

基于马尔科夫链理论的改进的最大 Lyapunov 指数混沌预测法

李修云¹ 陈 帅²

(重庆工程职业技术学院 重庆 402260)¹ (重庆大学自动化学院 重庆 400044)²

摘 要 针对很多文献都一直规避的基于最大 Lyapunov 指数的混沌预测会出现两个预测值的问题,引入马尔科夫链改进最大 Lyapunov 指数的混沌预测方法。改进的方法将时间序列的斜率作为状态变量,并根据马尔科夫链建立状态转移矩阵,判定预测值演化方向,进而根据混沌动力学系统的演化规律选择最优的预测值。最后利用渝武高速公路的交通流数据进行验证,结果表明了改进算法的可行性和有效性。

关键词 混沌,最大 Lyapunov 指数,马尔科夫链,预测

中图分类号 TP301.5 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.4.055

Improved Maximal Lyapunov Exponent Chaotic Forecasting Method Based on Markov Chain Theory

LI Xiu-yun¹ CHEN Shuai²

(Chongqing Vocational Institute of Engineering, Chongqing 402260, China)¹

(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)²

Abstract Forecasting of chaotic time series based on maximal Lyapunov exponent may bring two results, and few literatures have studied on it. The paper introduced Markov chain to improve it. The improved method makes the gradient of time series as state variables, builds the state transition matrix on the basis of Markov chain which will be used to verify the evolution direction of the forecasting results, and then chooses the best prediction value based on the evolution of dynamical chaotic systems. At last, the paper verified the improved forecast model using the traffic flow data of Yuwu Highway. The result shows that the improved maximal Lyapunov exponent forecasting method is valid and feasible.

Keywords Chaos, Maximal Lyapunov exponent, Markov chain, Forecasting

1 引言

混沌系统的一个重要特征就是初始状态的微小不确定性将会按指数发散规律迅速扩大,相空间中轨道的这种演化规律可以通过 Lyapunov 指数来刻画,若最大 Lyapunov 指数是正的,则可以认为系统具有混沌特性。Lyapunov 指数作为量化相空间中相点演化轨道的发散程度的估计量,是混沌系统的一个很好的预测参数^[1-6]。Wolf 等^[7]根据混沌时间序列重构相空间,提出根据最大 Lyapunov 指数进行预测的混沌时间预测方法。随后,很多文献建立了基于最大 Lyapunov 指数的混沌预测模型,并取得了较好的效果^[9,10]。

虽然最大 Lyapunov 指数能够很好地刻画混沌系统的特性,然而,根据最大 Lyapunov 指数进行预测时会出现两个预测值,这种情况给实际应用带来了很大的困扰,大部分文献针对这一问题都选择了规避,没有进一步地讨论和分析。本文针对这一问题,在分析相空间的相点演化特性的基础上,对如何选择预测值进行了分析和讨论。

$$\hat{x} = x(t_k + 1 + (m-1)\tau) \pm \sqrt{e^{2\lambda_1} \|X(M) - X(t_k)\|^2 - \sum_{i=1}^{m-1} (x(M+(i-1)\tau+1) - x(t_k+1+(i-1)\tau))^2} \quad (4)$$

根据式(4)计算得到的预测值有两个,这并不能满足实际预测的要求,因此下文针对这一问题,在分析相空间

2 最大 Lyapunov 指数的预测方法

设时间序列为 $x(t), t=1, 2, \dots, N$, 嵌入维数和时间延迟分别为 m 和 τ , 重构相空间为

$$X(t) = \{x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)\} \quad (1)$$

其中, $t=1, 2, \dots, M; M=N-(m-1)\tau$ 。

最大 Lyapunov 指数法是根据近邻点在若干个演化时间内会呈现出按指数发散的演化规律而提出的,其基本原理如下:

设 $X(M)$ 为中心点, $X(t_k)$ 为最近邻的点, 令 $X(M)$ 与 $X(t_k)$ 的欧氏距离为 d , 则

$$d = \|X(M) - X(t_k)\| \quad (2)$$

设 λ_1 为系统最大 Lyapunov 指数, 其中, $X(M+1)$ 和 $X(t_k+1)$ 是 $X(M)$ 和 $X(t_k)$ 进一步发散演化的结果, 则

$$e^{\lambda_1} = \frac{\|X(M+1) - X(t_k+1)\|}{\|X(M) - X(t_k)\|} \quad (3)$$

则最大 Lyapunov 指数预测算法的预测值 \hat{x} 为:

