

# 水波优化算法收敛性分析

张 蓓 郑宇军

(浙江工业大学计算机科学与技术学院 杭州 310023)

**摘要** 水波优化(Water Wave Optimization, WWO)算法是一种受浅水波现象启发的新兴进化算法,它通过模拟水波的传播、折射、碎浪等运动机制来在高维解空间中进行高效搜索。该算法已被证明在大量基准测试问题和工程实际问题中优于其它许多前沿的启发式优化算法。从理论上分析了 WWO 算法的收敛性条件。通过对目标问题和算法参数设置的简化,证明了 WWO 中任何个体在两种特殊情况下都是收敛的:(1)只执行传播操作;(2)只执行折射操作。这两种情况分别对应两种特殊的适应度变化状态。进行了数值仿真实验,验证了上述两种收敛性条件。

**关键词** 进化算法,水波优化算法,收敛性,传播,折射

**中图分类号** TP18 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.4.008

## Convergence Analysis of Water Wave Optimization Algorithm

ZHANG Bei ZHENG Yu-jun

(College of Computer Science & Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract** Taking inspiration from the phenomena of water waves for global optimization, water wave optimization (WWO) is a novel evolutionary algorithm which mimics wave motions including propagation, refraction and breaking for effectively searching in a high-dimensional solution space, which has shown promising performance advantage over a variety of state-of-the-art metaheuristic optimization methods on well-known benchmark problems and real-world engineering problems. The paper theoretically analyzed the convergence conditions of the WWO algorithm. By simplifying the target problem and the parameter setting of the algorithm, we demonstrated that in WWO any individual can guarantee the convergence in two special cases: 1) when only performing the propagation operation and 2) when only performing the refraction operation, which respectively happen under two special states of fitness changing. The paper also conducted numerical simulations for the two special cases respectively to validate the above convergence conditions.

**Keywords** Evolutionary algorithm, Water wave optimization algorithm, Convergence, Propagation, Refraction

进化算法(EAs)是一类受自然进化过程启发的随机搜索算法,它们能够有效求解传统精确算法无法解决的复杂优化问题,如高维非凸空间中的复杂非线性函数优化问题<sup>[1]</sup>。随着经典进化算法如遗传算法(GA)<sup>[2]</sup>、粒子群优化(PSO)<sup>[3]</sup>、蚁群优化(ACO)<sup>[4]</sup>等算法的提升空间日趋饱和,近年来涌现了一系列新兴的进化算法,如和声搜索(HS)<sup>[5]</sup>、杂草入侵优化(IWO)<sup>[6]</sup>、生物地理学优化(BBO)<sup>[7]</sup>、重力搜索算法(GSA)<sup>[8]</sup>等,这些算法大都具有独特的搜索机制,能够更好地平衡全局搜索与局部搜索,在很多复杂优化问题上的求解效率明显优于经典进化算法。由于性能表现优良,这些新兴进化算法吸引了众多研究者的关注,并在实际工程问题上不断取得丰硕的应用成果<sup>[9-11]</sup>。

水波优化(WWO)算法<sup>[12]</sup>是 Zheng 最新提出的一种进化算法,该算法以浅水波理论<sup>[13-15]</sup>为基础,通过模拟传播、折射、碎浪等水波运动方式在高维解空间中进行高效搜索。WWO 算法具有简单的算法框架、较少的控制参数,并采用小种群规模,因此实现简单,计算开销较小。在 CEC 2014 基准测试函数集<sup>[16]</sup>以及在一些实际优化问题上的计算结果表明,WWO

算法的总体性能明显优于包括 IWO、BBO、GSA 等在内的其它新兴进化算法。作为一种年轻的算法,WWO 在算法改进和工程应用方面具有广阔的发展前景<sup>[17,18]</sup>。

作为一种最新提出的进化算法,对 WWO 的收敛性进行分析具有重要的理论和现实意义。在对目标问题和算法参数设置进行简化的基础上,本文证明了两种特殊情况下 WWO 的收敛性,并通过数值仿真进行了验证。这为全面分析算法的收敛特性奠定了基础,并为算法的进一步改进提供了指导。

