J]. Chinese Journal of Computer Research and Development, 2015, 50(12): 2492-2503(in Chinese)
王莉,程苏琦,沈华伟,等. 在线社会网络共演化的结构推断与预测[J]. 计算机研究与发展,2015,50(12):2492-2503

[3] Lin You-fang, Wang Tian-yu, Tang Rui, et al. An effective model and algorithm community detection in social networks[J]. Chinese Journal of Computer Research and Development, 2015, 49(2): 337-345(in Chinese)
林友芳,王天宇,唐锐,等. 一种有效的社会网络社区发现模型和算法[J]. 计算机研究与发展,2015,49(2):337-345

[4] Wang Li, Cheng Xue-qi. Dynamic community in online social networks[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(2): 219-237 (in Chinese)
王莉,程学旗. 在线社会网络的动态社区发现及演化[J]. 计算机学报,2015,38(2):219-237

[5] Gao Quan-li, Gao Ling, Yang Jian-feng, et al. A preference Elicitation method based on users' cognitive behavior for Context-aware recommender system[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(9): 1767-1776(in Chinese)
高全力,高岭,杨建锋,等. 上下文感知推荐系统中基于用户认知行为的偏好获取方法[J]. 计算机学报,2015,38(9):1767-1776

[6] Wang Li-cai, Meng Xiang-wu, Zhang Yu-jie. Context-aware recommender systems[J]. Journal of Software, 2012, 23(1): 1-20 (in Chinese)
王立才,孟祥武,张玉洁. 上下文感知推荐系统[J]. 软件学报,2012,23(1):1-20

[7] Sun Ji-gui, Liu Jie, Zhao Lian-yu. Research on clustering algorithm[J]. Journal of Software, 2008, 19(1): 48-61(in Chinese)
孙吉贵,刘杰,赵连宇. 聚类算法研究[J]. 软件学报,2008,19(1):48-61

[8] Yang Bo, Liu Da-you, Jin Di, et al. Complex network clustering method[J]. Journal of Software, 2009, 20(1): 54-66(in Chinese)
杨博,刘大有,金弟,等. 复杂网络聚类方法[J]. 软件学报,2009,20(1):54-66

[9] Chen Ke-han, Han Pan-pan, Wu Jian. User clustering based social network recommendation[J]. Chinese Journal of Computers, 2013, 36(2): 349-359(in Chinese)
陈克寒,韩盼盼,吴健. 基于用户聚类的异构社交网络推荐算法[J]. 计算机学报,2013,36(2):349-359

[10] Chiang K Y, Hsieh C J, Natarajan N, et al. Prediction and clustering in signed networks: a local to global perspective[J]. The Journal of Machine Learning Research, 2014, 15(1): 1177-1213

[11] Tsourakakis C. The K-clique Densest Subgraph Problem[C]// Proceedings of the 24th International Conference on World Wide Web. International World Wide Web Conferences Steering Committee. 2015: 1122-1132

[12] Rossman B. The monotone complexity of k-clique on random graphs[J]. SIAM Journal on Computing, 2014, 43(1): 256-279

[13] Bahmani B, Kumar R, Vassilvitskii S. Densest subgraph in streaming and mapreduce[J]. Proceedings of the VLDB Endowment, 2012, 5(5): 454-465

[14] Bhawalkar K, Kleinberg J, Lewi K, et al. Preventing unraveling in social networks: the anchored k-core problem[M]// Automata, Languages, and Programming. Springer Berlin Heidelberg, 2012: 440-451

[15] Khuller S, Saha B. On finding dense subgraphs[M]// Automata, Languages and Programming. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 597-608

[16] Andersen R, Chellapilla K. Finding dense subgraphs with size bounds[M] // Algorithms and Models for the Web-Graph. Springer Berlin Heidelberg, 2009: 25-37

[17] Chiba N, Nishizeki T . Arboricity and subgraph listing algorithms[J]. SIAM Journal on Computing, 1985, 14(1): 210-223

[18] Lee Y T, Sidford A. Path finding methods for linear programming: Solving linear programs in o(vrank) iterations and faster algorithms for maximum flow[C]// FOCS. 2014: 424-433

(上接第 251 页)

王万良,蔡竞. 稀疏约束下非负矩阵分解的增量学习算法[J]. 计算机科学,2014,41(8):241-244

[6] Li Qian, Jing Li-ping, Yu Jian. Multi-kernel Projective Nonnegative Matrix Factorization Algorithm [J]. Computer Science, 2014, 41(2): 64-67(in Chinese)
李谦,景丽萍,于剑. 基于多核学习的投影非负矩阵分解算法[J]. 计算机科学,2014,41(2):64-67

[7] Lazebnik F. On Systems of Linear Diophantine Equations [J]. Mathematics Magazine, 1996, 69(4): 261-266

[8] Hanson R. Integer Matrices Whose Inverse Contain Only Integers [J]. The Two-Year College Mathematics Journal, 1992, 13 (1): 18-21

[9] Penrose R. A generalized inverse for matrix [J]. Proc. Cambridge Philos. Soc. , 1955, 51: 406-413

[10] Penrose R. On best approximate solution of linear matrix equations [J]. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1956, 52: 17-19

[11] Stanimirovic P. Determinants of Rectangular Matrices and Moore Penrose Inverse [J]. Novi. Sad. J. Math. , 1997, 27(1): 53-69

[12] Gregory. Inverse of an integer matrix[EB/OL]. http://www.openproblemgarden.org/op/inverse_of_an_integer_matrix