的相点演化特性的基础上,对如何选择预测值进行分析和讨论。

到稿日期:2015-11-10 返修日期:2016-01-09 本文受重庆市教委自然科学基金项目(KJ1403209)资助。

李修云(1968-),男,硕士,副教授,高工,主要研究方向为电子信息、智能交通、智能算法, E-mail: 973736111@qq.com; 陈 帅(1987-),男,硕士,主要研究方向为电子信息、控制科学与工程, E-mail: 707081987@qq.com。

3 改进的算法

3.1 问题分析

混沌系统相空间中的相点在进行演化时具有短期的规律性,其在某一平面的投影曲线在短期内是平滑的,因此,其相邻几点之间的斜率具有相关性,即 $x(N+1)$ 、 $x(N)$ 的斜率和 $x(N)$ 、 $x(N-1)$ 的斜率大致保持一致,至少斜率的正负性是一致的,但是随着相点距离的增加,其相关性会越来越弱。下面以 Lorenz 系统为例对相点在 $y-z$ 平面的投影曲线进行分析。采用的 Lorenz 系统如式(5)所示,并以 $x_0=0.1$ 、 $y_0=0.1$ 、 $z_0=0.1$ 作为初始值。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=10(y-x) \\ \frac{dy}{dt}=28x-y-xz \\ \frac{dz}{dt}=xy-\frac{8}{3}z \end{cases} \quad (5)$$

对于 $y-z$ 平面的变量 x 投影曲线,截取变量 x 的一段演化序列,如图 1 所示。

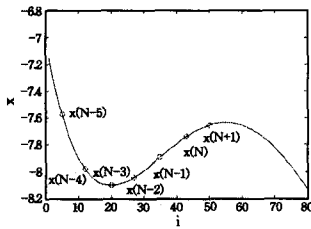


图 1 变量 x 投影曲线

设 $x(N-5)$ 、 $x(N-4)$ 、 $x(N-3)$ 、 $x(N-2)$ 、 $x(N-1)$ 、 $x(N)$ 为已知实际值, $x(N+1)$ 为要预测的值。由图 1 可知, $x(N+1)$ 到 $x(N)$ 的斜率和 $x(N)$ 到 $x(N-1)$ 的斜率几乎相等,正负保持一致;但是, $x(N+1)$ 到 $x(N)$ 的斜率和 $x(N-$

$$D = \sqrt{e^{2\lambda_1} \|X(M) - X(t_k)\|^2 - \sum_{i=1}^{m-1} (x(M+(i-1)\tau+1) - x(t_k+1+(i-1)\tau))^2}$$

设 k_0 为点 $x(N+1)$ 、 $x(N)$ 的斜率, k_1 为点 $x(N)$ 、 $x(N-1)$ 的斜率,引入马尔科夫链的基本思想来解决如何确定 $x(N+1)$ 演化方向的问题。

本文以 $x(N)$ 、 $x(N-1)$ 的斜率 k_1 作为 $x(N+1)$ 、 $x(N)$ 的斜率 k_0 为正负取值的状态变量,即式(8)中正负号取舍的状态变量,一步状态转移矩阵形式为:

$$P(k_0 | k_1) = \begin{bmatrix} P(k_0 > 0 | k_1 > 0) & P(k_0 > 0 | k_1 < 0) \\ P(k_0 < 0 | k_1 > 0) & P(k_0 < 0 | k_1 < 0) \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $P(k_0 | k_1)$ 第一行为 $P(k_0 > 0)$ 的状态转移矩阵,第二行为 $P(k_0 < 0)$ 的状态转移矩阵; $P(k_0 > 0 | k_1 > 0)$ 为当 $k_1 > 0$ 时 $k_0 > 0$ 的概率,状态转移矩阵中的其他元素的意义类似。 k_0 和 k_1 取值的概率关系如表 1 所列。

表 1 k_0 和 k_1 取值的概率关系

| $P(k_0 k_1)$ | $P(k_0 > 0 k_1)$ | $P(k_0 < 0 k_1)$ |
|----------------|--------------------|--------------------|
| $k_1 > 0$ | P_1 | $1 - P_1$ |
| $k_1 < 0$ | P_2 | $1 - P_2$ |

