广义 Kautz 有向图 $GK(3,n)$ 的反馈数的界

徐喜荣　黄亚真　张思佳　董学智

（大连理工大学计算机科学与技术学院　大连 116024）

摘　要　对于给定的图 G 的顶点集的子集 F，如果删除 F 使得剩余子图是无圈子图，则称子集 F 为图 G 的反馈点集。研究了广义 Kautz 有向图 $GK(d,n)$ 的反馈点集。令 $f(d,n)$ 表示广义 Kautz 有向图 $GK(d,n)$ 的所有反馈集合中顶点个数最少的集合的个数（即广义 Kautz 有向图 $GK(d,n)$ 的反馈数），给出了 $GK(3,n)$ 的反馈数的上界，即 $f(3,n)\leqslant n+\left\lfloor\frac{5n}{8}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3n}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor+3$。

关键词　互联网络拓扑结构，反馈点集，反馈数，广义 Kautz 有向图，无圈子图

中图法分类号　O157.9，TP301.6　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2016.5.003

Feedback Numbers of Generalized Kautz Digraphs $GK(3,n)$

XU Xi-rong　HUANG Ya-zhen　ZHANG Si-jia　DONG Xue-zhi

(School of Computer Science and Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract　A subset of vertices of a graph G is called a feedback vertex set of G, if its removal results is an acyclic subgraph. This paper investigated the feedback vertex set of generalized Kautz digraphs $GK(d,n)$. Let $f(d,n)$ denote the minimum cardinality over all feedback vertex sets of the Generalized Kautz digraph $GK(d,n)$. The upper bound of the feedback numbers of $GK(3,n)$ is obtained as follows $f(3,n)\leqslant n+\left\lfloor\frac{5n}{8}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{3n}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor+3$.

Keywords　Topological structure of interconnection network, Feedback vertex set, Feedback number, Generalized Kautz digraphs, Acyclic subgraph

1　引言

对简单图（有向或无向）$G=(V,E)$，F 是 V 的子集，如果由 $V\backslash F$ 导出的子图不含（有向或无向）圈，则称 F 是 G 的反馈点集（Feedback Vertex Set）。点数最小（$\min|F|$）的反馈点集称为最小反馈点集（Minimum Feedback Vertex Set, MFVS）。图 G 的最小反馈点数称为图 G 的最小反馈数。

确定图的最小反馈集问题，因其在诸多领域内的广泛应用而受到重视。例如，组合电路设计问题、互连网络中避免广播风暴问题、计算机操作系统中解决死锁问题、光纤网络中波长转换器的安装问题等都等价于在图中找到一个最小反馈点集问题。因此，有关图的最小反馈集的研究[1]一直吸引着人们的研究兴趣。然而前人的研究已经证明：对一般图 G，确定其反馈数问题是 NP-hard 问题[2]，因此要准确计算出图的反馈数是很困难的。

Kautz 网络是由 Kautz[3] 于 1969 年提出来的，后来又有人独立发现了它。它和 De Bruijn 网络一起被认为是对超立方体网络的挑战且替代成为下一代并行计算机互连网络。在顶点度和直径都一样的情况下，Kautz 网络顶点数比 De Bruijn 网络顶点数多得多。

在已知文献中，Kralovic 和 Ruzicka[4] 给出了 De Bruijn 无向图 $UB(2,n)$ 的最小反馈点集阶数以及无向 Kautz 图 $UK(2,n)$ 的最小反馈点集阶数；徐俊明和吴叶舟等人[5]证明了 Kautz 有向图的最小反馈点集阶数的渐进界，并给出了最小反馈弧集的阶数。徐喜荣、徐俊明和曹永昌等人[6]给出了 De Bruijn 有向图 $B(d,n)$ 的反馈数的渐进界以及 De Bruijn 无向图 $UB(d,n)$ 的反馈数的上下界[7]。同时徐喜荣、杨元生等人[8,9]也证明了广义 De Bruijn 有向图 $GB(d,n)$ 的反馈数的上界以及广义 Kautz 有向图 $GK(2,n)$ 的反馈数的上界[10]。本文利用对广义 Kautz 有向图 $GK(3,n)$ 的点集 $V(GK(3,n))$ 进行划分的思想，通过计算机构造，给出并证明了其反馈数的上界。

2　定义与引理

2.1　$GK(d,n)$ 的定义

定义 1　Kautz 有向图利用代数方法定义如下：

$K(d,n)$ 的顶点集 $V=\{0,1,\cdots,d^n+d^{n-1}-1\}$，边集 $E=\{(x,y):y\equiv-(\gamma+xd)\bmod(d^n+d^{n-1}),\gamma=1,\cdots,d\}$。

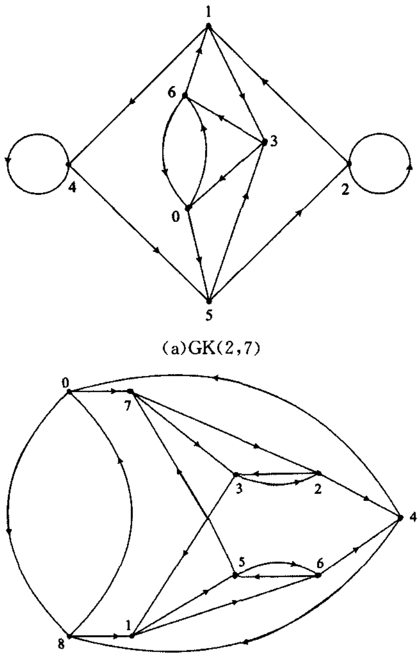
到稿日期：2015-03-16　返修日期：2015-07-20　本文受国家自然科学基金项目（61472465，61170303），辽宁省自然科学基金项目（L2013337）资助。

徐喜荣（1967－），女，博士后，副教授，主要研究方向为互连网络拓扑结构理论及其应用、算法设计与分析、图论算法，E-mail：xirongxu@dlut.edu.cn（通信作者）；**黄亚真**（1988－），女，硕士，主要研究方向为互连网络拓扑结构理论及其应用；**张思佳**（1982－），女，博士，主要研究方向为互连网络拓扑结构理论及其应用、图论算法；**董学智**（1983－），男，硕士，主要研究方向为互连网络拓扑结构理论及其应用、图论算法。

与 De Bruijn 有向图一样，Kautz 有向图也很容易被推广到一般的顶点数目。只需将 Kautz 有向图代数方法中定义的 d^n 用 n 代替，就能实现上述目标。这种扩充的 Kautz 有向图称为广义 Kautz 有向图，记为 $GK(d,n)$，$d\geqslant 2$。

定义 2 广义 Kautz 有向图 $GK(d,n)$ 定义为：顶点集 $V=\{0,1,\cdots,n-1\}$，边集 $E=\{(i,j)\mid j\equiv(d(n-1-i)+\beta)(\bmod\ n),\beta=0,1,\cdots,d-1\}$。

广义 Kautz 有向图 $GK(2,7)$ 和 $GK(2,9)$ 如图 1 所示。



(a)GK(2,7)

(b)GK(2,9)

