

正则 3-SAT 问题的相变现象

张明明 许道云

(贵州大学计算机科学与技术学院 贵阳 550025)

摘要 通过对 3-CNF 公式加以限制,要求其中每个变元出现的次数相同,引出正则 3-SAT 问题。进一步,通过对两种子句产生机制形成的 $(3, s)$ -CNF 公式进行可满足性观察,发现在规模较小的情况下,正则 3-CNF 公式比非正则 3-CNF 公式更容易满足。从而推测与非正则 3-SAT 问题相比,正则 3-SAT 问题的相变点有偏移现象。最后,从变元自由度的角度对这一现象给出了定性解释。

关键词 正则 CNF 公式, SAT 问题, 相变, 变元自由度

中图分类号 TP301 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.4.006

Phase Transition Phenomenon of Regular 3-SAT Problem

ZHANG Ming-ming XU Dao-yun

(College of Computer Science and Technology, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract We considered the restriction on the 3-CNF formula on n Boolean variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, in which each of the $2n$ literals occurs precisely $\{x_1, \neg x_1, \dots, x_n, \neg x_n\}$ times. We called such formulas as regular $(3, s)$ -CNF formulas. Through the two kinds of clauses generating mechanism of $(3, s)$ -CNF formula, we observed that the regular $(3, s)$ -CNF formulas are easier to be satisfied than non-regular 3-CNF formulas while the input size is small. Thus we inferred that compared with non-regular 3-SAT, the transition point of regular 3-SAT problems has offset phenomenon. Finally we explained this phenomenon from a perspective of the number of the variable's degree of freedom.

Keywords Regular CNF formula, SAT problem, Phase transition, Variable's degrees of freedom

1 引言

SAT 问题是计算机科学中的核心问题,其理论及其应用研究是计算机与数理逻辑界众多学者共同关注的一个重大问题。在可满足问题的相变现象研究中,随机统计现象表明:可满足与不可满足之间出现一种临界现象,在这一现象中,出现在公式中的子句数与变元数之比是一个重要的参数。对于 3-CNF 公式而言,当这个参数在 $3.52^{[1]}$ 至 $4.506^{[2]}$ 这一区间时,公式可满足性的判定难度很大;但是,当这个参数远离这一区间时,公式可满足性的判定有可能在多项式时间内就可以完成。SAT 问题的这一相变现象的发现进一步催生了概率方法在 SAT 问题中的研究和应用。

在具有某些规则限制的 CNF 公式类中,可能会得到可满足性问题复杂性的具体结果和性质,文献[3-5]研究了线性公式类,一个 CNF 公式称为线性公式,如果任意两个不同的子句至多有一个公共变元。线性公式类的可满足性判定问题仍然保留 NP 完全性。但是,如果限制到“任意两个不同的子句恰有一个公共变元”,则这样的 CNF 公式子类是可满足类。Tovey 等人研究了变元出现次数受界的公式类的可满足性判定问题,得到了一些简化了的 NP-完全问题^[6-9]。在这些类中,变元出现的次数受一个较小界控制。基于极小不可满足

公式的应用,通过构造适当的极小不可满足公式,可以将 CNF 公式多项式归约到具有某些特殊结构的公式类^[10,11],类似技术可以用到 k -CNF 公式和 t -CNF 公式之间的相互转换^[12],其中 $k, t \geq 3$ 。

SAT 问题的 NP 完全性的深入研究一直是 SAT 问题研究的重点,通过对公式结构的各种限制,在保留 NP 完全性的公式子类上研究 SAT 问题会得到一些具体而有用的结果。通常,在限制子句长度、变元出现次数受界等情形下进行研究。在正则结构下研究 SAT 问题的工作并不多见,一个正则的 (k, s) -CNF 公式是指:每个子句的长度恰好为 k ,每个变元出现的次数恰好为 s 。

本文对规模较小的正则 $(3, s)$ -CNF 公式算例的可满足性进行了观察研究,发现对正则 $(3, s)$ -CNF 公式而言,变元出现在公式中的次数 s (换算为子句变元比后为 $s/3$)是一个重要的参数,当这个参数在 13 至 15 之间时,公式可满足性的判定难度很大;但是,当这个参数远离这一区间时,公式可满足性的判定有可能在多项式时间内就可以完成。这一现象表明,正则 3-SAT 问题除了同 3-SAT 问题一样有着相变现象外,与 3-SAT 问题相比,其相变点有所偏移。