设

$$P(k_1) = [P(k_1 > 0) \quad P(k_1 < 0)]^T \quad (10)$$

其中, $P(k_0 > 0)$ 、 $P(k_0 < 0)$ 已知。

将式(9)和式(10)代入 $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ 得,

3) 到 $x(N-4)$ 的斜率是相反的。通过以上分析,可以佐证 $x(N+1)$ 到 $x(N)$ 的斜率与离它们较近的点的斜率具有较强相关性的结论。

这种根据当前参考点的斜率正负判断预测值的过程是一种马尔科夫过程,因此本文引入马尔科夫链来对最大 Lyapunov 指数的预测算法进行改进和完善。考虑到混沌相点轨道演化的发散性,选择过多的参考点会造成斜率的不确定性,所以最好只考虑最近邻的两个点的斜率。

3.2 马尔科夫链

马尔科夫链^[1]是安德烈·马尔科夫(A. A. Markow, 1856—1922)提出的一个离散随机过程,其基本思想是该过程的未来演化规律与先前的状态无关,只与当前的状态有关。

马尔科夫过程定义如下:

设 $\{X(t), t \in T\}$ 的状态空间为 S , 如果对于任意的 $n \geq 2$, 任意的 $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$, 在条件 $X(t_i) = x_i, x_i \in S (i=1, 2, \dots, n-1)$ 的条件下, $X(t_n)$ 的条件分布函数恰好等于在条件 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 下的条件分布函数, 即

$$\begin{aligned} P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \\ = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为马尔科夫过程。

时间和状态都离散的马尔科夫过程称为马尔科夫链, 简记为 $X(n), n=1, 2, 3, \dots$ 。综上所述, 如果一个序列具有马尔科夫性质, 那么其未来取值 $X(n+1)$ 和过去取值的关系如式(7)所示:

$$\begin{aligned} P(X(n+1) = x | X(1), X(2), \dots, X(n)) \\ = P(X(n+1) = x | X(n)) \end{aligned} \quad (7)$$

3.3 改进算法的原理

将式(4)进行简化得 $x(N+1)$ 的预测值为

$$\hat{x}(N+1) = \hat{x} = x(k) \pm D \quad (8)$$

其中, $x(k) = x(t_k + 1 + (m-1)\tau)$,

$$\begin{aligned} P(k_0) &= P(k_0 | k_1) * P(k_1) \\ &= \begin{bmatrix} P(k_0 > 0 | k_1 > 0) & P(k_0 > 0 | k_1 < 0) \\ P(k_0 < 0 | k_1 > 0) & P(k_0 < 0 | k_1 < 0) \end{bmatrix} * \\ & \quad [P(k_1 > 0) \quad P(k_1 < 0)]^T \\ &= \begin{bmatrix} P(k_0 > 0 | k_1 > 0) * P(k_1 > 0) + P(k_0 > 0 | k_1 < 0) * P(k_1 < 0) \\ P(k_0 < 0 | k_1 > 0) * P(k_1 > 0) + P(k_0 < 0 | k_1 < 0) * P(k_1 < 0) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $P(k_0)$ 为一个二维的变量, 第一个变量为 $k_0 > 0$ 的概率, 第二个变量为 $k_0 < 0$ 的概率, 所以可以根据 $P(k_0)$ 来决定混沌系统中相点在相空间中的演化方向。

以图 1 为例, 将 $x(N-5)$ 、 $x(N-4)$ 、 $x(N-3)$ 、 $x(N-2)$ 、 $x(N-1)$ 、 $x(N)$ 作为已知实际值, $x(N+1)$ 为要预测的值。此时 $P(k_0 > 0 | k_1 > 0) = 1$, $P(k_0 > 0 | k_1 < 0) = 0$, $P(k_0 < 0 | k_1 < 0) = 1$, $P(k_0 < 0 | k_1 > 0) = 0$, 将它们代入式(11)得 $P(k_0) = [1 \quad 0]$, 确定了预测变量的演化方向:

$$x(N+1) > x(N) \quad (12)$$

根据式(8)可知, 若要确定 $x(N+1)$, 还须先判断 $x(N)$ 、 D 和 $x(k)$ 三者之间的关系。当 $x(N) \geq x(k)$ 时, 由式(12)可推出预测值 $x(N+1)$ 为 $x(k) + D$, 如图 2 所示。