图 1 广义 Kautz 有向图 $GK(2,7)$ 和 $GK(2,9)$

2.2 $GK(d,n)$ 的性质

令 V_d 表示 $V(GK(d,n))$ 中被删除的顶点的子集，V_r 表示 $V(GK(d,n))$ 中去掉 V_d 后的剩余顶点的子集，即 $V_r=V(GK(d,n))\backslash V_d$，$G[V_r]$ 表示 V_r 的顶点导出子图。

令 V_c 为 V_r 的子集，这个子集中包含的顶点都位于导出子图 $G[V_r]$ 中的任一圈上。

令 $V_{nc}=V(GK(d,n))\backslash V_c$，即 V_{nc} 是所有不在 $G[V_r]$ 中任一圈上的顶点的集合。

这里先给出一个基本引理，如下。

引理 1 对于任意子集 $S\subseteq V_r$，如果 $N^+(S)\subseteq V_{nc}$，那么 $S\subseteq V_{nc}$。

证明：假设集合 S 存在一个顶点 x，使得 $x\notin V_{nc}$。那么 x 必然位于 $G[V_r]$ 中的圈 C 上。于是，圈 C 中必然存在一个顶点 $y\in N^+(x)\subseteq N^+(S)$。这就与 $N^+(S)\subseteq V_{nc}$ 的假设相矛盾，即证明了这个引理的正确性。

3 $GK(3,n)$ 的反馈点集

现在考虑 $GK(3,n)$ 反馈点集。对于 $i\in V(GK(3,n))$，i 的外邻接点集如下：

$$N^+(i)=\{(k+3)n-3+\beta-3i\mid\beta\in\{0,1,2\},k\in Z\}$$
$$=\{(k+3)n-3-3i,(k+3)n-2-3i,(k+3)n-1-3i\mid k\in Z\}$$

首先，给出 $V(GK(3,n))$ 的 8 个子集如下：

$F_1=[0,\lfloor\frac{n}{4}\rfloor-1]$，$F_2=[\lfloor\frac{n}{4}\rfloor,\lfloor\frac{n}{4}\rfloor]$，$F_3=[\lfloor\frac{n}{4}\rfloor+1,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1]$，$F_4=[\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor]$，$F_5=[\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1,\lfloor\frac{4n}{7}\rfloor-1]$，$F_6=[\lfloor\frac{4n}{7}\rfloor,\lfloor\frac{5n}{8}\rfloor]$，$F_7=[\lfloor\frac{5n}{8}\rfloor+1,\lfloor\frac{6n}{8}\rfloor-1]$，$F_8=[\lfloor\frac{6n}{8}\rfloor,n-1]$。

显然，集合 $F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6,F_7,F_8$ 是 $V(GK(3,n))$ 的一个划分，所以当 $1\leqslant i\neq j\leqslant 8$ 时，$F_i\cap F_j=\varnothing$ 且 $V(GK(3,n))=\bigcup_{i=1}^{8}F_i$。

假设 $V_d=F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_8$，由于 $F_1,\cdots,F_8$ 是 $V(GK(3,n))$ 的一个划分，那么 $V_r=F_1\cup F_3\cup F_5\cup F_7$。下面将证明 $G[F_1\cup F_3\cup F_5\cup F_7]=G[V_r]$ 是无圈的，即 $F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_8$ 是 $GK(3,n)$ 的一个反馈点集。

主要的证明如下。

首先，由于 V_d 代表 $GK(d,n)$ 中被删除点的集合，$V_d\subset V_{nc}$。因此，在 $G[V_r]$ 中的任何圈上不存在 V_d 中的点。

选择一个子集 $S_1\subseteq V_r$，如果 $N^+(S_1)\subseteq V_{nc}$，由引理 1，有 $S_1\subseteq V_{nc}$。因此，$V_d\cup S_1\subset V_{nc}$。

如果 $V_{nc}\neq V(GK(d,n))$，那么选择一个子集 $S_2\subseteq V_r$，如果 $N^+(S_2)\subseteq V_{nc}$，则由引理 1，有 $S_2\subseteq V_{nc}$。因此，$V_d\cup S_1\cup S_2\subset V_{nc}$。

继续这种选择子集的方式，将会停止从 V_r 选择一个子集直到 $V_{nc}=V(GK(d,n))$。

引理 2 $G[V_r]$ 是无圈的。

证明：当且仅当 $V_c=\varnothing$ 或者 $V_{nc}=V(GK(d,n))$ 时 $G[V_r]$ 是无圈的。为了证明 $G[V_r]$ 是无圈的，只需证明 $V_{nc}=V(GK(d,n))$。

(1)选择子集

$[0,\lfloor\frac{n}{7}\rfloor-1]\cup[\lfloor\frac{5n}{8}\rfloor+1,\lfloor\frac{6n}{8}\rfloor-1]\subseteq V_r$，接下来证明 $[0,\lfloor\frac{n}{7}\rfloor-1]\cup[\lfloor\frac{4n}{7}\rfloor,\lfloor\frac{6n}{8}\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$。

令 $n=8m+t(0\leqslant t\leqslant 7)$，然后有

$$F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_8$$
$$=[2m+\lfloor\frac{t}{4}\rfloor,2m+\lfloor\frac{t}{4}\rfloor]\cup[4m+\lfloor\frac{t}{2}\rfloor,4m+\lfloor\frac{t}{2}\rfloor]\cup[4m+\lfloor\frac{4m+4t}{7}\rfloor,5m+\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor]\cup[6m+\lfloor\frac{6t}{8}\rfloor,8m+t-1]\subseteq V_{nc}$$

令 $k=\frac{1}{2}\text{Log}\frac{8m+t-12}{3^2(28+3t)}$，对于 $l=0,1,2,\cdots,k$，定义：

$$S_l=[0,\lfloor(1-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})\rfloor-1]$$

$$T_l=[\lceil(5+\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^{2l+1}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rceil,6m+\lfloor\frac{3t}{4}\rfloor-1]$$

由此可见，$S_0\subset S_1\subset S_2\cdots\subset S_l\cdots\subset S_k$，$T_0\subset T_1\subset T_2\cdots\subset T_l\cdots\subset T_k$。

考虑到 S_l 和 T_l 的外邻顶点集，得出

$$N^+(S_0)$$
$$=N^+([0,\lfloor(1-\frac{1}{3^1})m+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^0})\rfloor-1])$$
$$\subseteq N^+([0,(1-\frac{1}{3^1})m+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^0})-1])$$

$=[8m+t-3m+m-\frac{3}{8}t+\frac{1}{8}t+3-3,8m+t-1]$

$=[6m+\lfloor\frac{3t}{4}\rfloor,8m+t-1]$

$=F_8$

$N^+(T_0)$

$=N^+([\lceil(5+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil,$

$6m+\lfloor\frac{3t}{4}-1\rfloor])$

$\subseteq N^+([\lceil(5+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil,$