2 产生 $(3, s)$ -CNF 公式的两种随机机制

一个文字 L 是一个命题变元 x 或其否定 $\neg x$,一个子句 C

到稿日期:2015-05-17 返修日期:2015-08-10 本文受国家自然科学基金(61262006)资助。

张明明(1979-),男,博士生,主要研究方向为可计算性与计算复杂性, E-mail: fysfzmm@163.com; 许道云(1959-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为可计算性与计算复杂性。

是文字的析取 ($L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k$), 或表示成一个文字集合 $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$, k 称为子句长度。长度为 k 的子句简称 k -子句。一个 CNF 公式 F 是子句的合取 ($C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$), 或表示成一个子句集合 $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 或表示成一个子句表 $[C_1, C_2, \dots, C_n]$ 。

用 $\text{CNF}(m, n)$ 表示含有 m 个变元、 n 个子句的 CNF 公式类; 用 (k, s) -CNF 表示正则 CNF 公式子类, 其中每个公式中每个子句长度恰为 k 、每个变元出现的次数恰为 s , 特别地, 用 k -CNF 表示每个公式中每个子句长度恰为 k 的 CNF 公式子类。

由于所有的 CNF 公式都可以在多项式时间内归约到 3-CNF 公式, 简单起见, 只研究正则 CNF 公式中的 $(3, s)$ -CNF 正则公式子类。又由于在 $(3, s)$ -CNF 公式中所有变元的总出现次数必须为 3 和 s 的公倍数, 方便起见, 不妨假定该公倍数为 $3s$ 的 t 倍。这样, 我们研究的 $(3, s)$ -CNF 正则公式子类中的每一个公式都是由 $3t$ 个变元产生的, 其中每一个变元随机产生 s 个文字, 在这 $3st$ 个文字中随机选取每 3 个不同变元产生的文字组合为一组, 相互析取形成 st 个子句, 最后这 st 个子句相互合取形成一个 $(3, s)$ -CNF 公式。

尽管出现在 CNF 公式中的所有变元都是自由变元, 但若目标是使公式的取值为真, 则其中每个变元取值的“自由程度”是不同的, 这种取值的“自由程度”称为该变元的自由度。具体地, 一个可能使公式取值为真的变元取值空间大小称为该变元的自由度。对于 CNF 公式, 一个取任何值都可能使公式的取值为真的“完全自由”的自由变元的取值空间为 $\{0, 1\}$, 其自由度为 2; 而一个被约束到取任何值都不会使公式的取值为真的“完全不自由”的自由变元的取值空间为空集, 其自由度为 0; 其他情况下, 变元的取值空间为 $\{0\}$ 或 $\{1\}$, 其自由度为 1。同时, 称力迫变元取值空间为空集的子句为互不相容子句。

另外, 即使是自由度不为零的变元, 公式的取值对其中每个变元的依赖程度也是不同的。换言之, 在其余变元取值不变的前提下, 单个变元的取值改变若影响到公式真值的改变, 则公式对该变元的依赖程度较大; 反之, 则公式对该变元的依赖程度较小。具体地, 对某个变元而言, 其依赖程度可以用以下方法取得: ①将公式真值表列出, 同时将变元所在列与最后一列变元置换; ②将真值表中的行按二进制升序排列; ③真值表中奇偶行的公式真值变化率即为公式对该变元的依赖度。

例如: 对 $(3, 4)$ -CNF 公式

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

变元 x_1 的自由度是 1, 公式对变元 x_1 的依赖度为 1; 变元 x_2 和 x_3 的自由度都是 2, 公式对变元 x_2 和 x_3 的依赖度都是 0。

再如, 对单子句公式 $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ 而言, 其中所有变元的自由度都是 2, 公式对所有变元的依赖度都是 0.875。

对 CNF 公式, 显然有如下结论成立: ①公式中所有变元的自由度的取值空间都为 $\{0, 1, 2\}$, 对所有变元的依赖度的取值空间都为 $[0, 1]$; ②重言式中所有变元的自由度都是 2, 对所有变元的依赖度都是 0; ③矛盾式中所有变元的自由度都是 0, 对所有变元的依赖度都是 0。

3 产生 $(3, s)$ -CNF 公式的两种随机机制

由于 $(3, s)$ -CNF 公式中限定了每个变元的出现次数, 使其子句中变元的分布变得比较复杂, 而且公式中文字产生的随机机制不同, 公式的可满足性及判定公式可满足性的难易程度也可能不同。为此, 选择两种不同的随机机制来产生 $(3, s)$ -CNF 公式, 并用实验的方法观察这些公式的可满足性及判定公式可满足性的难易程度, 进而研究正则 3-SAT 问题的相变点, 并同非正则 3-SAT 问题的相变点做比较。