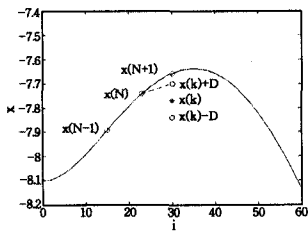


图2 $x(N) \geq x(k)$ 时的预测值演化图

当 $x(N) < x(k)$, $x(k) - D < x(N)$ 时, 由式(12)可推出预测值 $x(N+1)$ 为 $x(k) + D$, 如图3所示。

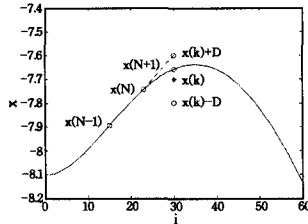


图3 $x(N) < x(k)$ 且 $x(k) - D < x(N)$ 时的预测值演化图

当 $x(N) < x(k)$, $x(k) - D \geq x(N)$ 时, 依据式(12)可知 $x(k) + D$ 和 $x(k) - D$ 都可能是预测值, 为了减少误差, 以 $x(k) + D$ 和 $x(k) - D$ 到点 $x(N)$ 的两个斜率中与 $x(N)$, $x(N-1)$ 的斜率 k_1 最接近的原则来确定预测值, 如图4所示。

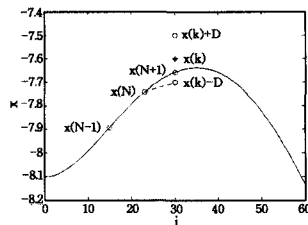


图4 $x(N) < x(k)$ 且 $x(k) - D \geq x(N)$ 时的预测值演化图

同理可以推导计算在 $x(N-2)$ 、 $x(N-1)$ 、 $x(N)$ 的斜率为负值时的基于最大 Lyapunov 指数法的预测值。

综上所述, 本文改进的最大 Lyapunov 指数预测算法的主要原理就是以混沌系统相空间中相点演化规律为基础, 引入马尔科夫链来确定预测值的发散方向, 并根据 $x(N)$ 、 $x(k)$ 、 D 之间的关系对预测值进行推导计算。

3.4 建立预测模型

利用上述改进的预测算法建立的预测模型的算法流程如下:

(1) 选定高速公路交通流量时间序列, 主要是确定时间序列的长度, 时间序列长度的确定至关重要, 因为时间序列长度太长容易引入噪声, 会稀释当前一段时间内的序列的混沌特性, 时间序列长度太短又不能充分反映出时间序列的混沌特性。

(2) 时间序列去噪处理。

(3) 确定嵌入维数 m 和时间延迟 τ 。

(4) 对时间序列进行相空间重构: $X(t) = \{x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)\}$, 其中 $t=1, 2, \dots, M; M=N-(m-1)\tau$ 。

(5) 计算最大 Lyapunov 指数 λ_1 。

(6) 寻找 $X(M)$ 的最近邻点 $X(t_0)$, 计算欧氏距离 $d = \|X(M) - X(t_0)\|$ 作为预测值的参数变量。

(7) 根据预测值公式(4)计算预测值 $\hat{x}(t+1)$ 。

(8) 计算 $x(t)$ 、 $x(t-1)$ 的斜率。

(9) 基于马尔科夫链基本理论对预测值 $\hat{x}(t+1)$ 进行取舍, 获得唯一预测值。

(10) 等待序列更新, 进行下次预测。

(11) 判断是否连续进行了 L_0 次预测, 如果否, 则 $L=L+1$, 并用原来计算的嵌入维数 m 和时间延迟 τ 重构相空间 $X(t)$, 并进行预测; 如果是, 则根据 C-C 算法重新计算序列的嵌入维数 m 和时间延迟 τ , 重构相空间 $X(t)$, 继续进行预测。

4 实例验证

本文以渝武高速公路的交通流信息作为实验数据对改进的算法进行验证。本文将按照建立的基于单参数的高速公路交通流量短时预测模型分别对渝武高速公路西山坪检测器的流量进行 5min 和 15min 的预测。