$6m+\frac{3t}{4}-1])$

$=[24m+3t-18m-\frac{9t}{4}+3-3,8m+t-1]\cup[0,$

$16m+2t-15m-\frac{m}{3^1}-\frac{15}{8}t-\frac{1}{8\times3^1}t-1-1]$

$=[6m+\frac{3t}{4},8m+t-1]\cup[0,(1-\frac{1}{3^1})m+\frac{1}{8}(1-$

$\frac{1}{3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^0})-1-1]$

$\subseteq[6m+\lfloor\frac{3t}{4}\rfloor,8m+t-1]\cup[0,(1-\frac{1}{3^1})m+\frac{1}{8}(1-$

$\frac{1}{3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^0})-1]$

$=F_8\cup S_0$

按这样的方式继续下去，对于 $l=1,2,\cdots,k$，有

$N^+(S_l)$

$=N^+([0,\lfloor(1-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-$

$\frac{1}{3^{2l}})\rfloor-1])$

$\subseteq N^+([0,\lfloor(1-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{8}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-$

$\frac{1}{3^{2l}})\rfloor-1])$

$=[8m+t-3m+\frac{m}{3^{2l}}-\frac{3}{8}t+\frac{1}{8\times3^{2l}}t+\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})+$

$3-3,8m+t-1]$

$=[(5+\frac{1}{3^{2l}})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^{2l}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l-1}})+1,8m+$

$t-1]$

$\subseteq[\lceil(5+\frac{1}{3^{2l}})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^{2l}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l-1}})\rceil,8m+$

$t-1$

$=F_8\cup T_{l-1}$

$N^+(T_l)$

$=N^+([\lceil(5+\frac{1}{3^{2l+2}})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^{2l+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rceil,$

$6m+\lfloor\frac{3t}{4}\rfloor-1])$

$\subseteq N^+([\lceil(5+\frac{1}{3^{2l+2}})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^{2l+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rceil,$

$6m+\frac{3t}{4}-1])$

$=[24m+3t-18m-\frac{9t}{4}+3-3,8m+t-1]\cup[0,16m+$

$2t-15m-\frac{m}{3^{2l+1}}-\frac{15}{8}t-\frac{1}{8\times3^{2l+1}}t-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})-1]$

$=[6m+\frac{3}{4}t,8m+t-1]\cup[0,(1-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{8}(1-$

$\frac{1}{3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})-1-1]$

$\subseteq[6m+\lfloor\frac{3}{4}t\rfloor,8m+t-1]\cup[0,\lfloor(1-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{8}(1-$

$\frac{1}{3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})\rfloor-1]$

$=F_8\cup S_l$

也就是 $N^+(S_l)\subseteq F_8\cup T_{l-1}$，$N^+(T_l)\subseteq F_8\cup S_l$。

因为 $N^+(S_0)\subseteq F_8$ 和 $F_8\subseteq V_{nc}$，即 $N^+(S_0)\subseteq V_{nc}$，由引理 1，有 $S_0\subseteq V_{nc}$。同时，$N^+(T_0)\subseteq F_8\cup S_0\subseteq V_{nc}$，由引理 1，得出 $T_0\subseteq V_{nc}$。

因此，根据引理 1 可以一步步推导出下面的结论：

$N^+(S_1)\subseteq F_8\cup T_0\subseteq V_{nc}$, i. e. , $S_1\subseteq V_{nc}$,

$N^+(T_1)\subseteq F_8\cup S_1\subseteq V_{nc}$, i. e. , $T_1\subseteq V_{nc}$;

$N^+(S_2)\subseteq F_8\cup T_1\subseteq V_{nc}$, i. e. , $S_2\subseteq V_{nc}$,

$N^+(T_2)\subseteq F_8\cup S_2\subseteq V_{nc}$, i. e. , $T_2\subseteq V_{nc}$;

……

$N^+(S_k)\subseteq F_8\cup T_{k-1}\subseteq V_{nc}$, i. e. , $S_k\subseteq V_{nc}$,

$N^+(T_k)\subseteq F_8\cup S_k\subseteq V_{nc}$, i. e. , $T_k\subseteq V_{nc}$。

因此，$S_0\cup S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k\subset V_{nc}$，$T_0\cup T_1\cup T_2\cdots\cup T_k\subset V_{nc}$。

令 $S_{k+1}=[0,m+17t-27\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor-28]$，则

$N^+(S_{k+1})$

$=N^+([0,m+17t-27\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor-28])$

$=[8m+t-3m-51t+81\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor+84-3,8m+t-1]$

$=[5m-50t+81\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor+81,8m+t-1]$

由于 $k=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_3\frac{8m+t-12}{3^2(28+3t)}$，可推导出以下结果：

$\mathrm{Log}_3\frac{8m+t-12}{28+3t}\leqslant 2k+2$

$8m+t-12\leqslant(28+3t)\times3^{2k+2}$

$8m+t+4\times3^{2k+2}-12\leqslant 32\times3^{2k+2}+3^{2k+2}t$

$\frac{m}{3^{2k+2}}+\frac{t}{8\times3^{2k+2}}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\leqslant 4+\frac{3t}{8}$

$(5+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{5}{8}+\frac{1}{8\times3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\leqslant 5m+$

$t+4$

$\lceil(5+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{5}{8}+\frac{1}{8\times3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\rceil\leqslant 5m+$

$t+4$

和

$\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor\geqslant\frac{5t}{8}-\frac{7}{8}$

$81\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor\geqslant 50t+\frac{5t}{8}-70\ \frac{7}{8}$

$81\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor\geqslant 50t+\frac{5t}{8}-71+\frac{1}{8}$

$81\lfloor\frac{5t}{8}\rfloor\geqslant 50t-70$

$74+7+81\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor \geqslant 50t+t+74-70$

$81+81\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-50t\geqslant t+4$

$5m+81+81\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-50t\geqslant 5m+t+4$

$5m+81+81\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-50t\geqslant\left\lceil(5+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{5}{8}+\frac{1}{8\times 3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\right\rceil$

由此得出

$\left[5m-50t+81\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+81,8m+t-1\right]$

$\subseteq\left[\left\lceil(5+\frac{1}{3^{2k+2}})m+\frac{1}{8}(5+\frac{1}{3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\right\rceil,8m+t-1\right]$

$=F_8\cup T_k$

因此，$N^+(S_{k+1})\subseteq F_8\cup T_k\subseteq V_{nc}$，由引理 1 得出 $S_{k+1}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+1}=[5m-5t+9\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+9,\left\lfloor\frac{24m+3t}{4}-1\right\rfloor]$，则

$N^+(T_{k+1})$

$=N^+([5m-5t+9\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+9,\left\lfloor\frac{24m+3t}{4}\right\rfloor-1])$

$=[24m+3t-18m-\frac{9t}{4}+3-3,8m+t-1]\cup[0,16m+2t-15m+15t-27\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-27-1]$

$=[6m+\frac{3t}{4},8m+t-1]\cup[0,m+17t-27\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-28]$

$=F_8\cup S_{k+1}\subseteq V_{nc}$

由引理 1，得到 $T_{k+1}\subseteq V_{nc}$。

令 $S_{k+2}=[0,m+2t-3\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-4]$，则

$N^+(S_{k+2})=N^+([0,m+2t-3\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-4])$

$=[8m+t-3m-6t+9\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+12-3,8m+t-1]$