## 1 水波优化算法

WWO 算法是一种受浅水波理论启发的新兴进化算法,它通过模拟水波的运动来求解优化问题。在该算法中,一个解对应于一个水波,它具有两个属性,即波高  $h$  和波长  $\lambda$ 。问题的解空间对应于海床,到海床(垂直)距离越近的水波的适应度值越高,反之适应度值越低。算法在初始化时构建一个水波群,其中每个水波的波高  $h$  初始化为一个常数  $h_{\max}$ ,波长  $\lambda$  初始化为 0.5。在算法迭代过程中,通过反复应用传播、折射和碎浪这 3 种操作来对种群进行演化。

到稿日期:2015-06-01 返修日期:2015-07-25 本文受国家自然科学基金项目(61473263)资助。

张 蓓(1990—),女,硕士生,CCF 学生会员,主要研究方向为进化计算、群智能,E-mail:zhangbei-zjut@outlook.com;郑宇军(1979—),男,博士,副教授,博士生导师,CCF 会员,主要研究方向为计算智能、运筹学,E-mail:yujun.zheng@computer.org。

(1)传播。每个水波在算法的每次迭代过程中都将执行一次传播操作。设水波  $X$  传播后得到的新波为  $X'$ , 其每一维  $d(1 \leq d \leq D, \text{其中 } D \text{ 表示问题的维度})$  的位置按下式进行计算。

$$X_d' = X_d + \text{rand}(-1, 1) \cdot \lambda L_d \quad (1)$$

这里的  $\text{rand}()$  函数生成一个指定范围内的均匀分布随机数,  $L_d$  表示第  $d$  维搜索空间的长度。若新水波的位置超出了搜索界限, 则重新赋予其一个搜索空间内的随机位置。

传播后比较新水波  $X'$  与原始水波  $X$  的适应度值。记适应度函数为  $f$ , 若  $f(X') > f(X)$ , 则用  $X'$  取代种群中的  $X$ , 并将  $X'$  的波高设置为  $h_{\max}$ ; 否则保留  $X$ , 并使其波高减 1 以记录能量损耗。

由观察可知, 处于深水区(低适应度位置)的水波具有较长的波长和较低的波高, 而处于浅水区(高适应度位置)的水波具有较短的波长和较高的波高, 如图 1 所示<sup>[12]</sup>。水波通过传播变优的过程可视为由深水区向浅水区运动的过程, 因此 WWO 算法在每次迭代后按下式更新每个水波  $X$  的波长:

$$\lambda = \lambda \cdot \alpha^{-\frac{(f(X) - f_{\min} + \epsilon)}{(f_{\max} - f_{\min} + \epsilon)}} \quad (2)$$

其中,  $f_{\max}$  和  $f_{\min}$  分别表示当前种群中最大和最小的适应度值,  $\alpha$  是波长衰减系数,  $\epsilon$  是一个极小的正整数(以避免除以 0)。

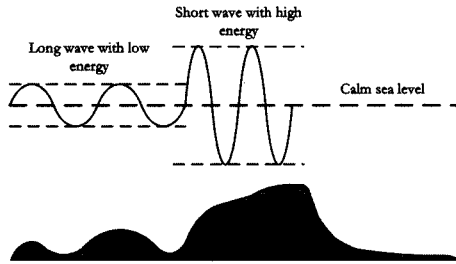


图 1 处于深水区 and 浅水区的水波具有的不同波形

(2)折射。如果一个水波在尝试多次传播操作后都没有得到改善, 其波高将衰减为 0。对于这样的水波  $X$ , 算法按下式对其执行折射操作:

$$X_d' = \text{norm}\left(\frac{X_d^* + X_d}{2}, \frac{X_d^* - X_d}{2}\right) \quad (3)$$