3.1 历史即时作用的随机机制

在这种随机机制下, 算法优先保障每个变元在公式中出现的次数相等。每个变元在之前被选择的次数越多, 下次被选取到的概率越小。即前期的选择在时刻改变变元被选取到的概率, 历史上的选择即时在起作用。

公式生成机制: 一个有 $3t$ 个变元、 st 个子句的 $(3, s)$ -CNF 公式 F 按如下规则生成:

第 1 步 将所有 $3t$ 个变元标记为 s 。

第 2 步 重复以下步骤 st 次:

①在所有变元中不等概率无放回地依次选择 3 个变元产生 3 个文字, 其中各变元被选到的概率与其被标记的数值成比例, 每个文字正负出现的概率相等。

②若这 3 个文字在之前被同一个子句使用过, 则转①; 否则使其形成一个子句, 并使所选变元的标记全部减 1 后再放回。

③检查标记不为 0 的变元的个数, 若小于 3 且不为 0, 则算法提前结束, 公式产生失败; 否则继续。

第 3 步 将上面产生的 st 个子句依次合取成一个公式。

例: 取 $t=2, s=4$, 一个成功产生公式的算法过程如表 1 所列。

表 1 用历史即时作用的随机机制产生一个 $(3, 4)$ -CNF 公式

变元的标记值						产生的子句
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	4	4	4	4	4	$x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
3	4	3	3	4	4	$\neg x_2 \vee \neg x_5 \vee x_6$
3	3	3	3	3	3	$x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$
3	3	2	2	2	3	$\neg x_1 \vee x_2 \vee x_6$
2	2	2	2	2	2	$\neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_6$
2	2	1	1	2	1	$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5$
1	1	1	1	1	1	$x_2 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6$
1	0	1	1	0	0	$x_1 \vee x_3 \vee x_4$
0	0	0	0	0	0	

3.2 历史延后作用的随机机制

另外, 即使是自由度不为零的变元, 公式的取值对其中每个变元的依赖程度也是不同的。换言之, 在其余变元取值不变的前提下, 单个变元的取值改变若影响到公式真值的改变, 则公式对该变元的依赖程度较大; 反之, 则公式对该变元的依赖程度较小。具体地, 对某个变元而言, 其依赖程度可以用以下方法取得: ①将公式真值表列出, 同时将变元所在列与最后一列变元置换; ②将真值表中的行按二进制升序排列; ③真值表中奇偶行的公式真值变化率即为公式对该变元的依赖度。

在这种随机机制下, 算法优先保障每个变元被选取到的概率是相等的。同时为了保证每个变元在公式中出现的次数都是 s , 在一个变元被选取 s 次后, 算法就禁止再次选择该变元。即前期的选择在累积到一定程度(某个变元已经被选择

了 s 次)后才改变变元被选取到的概率(变为 0),历史上的选择要经过一定的延迟后才起作用。

公式生成机制:一个有 $3t$ 个变元、 st 个子句的 $(3, s)$ -CNF 公式 F 按如下规则生成:

第 1 步 将所有 $3t$ 个变元标记为 s 。

第 2 步 依次重复以下步骤 st 次:

①在所有标记不为 0 的变元中等概率无放回地依次选择 3 个变元产生 3 个文字,其中每个文字正负出现的概率相等。

②若这 3 个文字在之前被同一个子句使用过,则转①;否则使其形成一个子句,并使所选变元的标记全部减 1 后再放回。

③检查标记不为 0 的变元的个数,若小于 3 且不为 0,则算法提前结束,公式产生失败;否则继续。

第 3 步 将上面产生的 st 个子句依次合成一个公式。

例:取 $t=2, s=4$, 一个成功产生公式的算法过程如表 2 所列。

表 2 用历史延后作用的随机机制产生一个 $(3, 4)$ -CNF 公式

变元的标记值						产生的子句
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	4	4	4	4	4	$x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4$
3	4	3	3	4	4	$\neg x_1 \vee \neg x_4 \vee x_6$
2	4	3	2	4	3	$x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$
1	3	2	2	4	3	$\neg x_1 \vee x_3 \vee x_6$
0	3	1	2	4	2	$\neg x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$
0	2	1	1	3	2	$x_3 \vee \neg x_5 \vee x_6$
0	2	0	1	2	1	$x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$
0	1	0	0	1	1	$x_2 \vee x_4 \vee x_6$
0	0	0	0	0	0	