$=[5m-5t+9\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+9,8m+t-1]$

$=F_8\cup T_{k+1}\subseteq V_{nc}$

由引理 1，得出 $S_{k+2}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+2}=[5m+\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+1,6m+\left\lfloor\frac{3t}{4}\right\rfloor-1]$，则

$N^+(T_{k+2})=N^+([5m+\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor+1,6m+\left\lfloor\frac{3t}{4}\right\rfloor-1])$

$=[24m+3t-18m-\frac{9t}{4}+3-3,8m+t-1]\cup[0,16m+2t-15m-3\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-3-1]$

$=[6m+\frac{3t}{4},8m+t-1]\cup[0,m+2t-3\left\lfloor\frac{5t}{8}\right\rfloor-4]$

$\subseteq F_8\cup S_{k+2}\subseteq V_{nc}$

由引理 1，得到 $T_{k+2}\subseteq V_{nc}$。

合并 $T_k\subseteq V_{nc}$，$T_{k+1}\subseteq V_{nc}$，$T_{k+2}\subseteq V_{nc}$，即$[\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$，结合 $F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_8\subseteq V_{nc}$，得出$[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$。又因为

$N^+([0,\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor-1])\subseteq N^+([0,\frac{n}{7}-1])$

$=N^+([n-\frac{3n}{7}+3-3,n-0-1])$

$=[\frac{4n}{7},n-1]$

$\subseteq[\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$

由引理 1，得到$[0,\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$。

因此，

$[0,\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor-1]\cup[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$

(2)选择子集$[\left\lfloor\frac{2n}{7}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor-1]\subseteq V_r$，然后将证明$[\left\lfloor\frac{2n}{7}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$。

令 $n=14m+t(0\leqslant t\leqslant 13)$，然后有

$F_{11}\cup F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_7\cup F_8$

$=[0,2m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1]\cup[\lfloor\frac{7m}{2}+\frac{t}{4}\rfloor,\lfloor\frac{7m}{2}+\frac{t}{4}\rfloor]\cup[7m+\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor,7m+\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor]\cup[8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,\left\lfloor\frac{35m}{4}+\frac{5t}{8}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{35m}{4}+\frac{5t}{8}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{21m}{2}+\frac{3t}{4}\right\rfloor-1]\cup[\left\lfloor\frac{21m}{2}+\frac{3t}{4}\right\rfloor,14m+t-1]$

$=[0,2m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1]\cup[\lfloor\frac{7m}{2}+\frac{t}{4}\rfloor,\lfloor\frac{7m}{2}+\frac{t}{4}\rfloor]\cup[7m+\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor,7m+\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor]\cup[8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,14m+t-1]$

$\subseteq V_{nc}$

令 $k=\frac{1}{2}\log_3\frac{14m-21+t}{3^2(385+7t)}$，$l=0,1,2,\cdots,k$，表示

$S_l=[\left\lceil 4m+\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\right\rceil,\left\lfloor(7-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})\right\rfloor-1]$

$T_l=[\left\lceil(7+\frac{1}{3^{2l+2}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2l+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\right\rceil,\left\lfloor 8m+\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+2}})\right\rfloor-1]$

考虑到 S_l 和 T_l 的外邻接点集，可以得出

$N^+(S_0)$

$=N^+([\left\lceil 4m+\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\right\rceil,\left\lfloor(7-\frac{1}{3^1})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^0})\right\rfloor-1])$

$\subseteq[8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,14m+t-1]\cup[0,2m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1]$

$=F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}$

$N^+(T_0)$

$=N^+([\left\lceil(7+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\right\rceil,\left\lfloor 8m+\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^2})\right\rfloor-1])$

$\subseteq[4m+\left\lceil\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\right\rceil,\left\lfloor(7-\frac{1}{3^1})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^0})\right\rfloor-1]$

$=S_0$

$N^+(S_1)$

$=N^+([\lceil 4m+\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^3})\rceil,\lfloor(7-\frac{1}{3^3})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^3})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^2})\rfloor-1])$

$\subseteq[\lceil(7+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil,14m+t-1]\cup[0,2m+\lfloor\frac{t}{7}\rfloor-1]$

$=T_0\cup F_{11}$

$N^+(T_1)$

$=N^+([\lceil(7+\frac{1}{3^4})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^4})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^3})\rceil,\lfloor 8m+\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^4})\rfloor-1])$

$\subseteq[4m+\lceil\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^3})\rceil,\lfloor(7-\frac{1}{3^3})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^3})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^2})\rfloor-1]$

$=S_1$

按这样的方式继续下去，对于 $l=1,2,\cdots,k$，得出

$N^+(S_l)$

$=N^+([\lceil 4m+\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rceil,\lfloor(7-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})\rfloor-1])$

$\subseteq[\lceil(7+\frac{1}{3^{2l}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2l}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l-1}})\rceil,14m+t-1]\cup[0,2m+\lfloor\frac{t}{7}\rfloor-1]$

$=T_{l-1}\cup F_{11}$

$N^+(T_l)$

$=N^+([\lceil(7+\frac{1}{3^{2l+2}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2l+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rceil,\lfloor 8m+\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+2}})\rfloor-1])$

$\subseteq[4m+\lceil\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rceil,\lfloor(7-\frac{1}{3^{2l+1}})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})\rfloor-1]$

$=S_l$

也就是，$N^+(S_l)\subseteq T_{l-1}\cup F_{11}$，$N^+(T_l)\subseteq S_l$。

因为 $N^+(S_0)\subseteq F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}$ 且 $F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}\subseteq V_{nc}$，即 $N^+(S_0)\subseteq V_{nc}$，由引理 1，得出 $S_0\subseteq V_{nc}$。与此同时，$N^+(T_0)\subseteq S_0\subseteq V_{nc}$，由引理 1，得出 $T_0\subseteq V_{nc}$。

所以，根据引理 1 一步步推导出以下面结论：

$N^+(S_1)\subseteq F_6\cup F_7\cup F_8\cup T_0\subseteq V_{nc}$，即 $S_1\subseteq V_{nc}$，

$N^+(T_1)\subseteq S_1\subseteq V_{nc}$，即 $T_1\subseteq V_{nc}$；

$N^+(S_2)\subseteq F_6\cup F_7\cup F_8\cup T_1\subseteq V_{nc}$，即 $S_2\subseteq V_{nc}$，

$N^+(T_2)\subseteq S_2\subseteq V_{nc}$，即 $T_2\subseteq V_{nc}$；

……

$N^+(S_k)\subseteq F_6\cup F_7\cup F_8\cup T_{k-1}\subseteq V_{nc}$，即 $S_k\subseteq V_{nc}$；

$N^+(T_k)\subseteq S_k\subseteq V_{nc}$，即 $T_k\subseteq V_{nc}$。

因此，$S_0\cup S_1\cup S_2\cdots\cup S_k\subset V_{nc}$，$T_0\cup T_1\cup T_2\cdots\cup T_k\subset V_{nc}$。也就是

$[\lfloor(7-\frac{1}{3^{2k+1}})m+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{7\times 3^{2k+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k}})\rfloor-1,\lceil 4m+\frac{2t}{7}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil]\subseteq V_{nc}$