其中,  $X^*$  表示当前种群中最优的水波,  $\text{norm}(\mu, \sigma)$  函数用于生成一个均值为  $\mu$ 、方差为  $\sigma$  的高斯随机数。这实际上使得  $X$  向当前最优解  $X^*$  进行学习。

折射后新水波  $X'$  的波高重新设置为  $h_{\max}$ , 波长则更新为:

$$\lambda' = \lambda \frac{f(X)}{f(X')} \quad (4)$$

(3)碎浪。如果水波能量持续增加, 其波峰会变得越来越陡峭, 直至破碎成一连串的孤立波。在 WWO 算法中, 一旦搜索到一个新的最优水波  $X$ , 即对其执行碎浪操作。具体方式是随机选取  $D$  中的  $k$  维( $k$  是一个介于 1 和预定义参数  $k_{\max}$  之间的随机数), 再分别对选中的每一维按下式进行更新:

$$X_d' = X_d + \text{norm}(0, 1) \cdot \beta L_d \quad (5)$$

其中, 控制参数  $\beta$  称为“碎浪系数”。

执行碎浪操作得到  $k$  个子波; 如果它们的适应度值都低于原水波, 则保留  $X$ ; 否则用其中最优的一个子波取代种群中的  $X$ 。

上述 3 个操作算子共同为算法提供了良好的搜索机制。

传播操作使得适应度值高的水波可在较小范围内进行开发, 而适应度值低的水波可在较大范围内进行探索; 折射操作从种群中移除了能量耗尽的水波, 有效避免了搜索的停滞, 用向最优水波学习生成的新水波取代原始较差水波的方法也在一定程度上加快了算法的收敛; 碎浪操作增强了在当前最优解附近的密集搜索, 进一步提高了解的精度。这 3 个操作算子的结合有效地平衡了算法的全局搜索(探索)能力和局部搜索(开发)能力, 这是 WWO 算法成功的关键。

WWO 算法的基本框架描述如下。

Step 1 随机初始化生成一个包含  $n$  个解(水波)的种群。

Step 2 评估每个解的适应度; 如果终止条件满足, 则返回当前已找到的最优解, 算法结束。

Step 3 对种群中的每个水波  $X$  依次执行下列操作:

Step 3.1 按式(1)执行传播操作, 生成  $X'$ 。

Step 3.2 如果  $f(X') > f(X)$ , 则:

Step 3.2.1 如果  $f(X') > f(X^*)$ , 则按式(5)对  $X'$  执行碎浪操作, 并将  $X^*$  更新为  $X'$ 。

Step 3.2.2 将种群中的  $X$  替换为  $X'$ 。

Step 3.3 否则: 将  $X$  的波高减 1; 如果  $X \cdot h = 0$ , 则按式(3)、式(4)执行折射操作。

Step 3.4 按式(2)更新每个水波的波长。

Step 4 更新整个种群的全局最优解, 转 Step 2。

基于经验分析, WWO 算法求解一般全局优化问题时的建议参数设置为: 种群规模  $n$  设为 5~10, 最大波高  $h_{\max}$  设为 6~12, 波长衰减系数  $\alpha$  设为 1.001~1.01, 碎浪系数  $\beta$  设为 0.001~0.01, 最大碎浪维度数  $k_{\max}$  设为  $\min(12, D/2)$ 。

## 2 水波优化算法的收敛性分析

在理论上对进化算法的收敛性进行分析有助于深入理解算法, 并对算法的改进起到指导作用。进化算法的收敛性主要指在迭代时间或代数趋于无穷大的条件下, 算法能否最终搜索到并保留问题的全局最优解, 或整个种群中的个体能否都变为全局最优解<sup>[19, 20]</sup>。

根据 WWO 算法的基本执行过程可知, 水波  $X$  的位置受其波长  $\lambda$  的影响, 而  $\lambda$  的改变又与其适应度  $f(X)$  紧密相关。为此, 首先针对种群进化过程中个体适应度变化的两种特殊情况进行分析:

(1)个体的适应度随迭代次数的增加而不断提高。在该种情况下, WWO 算法将对个体一直执行传播操作, 每次传播得到的新水波都将取代种群中的原始水波。

(2)个体的适应度始终保持不变。在该种情况下, 随着水波能量的耗尽, 算法将一直执行折射操作, 使新生成的水波不断向最优水波靠近。

在传播操作(式(1))和折射操作(式(3))中, 虽然  $X_d$  表示多维变量, 但每一维相互独立, 因此在对算法进行分析时先将问题简化到一维的搜索空间。下面分别对只执行传播操作和只执行折射操作的情况进行收敛性分析。

### 2.1 只执行传播操作的算法收敛性分析

令  $k$  表示算法的迭代(进化)次数, 记  $L = L(d)$ ,  $r$  为随机数, 则式(1)、式(2)可分别改写为如下形式:

$$X(k+1) = X(k) + r \cdot \lambda(k) \cdot L \quad (6)$$

$$\lambda(k) = \lambda(k-1) \cdot \alpha^{-\frac{(f(X(k)) - f_{\min}^{(k-1)} + \epsilon)}{(f_{\max}^{(k-1)} - f_{\min}^{(k-1)} + \epsilon)}} \quad (7)$$

对式(7)进一步展开可得:

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \lambda(k-2) \cdot \alpha^{-\frac{f(X(k-1))-f_{\min}(k-1)+\epsilon}{f_{\max}(k-1)-f_{\min}(k-1)+\epsilon} + \frac{f(X(k-2))-f_{\min}(k-2)+\epsilon}{f_{\max}(k-2)-f_{\min}(k-2)+\epsilon}} \\ &= \dots \\ &= \lambda(0) \cdot \alpha^{-\sum_{i=1}^k \frac{f(X(i))-f_{\min}(i)+\epsilon}{f_{\max}(i)-f_{\min}(i)+\epsilon}} \\ &= \lambda(0) \cdot \alpha^{-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(X(i))-f_{\min}(i)+\epsilon}{f_{\max}(i)-f_{\min}(i)+\epsilon}} \end{aligned}$$

用  $\bar{f}$  表示指数项  $(f(X(i)) - f_{\min}(i) + \epsilon) / (f_{\max}(i) - f_{\min}(i) + \epsilon)$  在前  $k$  次迭代中的平均值, 则上式可变为:

$$\lambda(k) = \lambda(0) \cdot \alpha^{-k \cdot \bar{f}} \quad (8)$$

将式(8)代入式(6)中可得:

$$X(k+1) = X(k) + rL\lambda(0)\alpha^{-k \cdot \bar{f}} \quad (9)$$

其中,  $\lambda(0) = 0.5$ ; 再假设随机数数值不变, 则  $rL\lambda(0)$  为一常数, 底数项  $\alpha$  为一个  $1.001 \sim 1.01$  之间的正数, 指数项  $\bar{f}$  的取值根据种群中个体的适应度变化状态可分两种情况。

(1) 个体在每一次迭代中并非都是种群中最差的个体。假设在第  $i$  次迭代中, 令  $F = (f(X(i)) - f_{\min}(i) + \epsilon) / (f_{\max}(i) - f_{\min}(i) + \epsilon)$ , 若  $f(X(i)) = f_{\min}(i)$ , 则  $F = 0$ ; 若  $f(X(i)) = f_{\max}(i)$ , 则  $F = 1$ ; 若  $f_{\min}(i) < f(X(i)) < f_{\max}(i)$ , 则  $0 < F < 1$ 。因此  $0 < \bar{f} \leq 1$ 。当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} X(k+1) = X(k)$ , 即水波的位置不再随时间改变, 此时算法迭代收敛。

(2) 个体的适应度在每一次迭代中都是种群中最差的(尽管其适应度值本身在不断提高), 则在前  $k$  次迭代中始终有  $f(X(k)) = f_{\min}(k)$ , 因此  $\bar{f} = 0$ 。当  $k \rightarrow \infty$  时,  $X(k+1) = X(k) + rL\lambda(0)$ , 此时算法不收敛。