表 3 历史即时作用时正则 3-CNF 公式的平均可满足程度与平均求解难度

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{u}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
\bar{v}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
s	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
\bar{u}	0.0000	0.0000	0.0956	0.8617	0.5970	0.2347	0.0455	0.0146	0.0057	0.0024
\bar{v}	1.0000	1.0000	0.9667	0.5833	0.0667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
s	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
\bar{u}	0.0014	0.0008	0.0005	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
\bar{v}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

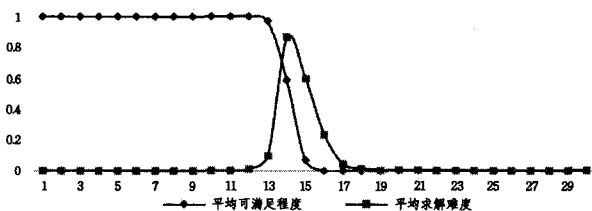


图 1 历史即时作用时正则 3-CNF 公式的平均可满足程度与平均求解难度

注 2:实验中,在 s 值小于等于 14 时没有发现不可满足公式,在 s 值大于等于 15 时同样没有发现可满足公式。实际将 s 值拉大或缩小的原因在于求解器 z -chaff 无法确定可满足性的公式的存在。

现象 1 从表 3 及图 1 可以看出,当 3-CNF 公式中要求每个变元出现次数都相同且同一变元正负出现的概率相等时,相应正则 3-SAT 问题的相变点出现在 s 值为 13 到 15 之间,换算为子句变元比后,该值为 4.33 到 5 之间。这已经远大于一般随机 3-SAT 问题的相变点了。

注 1:由于 $3t$ 个变元最多可以产生 $8C_3^t$ 个不同的 3-子句,公式生成过程中为减小相同子句重复出现的几率,子句数 st 应当远小于 $8C_3^t$,即参数 s 和 t 之间的关系应当满足 $S \ll 4(3t-1)(3t-2)$ 。

在本文中,考虑实验规模将公式变元数都限制为 300 个,即 $3t=300$,于是 $t=100$;同时为保证 $s \ll 4(3t-1)(3t-2)$,且考虑到子句变元比 $s/3$ 大于 10 时公式必然高概率满足这一事实,取 $s \leq 30$ 。

4 正则 3-SAT 问题的相变现象

对 $1 \leq s \leq 30$ 中的每一个 s 值都随机生成 30 个 $(3, s)$ -CNF 公式并用求解器 z -chaff 进行求解,同时观察并记录是否可满足及求解时间。由于主要关注的是公式可满足性及判定公式可满足性难易程度的一个对比效果,为更加直观,对实验数据做如下归一化预处理:

1. 由于求解器 z -chaff 的最大求解时间为 86400 秒,因此将 86400 秒当作 1 个单位求解时间,并将每个公式的具体求解秒数与 86400 的比值作为其求解时间。对同一 s 值,用 30 个公式的平均求解时间 \bar{u} 作为该 $(3, s)$ -CNF 的求解难度。

2. 对于可满足性,令可满足公式的值为 1,不可满足公式的值为 0,若求解器 z -chaff 无法确定其是否可满足,则公式取值为 0.5。同样,对同一 s 值,用 30 个公式的平均取值 \bar{v} 作为该 $(3, s)$ -CNF 的可满足程度。

4.1 历史即时作用时的相变现象

用历史即时作用的随机机制产生 $(3, s)$ -CNF 公式,在同一台计算机上求解,实验结果如表 3 及图 1 所示。

原因分析:首先同一变元正负出现的概率相等这一现象并不会导致 3-SAT 问题的相变点变大。通过考察极端情况便知,对于公式中的所有变元,当同一变元在要么全部正出现要么全部负出现时,公式一定可满足。这表明,同一变元正负出现的概率相差越大,公式越容易满足。从而同一变元正负出现的概率相等可能导致 3-CNF 公式更难满足,即相应的 3-SAT 问题的相变点变小。那么,导致正则 3-SAT 问题相变点变大的原因只能是正则 3-CNF 公式中变元出现次数相同了。

现象 2 由表 3 及图 1 并结合注 2 可以看出,实验中产生了大量的求解器 z -chaff 无法确定可满足性的公式。而实验中问题实例的规模并不大,这间接表明正则 3-SAT 问题的求解难度较大。