$[\lceil(7+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil,\lfloor 8m+\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$

令 $S_{k+1}=[4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor-1]$，则

$N^+(S_{k+1})$

$=N^+([4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor-1])$

$=[2m+5t+9\lfloor\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor,2m-5t+9\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor-1]$

$\subseteq[8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,14m+t-1]\cup[0,2m+\lfloor\frac{t}{7}\rfloor-1]$

$\subseteq V_{nc}$

由引理 1，可以得出 $S_{k+1}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+1}=[8m+\lfloor\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor,8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor-1]$，则

$N^+(T_{k+1})$

$=N^+([8m+\lfloor\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor,8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor-1])$

$=[4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rfloor-1]$

$=S_{k+1}\subseteq V_{nc}$

由引理 1，可以得出 $T_{k+1}\subseteq V_{nc}$。

由此可见，$S_0\cup S_1\cup S_2\cdots\cup S_k\cup S_{k+1}\subseteq V_{nc}$，$T_0\cup T_1\cup T_2\cdots\cup T_k\cup T_{k+1}\subseteq V_{nc}$，也就是

$[\lceil(7+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil,8m+\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$

结合(1)，可以得出

$T_0\cup T_1\cup T_2\cdots\cup T_k\cup T_{k+1}\cup F_6\cup F_7\cup F_8$

$=[\lceil(7+\frac{1}{3^2})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rceil,14m+t-1]\subseteq V_{nc}$

令 $S_{k+2}=[4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,7m+14t-27\lfloor\frac{t}{2}\rfloor-28]$，则

$N^+(S_{k+2})$

$=N^+([4m+2t-3\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor,7m+14t-27\lfloor\frac{t}{2}\rfloor-28])$

$=[7m-40t+81\lfloor\frac{t}{2}\rfloor+81,14m+t-1]\cup[0,2m-5t+9\lfloor\frac{4t}{7}\rfloor-1]$

因为 $k=\frac{1}{2}\log_3\frac{14m-21+t}{3^2(385+7t)}$，能一步步推导出下面的结果：

$$\log_3\frac{14m-21+t}{385+7t}\leqslant 2k+2$$

$14m-21+t\leqslant(385+7t)\times 3^{2k+2}$

$14m+t+7\times 3^{2k+2}-21\leqslant 392\times 3^{2k+2}+7\times 3^{2k+2}t$

$\frac{m}{3^{2k+2}}+\frac{t}{14\times 3^{2k+2}}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\leqslant 28+\frac{t}{2}$

$(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\leqslant$

$7m+t+28$

$\left\lceil(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\right\rceil\leqslant 7m+t+28$

和

$\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor\geqslant\frac{t}{2}-\frac{1}{2}$

$81\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor\geqslant 40t+\frac{t}{2}-40\frac{1}{2}$

$81+81\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor-40t\geqslant t+28$

$7m-40t+81\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor+81\geqslant 7m+t+28$

$7m-40t+81\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor+81\geqslant\left\lceil(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+1}})\right\rceil$

和

$9\times\frac{4t}{7}\geqslant 9\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor$

$9\times\frac{4t}{7}-5t\geqslant 9\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor-5t$

$\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor\geqslant 9\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor-5t$

$2m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1\geqslant 2m+9\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor-5t-1$

$\left\lfloor\frac{14m+t}{7}\right\rfloor-1\geqslant 2m+9\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor-5t-1$

由此可得

$[7m-40t+81\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor+81,14m+t-1]\cup[0,2m-5t+9\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor-1]$

$\subseteq[\left\lceil(7+\frac{1}{3^{2k}})m+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{7\times 3^{2k}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k-1}})\right\rceil,14m+t-1]\cup[0,2m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1]$

$=T_k\cup T_{k+1}\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}$

因此,$N^+(S_{k+2})\subseteq T_k\cup T_{k+1}\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}\subseteq V_{nc}$,由引理1,得出 $S_{k+2}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+2}=[7m-4t+9\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor+9,\left\lfloor\frac{56m+4t}{7}\right\rfloor-1]$,则

$N^+(T_{k+2})$

$=N^+([7m-4t+9\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor+9,\left\lfloor\frac{56m+4t}{7}\right\rfloor-1])$

$=[28m+2t-24m-3\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor+3-3,28m+2t-21m+12t-27\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor-27-1]$

$=[4m+2t-3\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor,7m+14t-27\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor-28]$

$=S_{k+2}\subseteq V_{nc}$

由引理1,得出 $T_{k+2}\subseteq V_{nc}$。

令 $S_{k+3}=[4m+2t-3\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor,7m+2t-3\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor-4]$,则

$N^+(S_{k+3})$

$=N^+([4m+2t-3\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor,7m+2t-3\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor-4])$

$\subseteq[7m-4t+9\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor+9,14m+t-1]\cup[0,\left\lfloor\frac{14m+t}{7}\right\rfloor-1]$

$=T_{k+2}\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}\subseteq V_{nc}$

由引理1,可以得出 $S_{k+3}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+3}=[\left\lfloor\frac{14m+t}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{56m+4t}{7}\right\rfloor-1]$,则

$N^+(T_{k+3})$

$=N^+([\left\lfloor\frac{14m+t}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{56m+4t}{7}\right\rfloor-1])$

$=[4m+2t-3\left\lfloor\frac{4t}{7}\right\rfloor,7m+2t-3\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor-4]$

$=S_{k+3}\subseteq V_{nc}$

由引理1,得出 $T_{k+3}\subseteq V_{nc}$。

合并 $T_k\subseteq V_{nc}$, $T_{k+1}\subseteq V_{nc}$, $T_{k+2}\subseteq V_{nc}$, $T_{k+3}\subseteq V_{nc}$,即 $[\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{4n}{7}\right\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$,结合 $F_{11}\cup F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$,相应地 $[0,\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor-1]\cup[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$。

因为

$\left\lfloor\frac{2t}{7}\right\rfloor\geqslant\frac{2t}{7}-\frac{6}{7}$

$3\left\lfloor\frac{2t}{7}\right\rfloor\geqslant\frac{6t}{7}-3$

$t+3-\frac{6t}{7}\geqslant t-3\left\lfloor\frac{2t}{7}\right\rfloor$

$\frac{t}{7}\geqslant t-3\left\lfloor\frac{2t}{7}\right\rfloor-3$

$2m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1\geqslant 2m+t-3\left\lfloor\frac{2t}{7}\right\rfloor-4$

由此可得

$N^+([\left\lfloor\frac{28m+2t}{7}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{14m+t}{2}\right\rfloor-1])$

$\subseteq[7m+\left\lfloor\frac{t}{2}\right\rfloor,14m+t-1]\cup[0,\left\lfloor\frac{14m+t}{7}\right\rfloor-1]$

$=T_{k+3}\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup F_{11}\subseteq V_{nc}$

由引理1,可得 $[\left\lfloor\frac{28m+2t}{7}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{14m+t}{2}\right\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$。

由以上证明可知

$[0,\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor-1]\cup[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor]\cup[\left\lfloor\frac{2n}{7}\right\rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$