情形(2)是一种极端情况: 某个个体的适应度虽然始终在提高, 但它始终是种群中最差的一个解, 即种群中的所有其它个体也都在提高且提高得更快。在实际问题求解时, 如果迭代次数较大, 该情形几乎不可能出现。但从理论上说, 为保证收敛性, 应对上一节中 WWO 算法的 Step 3. 3. 1 做如下修改: 如果水波  $X$  的适应度没有得到改善, 或是  $X$  为种群中的最差解, 则将  $X$  的波高减 1; 如果  $X \cdot h = 0$ , 则按式(3)、式(4)执行折射操作。

## 2.2 只执行折射操作的算法收敛性分析

在个体适应度始终得不到提高的情况下, 算法将对该个体不断执行折射操作。记高斯随机数为  $g$ , 同时假定整个种群中搜索到的最优解  $X^*$  保持不变, 则式(3)可改写为如下形式:

$$X(k) = \frac{X^* + X(k-1)}{2} + g \cdot \frac{X^* - X(k-1)}{2} \quad (10)$$

对式(10)进一步推导可得:

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{2}(1+g)X^* + \frac{1}{2}(1-g) \cdot X(k-1) \\ &= \frac{1}{2}(1+g)X^* + \left(\frac{1}{2}\right)^2(1-g)(1+g)X^* + \\ &\quad \left(\frac{1}{2}\right)^2(1-g)^2 \cdot X(k-2) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2}(1+g)X^* \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i(1-g)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^k(1-g)^k \cdot \\ &\quad X(0) \\ &= \left(1 - \left(\frac{1}{2}(1-g)\right)^k\right) \cdot X^* + \left(\frac{1}{2}(1-g)\right)^k \cdot X(0) \end{aligned}$$

其中高斯随机数  $g$  的数学期望为 0; 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\left(\frac{1}{2}(1-g)\right)^k$  的值也必然趋向于 0, 故有  $\lim_{k \rightarrow \infty} X(k) = X^*$ , 即水波的位置最终

收敛到最优位置  $X^*$ , 此时算法迭代收敛。

## 3 数值仿真

再通过数值仿真实验, 模拟计算 WWO 算法求解过程中个体解位置的变化, 对上述理论分析结果进行验证。

实验环境为一台配置为 Intel Core i5-2520M 处理器、4GB 运行内存的电脑。为了避免偶然性对实验结果的影响, 针对每一种情况, 算法均独立运行 20 次, 记录每一次运行过程中水波位置的变化, 并取 20 次运算的中位数值(median)作为最终结果, 绘制水波位置与迭代次数之间的关系。

### 3.1 只执行传播操作情况下的数值仿真

为满足适应度随迭代次数增加而不断提高的前提, 在实验中选择最简单的一维线性递增函数作为适应度评估函数:

$$f(x) = x, -10 \leq x \leq 10$$

则  $f_{\max} = 10, f_{\min} = -10, L = 20$ 。在式(6)中,  $r$  是一个  $[-1, 1]$  范围内均匀分布的随机数, 而实验中限定为  $r > 0$  的情况。这样  $r > 0, \lambda(k) > 0, L > 0$ , 则  $X(k)$  单调递增, 适应度  $f(X(k))$  也单调递增。

实验中个体的初始位置为  $[-10, 10]$  范围内的一个均匀随机数, 参数  $r$  分别取  $r = 0.5$  和  $r = \text{rand}(0, 1)$  两种情况, 其余参数均取 WWO 算法的建议设置。值得注意的是, 在 WWO 算法的传播操作中, 若新生成水波的位置超出了规定的界限, 需重新随机化其位置; 而实验中规定, 若发生了越界情况, 则重置水波的位置为上一代的位置, 从而保证适应度的单调性, 同时避免重复随机所带来的干扰。