实验1 以渝武高速公路西山坪检测器的流量数据作为样本数据, 以 2014 年 3 月 1 日—2014 年 3 月 6 日的流量数据作为选定的时间序列, 以 2014 年 3 月 7 日的流量数据作为预测数据, 预测时长 $T=5\text{min}$, 其预测结果及其绝对相对误差如图 5 和图 6 所示。

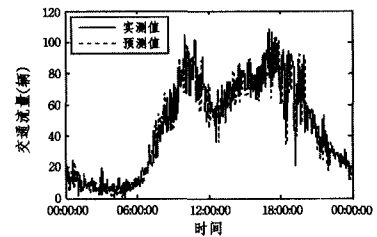


图5 预测时长 $T=5\text{min}$, 改进预测算法的预测结果

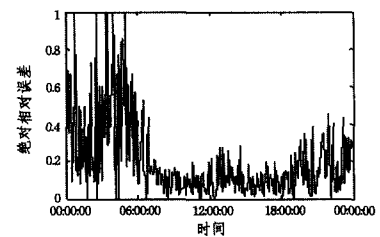


图6 预测时长 $T=5\text{min}$, 改进预测算法的绝对相对误差

实验2 以渝武高速公路西山坪检测器的流量数据作为样本数据, 以 2014 年 3 月 1 日—2014 年 3 月 6 日的流量数据作为选定的时间序列, 以 2014 年 3 月 7 日的流量数据作为预测数据, 预测时长 $T=15\text{min}$, 其预测结果及其绝对相对误差如图 7 和图 8 所示。

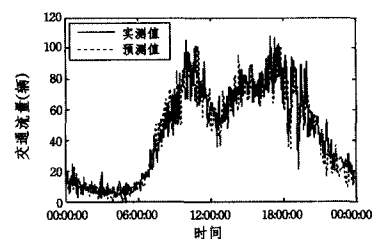


图7 预测时长 $T=15\text{min}$, 改进预测算法的预测结果

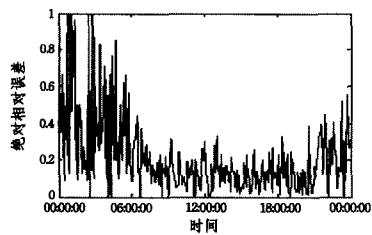


图8 预测时长 $T=15\text{min}$,改进预测算法的绝对相对误差

由图5和图6可知,基于改进的混沌预测算法对高速公路交通流量进行的5min预测具有较好的预测效果,其在早上8:00到晚上8:00的绝对相对误差较小,其他时间段的误差较大,这是由于该时间段的交通流量较小,使得其绝对相对误差较大。由图7和图8能够得到相似的结论。实验1、实验2的两种模型的预测误差指标如表2所列。

表2 基于不同预测时长的预测模型的误差指标对比

| 评价指标 | 预测时长 | |
|-----------------|--------|--------|
| | 5min | 15min |
| 平均绝对误差 (MAE) | 6.807 | 7.307 |
| 平均绝对相对误差 (MAPE) | 29.1% | 35.1% |
| 均方根误差 (RMSE) | 12.386 | 14.386 |

从表2可以看出,本文改进的最大Lyapunov指数预测算法在5min和15min时长的预测效果均良好,但是5min的预测精度要比15min预测精度高,一方面是由于随着预测步长的增加,交通流的混沌特性的演化规律性会降低;另一方面是由于随着预测步长的增加,会引入较多的序列噪声,进而降低预测精度。然而,这两种预测步长都能够满足高速公路交通流量短时预测的需求,表明了基于马尔科夫链的改进的最大Lyapunov指数预测算法的可行性和有效性。

结束语 本文通过引入马尔科夫链理论改进了最大Lyapunov指数的混沌预测算法,验证结果表明了改进算法的可行性和有效性,但是本文为了减少因引入过多近邻点而可能会增加的噪声和数据冗余,只选择了预测值前一个近邻点作为状态向量的计算参数,将来可以在尽量降低噪声和数据冗余的前提下,研究利用多个近邻点预测相点的演化方向。

参考文献

[1] Luo Yi. Analysis and Prediction on the Chaotic Property of Traffic Flow Time Series [J]. Journal of Jishou University (Natural Science Edition), 2013, 34(5): 60-65 (in Chinese)
罗轶. 交通流的混沌特性分析及其预测[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2013, 34(5): 60-65