(3)选择子集

$[\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1]\cup[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{2n}{7}\right\rfloor-1]\subseteq V_r$,接下来证明 $[\left\lfloor\frac{n}{7}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-1]\cup[\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{2n}{7}\right\rfloor-1]\subseteq V_{nc}$。

令 $n=28m+t(0\leqslant t\leqslant 27)$,于是得到

$F_{11}\cup F_2\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8$

$=[0,4m+\left\lfloor\frac{t}{7}\right\rfloor-1]\cup[7m+\left\lfloor\frac{t}{4}\right\rfloor,7m+\left\lfloor\frac{t}{4}\right\rfloor]\cup[8m+\left\lfloor\frac{2t}{7}\right\rfloor,28+t-1]$

$\subseteq V_{nc}$

令 $k=\frac{1}{2}\log_3\frac{28m-14+t}{3^2(4354+21t)}$，对于 $l=0,1,2\cdots,k$，定义

$S_l=[\lfloor 4m+\frac{t}{7}\rfloor,\lfloor(7-\frac{t}{3^{2l+1}})m+(\frac{1}{4}-\frac{1}{28\times3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rfloor-1]$

$T_l=[\lceil(7+\frac{1}{3^{2l+2}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2l+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+2}})\rceil,\lfloor 8m+\frac{2t}{7}\rfloor-1]$

因此，$S_0\subset S_1\subset S_2\subset\cdots\subset S_l\cdots\subset S_k$，$T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_l\cdots\subset T_k$。

考虑到 S_l 和 T_l 的外邻顶点集，可以得出

$N^+(S_0)$

$=N^+([\lfloor 4m+\frac{t}{7}\rfloor-3,\lfloor(7-\frac{t}{3^1})m+(\frac{1}{4}-\frac{1}{28\times3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rfloor-1])$

$\subseteq[\lfloor 8m+\frac{2t}{7}\rfloor+1,28m+t-1]$

$=F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8$

$N^+(T_0)$

$=N^+([\lceil(7+\frac{1}{3^2})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^2})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^2})\rceil,\lfloor 8m+\frac{2t}{7}\rfloor])$

$\subseteq[\lfloor 4m+\frac{t}{7}\rfloor-3,\lfloor(7-\frac{1}{3^1})m+(\frac{1}{4}-\frac{1}{28\times3^1})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^1})\rfloor-1]$

$=S_0$

按这种方式继续下去，对于 $l=1,2\cdots,k$，得出

$N^+(S_l)$

$=N^+([\lfloor 4m+\frac{t}{7}\rfloor,\lfloor(7-\frac{t}{3^{2l+1}})m+(\frac{1}{4}-\frac{1}{28\times3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rfloor-1])$

$\subseteq[\lceil(7+\frac{1}{3^{2l}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2l}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l}})\rceil,28m+t-1]$

$=T_{l-1}\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8$

$N^+(T_l)$

$=N^+([\lceil(7+\frac{1}{3^{2l+2}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2l+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+2}})\rceil,\lfloor 8m+\frac{2t}{7}\rfloor-1])$

$\subseteq[\lfloor 4m+\frac{t}{7}\rfloor,\lfloor(7-\frac{1}{3^{2l+1}})m+(\frac{1}{4}-\frac{1}{28\times3^{2l+1}})t-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2l+1}})\rfloor-1]$

$=S_l$

也就是 $N^+(S_l)\subseteq T_{l-1}\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8$，$N^+(T_l)\subseteq S_l$。

因为 $N^+(S_0)\subseteq F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8$ 和 $F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$，即 $N^+(S_0)\subseteq V_{nc}$，由引理 1，得出$S_0\subseteq V_{nc}$。与此同时，$N^+(T_0)\subseteq S_0\subseteq V_{nc}$，由引理 1，得出 $T_0\subseteq V_{nc}$。所以，根据引理 1，能一步步推导出如下结论：

$N^+(S_1)\subseteq F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup T_0\subseteq V_{nc}$，

i.e.，$S_1\subseteq V_{nc}$，$N^+(T_1)\subseteq S_1\subseteq V_{nc}$，i.e.，$T_1\subseteq V_{nc}$；

$N^+(S_2)\subseteq F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup T_1\subseteq V_{nc}$，

i.e.，$S_2\subseteq V_{nc}$，$N^+(T_2)\subseteq S_2\subseteq V_{nc}$，i.e.，$T_2\subseteq V_{nc}$；

……

$N^+(S_k)\subseteq F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\cup T_{k-1}\subseteq V_{nc}$，

i.e.，$S_k\subseteq V_{nc}$，$N^+(T_k)\subseteq S_k\subseteq V_{nc}$，i.e.，$T_k\subseteq V_{nc}$；

因此，$S_0\cup S_1\cup S_2\cdots\cup S_k\subset V_{nc}$，$T_0\cup T_1\cup T_2\cdots\cup T_k\subset V_{nc}$。

令 $S_{k+1}=[4m+\lfloor\frac{t}{7}\rfloor-3,7m+61t-243\lfloor\frac{t}{4}\rfloor-244]$，则

$N^+(S_{k+1})$

$=N^+([4m+\lfloor\frac{t}{7}\rfloor-3,7m+61t-243\lfloor\frac{t}{4}\rfloor-244])$

$=[7m-182t+729\lfloor\frac{t}{4}\rfloor+729,16m+t-3\lfloor\frac{t}{7}\rfloor+8]$

因为 $k=\frac{1}{2}\log_3\frac{28m+t-14}{3^2(4354+21t)}$，能一步步推导出如下结果：

$\log_3\frac{28m+t-14}{4354+21t}\leqslant 2k+2$

$28m+t-14\leqslant(4354+21t)\times3^{2k+2}$

$28m+t+14\times3^{2k+2}-14\leqslant 4368\times3^{2k+2}+21\times3^{2k+2}t$

$\frac{m}{3^{2k+2}}+\frac{t}{28\times3^{2k+2}}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\leqslant 156+\frac{3t}{4}$

$(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\leqslant 7m+t+156$

$\lceil(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rceil\leqslant 7m+t+156$

$\lfloor\frac{t}{4}\rfloor\geqslant\frac{t}{4}-\frac{3}{4}$

$729\lfloor\frac{t}{4}\rfloor\geqslant 182t+\frac{t}{4}-546\frac{3}{4}$

$729+729\lfloor\frac{t}{4}-182t\rfloor\geqslant t+156$

$7m+729+729\lfloor\frac{t}{4}-182t\rfloor\geqslant 7m+t+156$

$7m+729+729\lfloor\frac{t}{4}-182t\rfloor\geqslant\lceil(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rceil$

由此可得

$[7m-182t+729\lfloor\frac{t}{4}\rfloor+729,16m+t-3\lfloor\frac{t}{7}\rfloor+8]$

$\subseteq[\lceil(7+\frac{1}{3^{2k+2}})m+(\frac{1}{4}+\frac{1}{28\times3^{2k+2}})t+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^{2k+2}})\rceil,28m+t-1]$

$=T_k\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8$

因此，$N^+(S_{k+1})\subseteq T_k\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$，由引理 1，得出 $S_{k+1}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+1}=[7m-20t+81\lfloor\frac{t}{4}\rfloor+81,\lfloor\frac{56m+2t}{7}\rfloor]$，则