图 2 给出了  $r = 0.5$  时水波位置与迭代次数的关系结果。从图中可以看到, 随着迭代次数的增加, 水波的位置不断向最优位置靠拢, 到第 900 次迭代左右, 水波的位置不再随迭代而改变。

图 3 给出了  $r = \text{rand}(0, 1)$  时前 100 次迭代中水波位置与迭代次数的关系。从图中可以看到, 从第 75 次迭代开始, 水波的位置就已收敛于最优位置, 其收敛速度明显快于当  $r$  取值为 0.5 时的收敛情况。由于当  $r$  取随机数时, 其值有 50% 的概率大于 0.5, 这会大大加快水波位置的收敛速度。

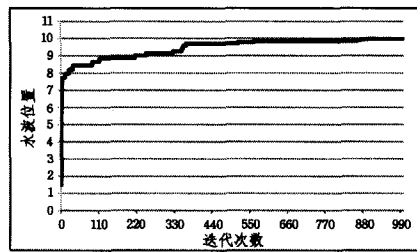


图 2  $r = 0.5$  时只执行传播操作情况下水波位置与迭代次数的关系

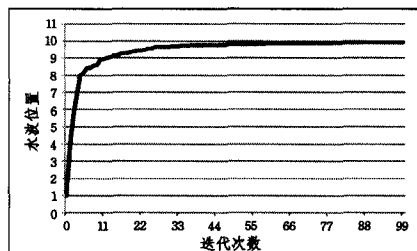


图 3  $r$  取随机数时只执行传播操作情况下水波位置与迭代次数的关系

### 3.2 只执行折射操作情况下的数值仿真

实验所选择的适应度函数与算法参数设置均与上一种情

况相同,此时显然有最优值  $x^* = 10$ 。对参数  $g$  的取值同样采取了两种方式,即取固定值和随机取值,并分别进行了实验。

图 4 给出了  $g=0.5$  时水波位置与迭代次数的关系。从图中可以看到,从第 8 次迭代开始,水波的位置就已逼近最优位置,最后随着迭代次数的增加,水波的位置一直固定在最优位置,不再改变。

图 5 给出了  $g$  随机取值时水波位置与迭代次数的关系。同样可以看到,从第 16 次迭代开始,水波位置就逐渐收敛于最优位置,但与  $g$  取固定值的情况稍有不同的是,在第 7 次迭代到第 9 次迭代过程中,水波位置出现了小幅震荡,这是高斯随机数取值可能为负引起的,而水波位置最终会不再随时间改变。

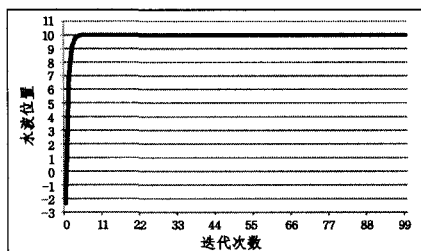


图 4  $g=0.5$  时只执行折射操作情况下水波位置与迭代次数的关系

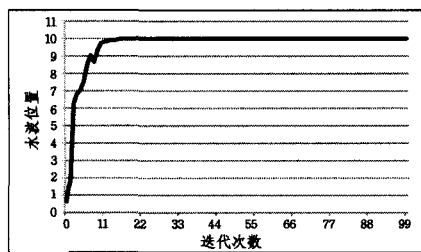


图 5  $g$  取随机数时只执行折射操作情况下水波位置与迭代次数的关系

**结束语** 本文从理论上对 WWO 算法的收敛性进行了分析,在分析时对维度和参数都进行了简化,并根据种群中个体适应度的不同变化情况,将对算法收敛性的分析简化为分别对只执行传播操作算子的算法和只执行折射操作算子的算法进行收敛性分析,结果证明 WWO 算法随迭代次数的增加可搜索并收敛到问题的全局最优解。数值仿真实验也验证了理论分析的结果。特别地,通过分析只执行传播操作的情况,发现了一种可能导致算法不收敛的极端情形,并据此给出了算法的修正策略。