[2] Zhang Chun-tao, Ma Qian-li, Peng Hong, et al. Multivariate chaotic

time series phase space reconstruction based on extending dimension by conditional entropy [J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(2): 112-119 (in Chinese)

张春涛, 马千里, 彭宏, 等. 基于条件熵扩维的多变量混沌时间序列相空间重构[J]. 物理学报, 2011, 60(2): 112-119

[3] Gao Guang-yong, Jiang Guo-ping. Prediction of multivariable chaotic time series using optimized extreme learning machine [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 62(4): 040506 (in Chinese)
高光勇, 蒋国平. 采用优化极限学习机的多变量混沌时间序列预测[J]. 物理学报, 2012, 62(4): 040506

[4] Zhang Yong, Guan Wei. Prediction of multivariable chaotic time series based on maximal Lyapunov exponent [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(2): 756-763 (in Chinese)
张勇, 关伟. 基于最大Lyapunov指数的多变量混沌时间预测模型[J]. 物理学报, 2009, 58(2): 756-763

[5] Chen Keng, Han Bo-tang. A Survey of State Space Reconstruction of Chaotic Time Series Analysis [J]. Computer Science, 2005, 32(4): 67-70 (in Chinese)
陈铿, 韩伯棠. 混沌时间序列分析中的相空间重构技术综述[J]. 计算机科学, 2005, 32(4): 67-70

[6] Han Min. Prediction Theory and Method of chaotic time series [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2007: 50-51 (in Chinese)
韩敏. 混沌时间序列预测理论与方法[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007: 50-51

[7] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining lyapunov exponents from time series [J]. Physica D, 1985, 16(2): 285-371

[8] Li Ying, Liu Bao, Ma Shou-feng. The identification of chaos in traffic flow using surrogate-data technique [J]. Systems Engineering, 2000, 18(6): 54-58 (in Chinese)
李英, 刘豹, 马寿峰. 交通流时间序列中混沌特性判定的替代数据方法[J]. 系统工程, 2000, 18(6): 54-58

[9] Chen Shu-yan, Wang Wei. Chaos forecasting for traffic flow based on Lyapunov exponents [J]. China Civil Engineering Journal, 2004, 37(9): 96-99 (in Chinese)
陈淑燕, 王伟. 基于Lyapunov指数的交通量混沌预测方法[J]. 土木工程学报, 2004, 37(9): 96-99

[10] Tang Y S, Li J, Tian Y G, et al. Chaos forecast for traffic conflict flow [J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2005, 35(6): 646-648

[11] Kao E P C. 随机过程导论 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009: 60-62

[12] Zhang Yi, Tian Ai-kui, Han Shi-yuan. An Adaptive Chaotic Particle Swarm RBF Neural Network Optimization Algorithm [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2015, 29(11): 126-130 (in Chinese)
张义, 田爱奎, 韩士元. 一种自适应的混沌粒子群优化RBF神经网络算法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2015, 29(11): 126-130

(上接第246页)

[7] Smith B. Mereotopology: A theory of parts and boundaries [J]. Data and Knowledge Engineering, 1996, 20(3): 287-304

[8] Stell J G. Boolean connection algebras: A new approach to the region-connection calculus [J]. Artificial Intelligence, 2000, 122: 111-137

[9] Li S, Ying M, Li Y. On countable RCC models [J]. Fundamenta Informaticae, 2005, 65(4): 329-351

[10] Li S, Ying M. Generalized Region Connection Calculus [J]. Artificial Intelligence, 2004, 160(1/2): 1-34

[11] Liu W, Zhang X, Li S, et al. Reasoning about cardinal directions

between extended objects [J]. Artificial Intelligence, 2010, 174(12): 951-983

[12] Hawes N, Klenk M, Lockwood K, et al. Towards a Cognitive System that Can Recognize Spatial Regions Based on Context [C]// AAAI. 2012

[13] Kontchakov R, Pratt-Hartmann I, Zakharyashev M. Spatial reasoning with RCC8 and connectedness constraints in Euclidean spaces [J]. Artificial Intelligence, 2014, 217: 43-75

[14] Sabharwal C L, Leopold J L. Evolution of Region Connection Calculus to VRCC-3D+ [J]. New Mathematics and Natural Computation, 2014, 10(2): 103-141