$N^+(T_{k+1})$

$=N^+([7m-20t+81\lfloor\frac{t}{4}\rfloor+81,\lfloor\frac{56m+2t}{7}\rfloor])$

$\subseteq[4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+61t-243\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-244]$

$=S_{k+1}\subseteq V_{nc}$

由引理 1,可以得出 $T_{k+1}\subseteq V_{nc}$。

令 $S_{k+2}=[4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+7t-27\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-28]$,则

$N^+(S_{k+2})$

$=N^+([4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+7t-27\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-28])$

$\subseteq[7m-20t+81\lfloor \frac{t}{4} \rfloor+81,28m+t-1]$

$=T_{k+1}\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$

由引理 1,可以得出 $S_{k+2}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+2}=[7m-2t+9\lfloor \frac{t}{4} \rfloor+9,\lfloor \frac{56m+2t}{7} \rfloor]$,则

$N^+(T_{k+2})$

$=N^+([7m-2t+9\lfloor \frac{t}{4} \rfloor+9,\lfloor \frac{56m+2t}{7} \rfloor])$

$\subseteq[4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+7t-27\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-28]$

$=S_{k+2}\subseteq V_{nc}$

由引理 1,得出 $T_{k+2}\subseteq V_{nc}$。

令 $S_{k+3}=[4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+t-3\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-4]$,则

$N^+(S_{k+3})$

$=N^+([4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+t-3\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-4])$

$\subseteq[7m-2t+9\lfloor \frac{t}{4} \rfloor+9,28m+t-1]$

$=T_{k+2}\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$

由引理 1,可以得出 $S_{k+3}\subseteq V_{nc}$。

令 $T_{k+3}=[\lfloor \frac{28m+t}{4} \rfloor+1,\lfloor \frac{56m+2t}{7} \rfloor]$,则

$N^+(T_{k+3})$

$=N^+([\lfloor \frac{28m+t}{4} \rfloor+1,\lfloor \frac{56m+2t}{7} \rfloor])$

$\subseteq[4m+\lfloor \frac{t}{7} \rfloor-3,7m+t-3\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-4]$

$=S_{k+3}\subseteq V_{nc}$

由引理 1,可以得出 $T_{k+3}\subseteq V_{nc}$。

合并 $T_k\subseteq V_{nc}$, $T_{k+1}\subseteq V_{nc}$, $T_{k+2}\subseteq V_{nc}$, $T_{k+3}\subseteq V_{nc}$,即 $[\lfloor \frac{n}{4} \rfloor+1,\lfloor \frac{2n}{7} \rfloor]\subseteq V_{nc}$,结合 $F_{11}\cup F_2\cup F_{32}\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$,相应地,$[0,\lfloor \frac{n}{7} \rfloor-1]\cup[\lfloor \frac{n}{4} \rfloor,n-1]\subseteq V_{nc}$。

因为

$7m+\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-(7m-2t+9\lfloor \frac{t}{4} \rfloor+11)$

$=2t-8\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-11,(t=4m_4+t_4,t_4\geqslant 0\cap t_4\leqslant 3)$

$=8m_4+2t_4-8m_4-8\lfloor \frac{t_4}{4} \rfloor-11\leqslant 0$

因此得到 $7m+\lfloor \frac{t}{4} \rfloor\leqslant 7m-2t+9\lfloor \frac{t}{4} \rfloor+11$。

令 $S_{k+4}=[7m+t-3\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-4,\lfloor \frac{28m+t}{4} \rfloor-1]$,则

$N^+(S_{k+4})$

$=N^+([7m+t-3\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-4,\lfloor \frac{28m+t}{4} \rfloor-1])$

$\subseteq[7m+\lfloor \frac{t}{4} \rfloor,14m+\lfloor \frac{t}{2} \rfloor-1]$

$=F_2\cup F_3\subseteq V_{nc}$

由引理 1,得出 $[7m+t-3\lfloor \frac{t}{4} \rfloor-4,\lfloor \frac{28m+t}{4} \rfloor-1]\subseteq V_{nc}$。

合并 $S_k\subseteq V_{nc}$, $S_{k+1}\subseteq V_{nc}$, $S_{k+2}\subseteq V_{nc}$, $S_{k+3}\subseteq V_{nc}$, $S_{k+4}\subseteq V_{nc}$,即 $[\lfloor \frac{n}{7} \rfloor-3,\lfloor \frac{n}{4} \rfloor-1]\subseteq V_{nc}$,结合 $F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4\cup F_5\cup F_6\cup F_7\cup F_8\subseteq V_{nc}$,相应地,$[0,n-1]\subseteq V_{nc}$。

4 GK(3,n)的反馈数的上界

令 $f(d,n)$ 表示 $GK(d,n)$ 中所有反馈点集的最小基数。由引理 2,得到 $GK(3,n)$ 反馈数的上界如下。

定理 1 $GK(3,n)$ 的最小反馈点集的大小是

$$f(3,n)\leqslant n+\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor-\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor-\lfloor \frac{4n}{7} \rfloor+3$$

证明:因为 $V_d=F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_8$

$F_2=|[\lfloor \frac{n}{4} \rfloor,\lfloor \frac{n}{4} \rfloor]|=1, F_4=|[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]|=1$

$F_6=|[\lfloor \frac{4n}{7} \rfloor,\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor]|=\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor-\lfloor \frac{4n}{7} \rfloor+1$

$F_8=|[\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor,n-1]|=n-\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$

因此

$f(3,n)\leqslant|V_d|$

$=|F_2\cup F_4\cup F_6\cup F_8|$

$=|F_2|+|F_4|+|F_6|+|F_8|$

$=1+1+\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor-\lfloor \frac{4n}{7} \rfloor+1+n-\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$

$=n+\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor-\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor-\lfloor \frac{4n}{7} \rfloor+3$

结束语 本文通过计算机构造和数学推理证明相结合的方法,针对广义 Kautz 有向图 $GK(3,n)$ 的反馈数问题进行了研究。

关于广义 Kautz 有向图 $GK(3,n)$,本文给出并证明了其反馈数的上界为:$f(3,n)\leqslant n+\lfloor \frac{5n}{8} \rfloor-\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor-\lfloor \frac{4n}{7} \rfloor+3$。

参 考 文 献

[1] Xu Xi-rong, Wang Bao-cai, Yang Yuan-sheng. Feedback Number of (n,k)-Star Graphs[J]. Utilitas Mathematica, 2014, 95: 51-63

[2] Garey M R, Johnson D S. Computers and Intractability [M]. Freeman, San Francisco, CA, 1979

[3] Kautz W H. Design of optimal interconnection networks for multiprocessors[J]. Architecture and Design of Digital Computers, Nato Advanced Summer Institute, 1969: 249-272

[4] Kralovivc R, Rvuzivcka P. Minimum feedback vertex sets in shuffle-based interconnection networks[J]. Information Processing Letters, 2003, 86: 191-196

[5] Xu Jun-ming, Wu Ye-zhou, Huang Jia. Feedback Number of Kautz Digraphs[J]. Discrete Math, 2007, 307(13): 1589-1599