本文仅针对 WWO 算法在连续优化问题上是否收敛进行了分析和实验,今后将对算法在更多组合优化问题上的收敛性进行分析<sup>[18,21,22]</sup>,并在算法收敛速度评估和时间复杂度分析等方面进行更为深入的探索。

## 参考文献

[1] De Jong K A. Evolutionary computation: a unified approach [M]. Cambridge: MIT press, 2006

[2] Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial Systems; An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence [M]. Cambridge: MIT Press, 1992

[3] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization [C]//IEEE International Conference on Neural Networks. 1995:1942-1948

[4] Dorigo M, Caro G D. Ant colony optimization: a new meta-heuristic [C]//Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. 1999:1470-1477

[5] Geem Z W, Kim J H, Loganathan G V. A new heuristic optimization algorithm: harmony search [J]. Simulation, 2001, 76(2): 60-68

[6] Mehrabian A R, Lucas C. A novel numerical optimization algorithm inspired from weed colonization [J]. Ecological Informatics, 2006, 1(4): 355-366

[7] Simon D. Biogeography-based optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2008, 12(6): 702-713

[8] Rashedi E, Nezamabadi-Pour H, Saryazdi S. GSA: A gravitational search algorithm [J]. Information Sciences, 2009, 179(13): 2232-2248

[9] 赵玉新, 杨新社, 刘利强. 新兴元启发式优化算法[M]. 北京: 科学出版社, 2013

[10] Sörensen K. Metaheuristics—the metaphor exposed [J]. International Transactions in Operational Research, 2015, 22(1): 3-18

[11] Zheng Yu-jun, Chen Sheng-yong, Ling Hai-feng. Evolutionary optimization for disaster relief operations: a survey [J]. Applied Soft Computing, 2015, 27: 553-566

[12] Zheng Yu-jun. Water wave optimization [J]. Computers & Operations Research, 2015, 55(1): 1-11

[13] Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum [J]. J. Fluid Mech, 1962, 12(15): 481-500

[14] Booij N, Ris R C, Holthuijsen L H. A third-generation wave model for coastal regions; 1. Model description and validation [J]. Journal of Geophysical Research: Oceans, 1999, 104(C4): 7649-7666

[15] Huang Hu. Dynamics of Surface Waves in Coastal Waters; Wave-current-bottom Interactions [M]. Springer, 2009

[16] Liang J J, Qu B Y, Suganthan P N. Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2014 special session and competition on single objective real-parameter numerical optimization [R]. Zhengzhou: Computational Intelligence Laboratory, Zhengzhou University, 2014

[17] Zheng Yu-jun, Zhang Bei. A simplified water wave optimization algorithm [C]//Proceedings of the 2015 IEEE Congress on Evolutionary Computation. New York: IEEE Press, 2015

[18] Wu Xiao-bei, Liao Jie, Wang Zhi-cheng. Water wave optimization for the traveling salesman problem [C]//Proceedings of the 2015 International Conference on Intelligent Computing. 2015

[19] Rudolph G. Convergence properties of evolutionary algorithms [M]. Kovac, 1997

[20] Zhang Qing-fu, Muhlenbein H. On the convergence of a class of estimation of distribution algorithms [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2004, 8(2): 127-136

[21] Li Hong, Wang Yu-ping, Jiao Yong-chang. A New Genetic Algorithm for Nonlinear Bilevel Programming Problem and Its Global Convergence [J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2005, 25(3): 62-71 (in Chinese)

[22] Li Wei-bin, Dong Ying-ying, Li Xiao-lin, et al. Application of improved ant colony algorithm in emergency VRP and its convergence analysis [J]. Application Research of Computers, 2014, 31(12): 3557-3559 (in Chinese)

李卫斌, 董影影, 李小林, 等. 改进蚁群算法在应急 VRP 中的应用及收敛性分析 [J]. 计算机应用研究, 2014, 31(12): 3557-3559