[6] Xu Xi-rong, Cao Yong-chang, Xu Jun-ming, et al. Feedback Numbers of De Bruijn Digraphs[J]. Computer and Mathematics with Applications, 2010, 59: 716-723

[7] Xu Xi-rong, Xu Jun-ming, Cao Yong-chang. Bounds on Feedback

Numbers of De Bruijn Graphs[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2011, 15: 1101-1113

[8] Xu Xi-rong, Yang Yuan-sheng, Ming Di. Feedback Vertex Set of Generalized De Bruijn Digraphs $GB(d,n)$[J]. Utilitas Math, 2009, 79: 107-124

[9] Xu Xi-rong, Yin Chun, Zhang Si-jia, et al. Improved Feedback Vertex Sets in Kautz Digraphs $K(d,n)$ [C]// International Conference on Computational Intelligence and Security. Kunming, China, 2014, IEEE, 2014: 161-165

[10] Wang Lei, Xu Xi-rong, Yang Yuan-sheng, et al. Feedback Number of Generalized Kautz Digraphs $GK(2,n)$[J]. Ars Combinatoria, 2014, 116: 147-160

(上接第 12 页)

[17] Mohanram K, Touba N A. Cost-Effective Approach for Reducing Soft Error Failure Rate in Logic Circuits[C]// International Test Conference. Charlotte, NC, USA, 2003: 893-901

[18] Nieuwland A K, Jasarevic S, Jerin G. Combinational logic soft error analysis and protection[C]// The 12th IEEE Int'l On-line Testing Symposium. Lake of Como, Italy, 2006: 99-104

[19] Sub K J, Nicopoulos C, Vijakrishnan N, et al. A probabilistic model for soft-error rate estimation in combinational logic[C]// Proc. of the 1st Int Workshop on Probabilistic Analysis Techniques for Real Time and Embedded Systems. Italy, 2004: 25-31

[20] Asadi G, Tahoori M B. An analytical approach for soft error rate estimation in digital circuits[C]// IEEE Int Symp on Circuits and Systems. Kobe, 2005: 2991-2994

[21] Krishnaswamy S, Viamontes G F, Markov I L, et al. Accurate reliability evaluation and enhancement via probabilistic transfer matrices[C]// Proc of the Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition. Orlando, 2005: 282-287

[22] Wang Zhen, Jiang Jian-hui, Yang Guang. Implementation and analysis of probabilistic methods for gate-level circuit reliability estimation[J]. Tsinghua Science and Technology, 2007, 12(S1): 32-38

[23] Abdollahi A. Probabilistic decision diagrams for exact probabilistic analysis[C]// Proc. Int'l Conference on Computer Aided Design. San Jose, CA, 2007: 266-272

[24] Wang Zhen, Jiang Jian-hui. A serial method of circuit reliability calculation based on probabilistic transfer matrix[J]. Chinese Journal of Electronics, 2009, 37(2): 241-247(in Chinese)
王真,江建慧. 基于概率转移矩阵的串行电路可靠度计算方法[J]. 电子学报, 2009, 37(2): 241-247

[25] Xiao J, Jiang J, Zhu X, et al. A method of gate-level circuit reliability estimation based on iterative PTM model[C]// IEEE 17th Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing. Pasadena, USA, 2011: 276-277

[26] Asadi H, Tahoori M B. Soft error modeling and protection for sequential elements[C]// The 20th IEEE Int'l Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. Monterey, USA, 2005: 463-474

[27] Mohyuddin N, Pakbaznia E, Pedram M. Probabilistic error propagation in logic circuits using the boolean difference calculus[C]// 26th IEEE Int'l Conf. on Computer Design. Lake Tahoe, 2008: 7-13

[28] Han J, Chen H. Reliability evaluation of logic circuits using probabilistic gate models[J]. Microelectron Reliability, 2011, 51(2): 468-476

[29] Singh N S S, Hamid N H, et al. Evaluation of circuit reliability based on distribution of different signal input patterns[C]// 8th IEEE Int'l Colloquium on Signal Processing and its Applications. Malacca, 2012: 5-9

[30] Asadi H, Tahoori M B, Tirumurti C. Estimating error propagation probabilities with bounded variances[C]// 22nd IEEE Int'l Symp. on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. Rome, Italy, 2007: 41-49

[31] Zhu Xiao-wei, Baumann R, Pilch C, et al. Comparison of product failure rate to the component soft error rate in A muti-core digital signal processor[C]// IEEE 43rd Annual International Reliability Physics Symposium. New York, 2005: 209-214

[32] Sierawski B D, Mendenhall M H, Reed R A, et al. Muon-induced single event upsets in deep-submicron technology [J]. IEEE Trans. On Nuclear Science, 2010, 57(6): 3273-3278

[33] Sierawski B D, Reed R A, Marcus M H, et al. Effects of Scaling on Muon-Induced Soft Errors[C]// IEEE 49th Annual International Reliability Physics Symposium. Monterey, California, USA, 2011: 1-6

[34] Huang Hai-lin, Tang Zhi-min, Xu Tong. Fault Injection and Soft Error Sensitivity Characterization for Fault-Tolerant Godson-1 Processor[J]. Journal of Computer Research and Development, 2007, 43(10): 1820-1827(in Chinese)
黄海林,唐志敏,许彤. 龙芯 1 号处理器的故障注入方法与软错误敏感性分析[J]. 计算机研究与发展, 2007, 43(10): 1820-1827

[35] Gong Rui, Chen Wei, Liu Fang, et al. FT51: A Soft Error Tolerant High Reliable Micro Controller [J]. Chinese Journal of Computers, 2007, 30(10): 1662-1673(in Chinese)
龚锐,陈微,刘芳,等. FT51:一种容软错误高可靠微控制器[J]. 计算机学报, 2007, 30(10): 1662-1673

[36] Cristian C, Mike B, Chris W. Error Injection-based study of soft error propagation in AMD Bulldozer Microprocessor Module[C]// Proceeding of International Conference on Dependable Systems and Networks. Boston, MA, USA, 2012: 1-6

[37] Mukherjee S S, Weaver C, Emer J, et al. A Systematic Methodology to Compute the Architectural Vulnerability Factors for a High-Performance Microprocessor[C]// Proc. IEEE/ACM Int'l Symp. on Microarchitecture(MICRO-36). Westin Horton Plaza San Diego, CA, 2003: 29-40

[38] Li Xiao-dong, Adve S V, Bose P, et al. Online Estimation of Architecture Vulnerability Factor for Soft Errors[C]// Proc. of the 35th Int'l Symp on Conference of Computer Architecture (ISCA). Beijing, China, 2008: 341-352

[39] Mukherjee S S, Emer J, Reinhardt S K. The Soft Error Problem: An Architectural Perspective [C] // Proc. of the 11th Int'l Symp. on High-Performance Computer Architecture. San Francisco, 2005: 243-247

[40] Xu Xin, Li M L. Understanding soft error propatation using efficient vulnerability-driven fault injection[C]// Proceeding of International Conference on Dependable Systems and Networks. Boston, Massachusetts, USA, 2012: 1-12