原因分析:一般情况下,同一变元正负出现的概率相差越大,公式对该变元依赖度越大,求解算法往往会优先考虑这些变元的赋值。若公式是可满足的,则比较容易找到可满足赋值;另一方面,变元在公式中出现次数越多,受到的约束越多,求解算法往往也会优先考虑这些变元的赋值。这时,若公式

是不可满足的,则比较容易找出矛盾。

综上,公式中每个变元出现次数都相同及同一变元正负出现的概率相等都会导致求解难度增大。

表4 历史延后作用时正则 3-CNF 公式的平均可满足程度与平均求解难度

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\bar{u}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
\bar{v}	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
s	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
\bar{u}	0.0000	0.0001	0.0968	0.9254	0.5362	0.2311	0.0436	0.0120	0.0058	0.0022
\bar{v}	1.0000	1.0000	0.9333	0.5500	0.0333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
s	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
\bar{u}	0.0015	0.0007	0.0005	0.0004	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
\bar{v}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

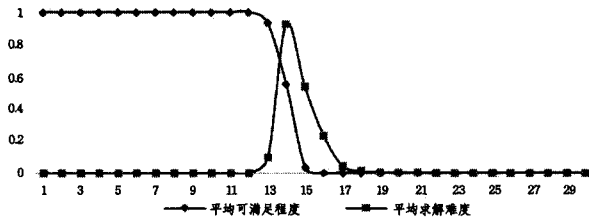


图2 历史延后作用时正则 3-CNF 公式的平均可满足程度与平均求解难度

现象3 表4及图2的结果表明,当正则 3-CNF 公式中子句产生的随机机制发生改变时,相应正则 3-SAT 问题的相变点换算为子句变元比后虽然还是在 4.33 到 5 之间,但具体取值上已经有一点改变。从数据上看,改为历史延后作用的随机机制后,同历史即时作用的随机机制相比,其相变点要略微小一点,但同非正则 3-SAT 问题相比,其相变点还是要大得多。

原因分析:在历史延后作用的随机机制中,当 $(3, s)$ -CNF 公式中的变元被选择次数没达到 s 时,其子句生成机制同非正则 3-CNF 公式一致。由于这一机制的影响,同历史即时作用的随机机制相比,其相变点要相对小一点。但由于每个变元出现次数都相同这一限制依然存在,同非正则 3-SAT 问题相比,其相变点还是要大得多。

结束语 本文对两种随机机制下产生的正则 3-CNF 公式类进行了可满足性测试,归纳总结了正则 3-CNF 公式类随着子句变元比的变化,其可满足性及求解难度的变化规律。通过同非正则 3-SAT 问题的相变点做比较,指出在问题规模较小的情况下正则 3-SAT 问题的相变点明显要大一些,即在子句变元比相同的情况下,正则 3-CNF 公式比非正则 3-CNF 公式更容易满足,并对这一现象做出了定性解释。同时指出,同一变元正负出现概率及子句产生的随机机制对 3-CNF 公式的可满足性和求解难度都有影响。

如何对 3-CNF 公式进行某种恰当限制后再研究相应 3-SAT 问题的相变现象,是一个值得深入研究的课题。本文受限于实验条件,只对小规模正则 3-SAT 问题进行了实验比对。对大规模问题的实验及理论解释等都有待进一步的研究。

参考文献

[1] Kaporis A C, Kirousis L M, Lalas E G. The probabilistic analysis of a greedy satisfiability algorithm[J]. Random Structures &

4.2 历史延后作用时的相变现象

用历史延后作用的随机机制产生 $(3, s)$ -CNF 公式,在同一台计算机上求解,实验结果如表 4 及图 2 所示。

Algorithms, 2006, 28(4):444-480

- [2] Dubois O, Boufkhad Y, Mandler J. Typical random 3-SAT formulae and the satisfiability threshold $[J/EB]$. arXiv: cs/0211036, 2002
- [3] Porschen S, Speckenmeyer E, Randerath B. On linear CNF formulas[M]// Theory and Applications of Satisfiability Testing-SAT06. Seattle, WA, USA, Springer Berlin Heidelberg, 2006: 212-225
- [4] Porschen S, Speckenmeyer E. NP-completeness of SAT for restricted linear formulas classes[C]// Proceedings of the Symposium on Satisfiability in Logic-Based Modeling. Guangzhou, China, 2006: 108-121
- [5] Porschen S, Speckenmeyer E, Zhao Xi-shun. Linear CNF formulas and satisfiability[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(5): 1046-1068
- [6] Tovey C A. A simplified NP-complete satisfiability problem [J]. Discrete Applied Mathematics, 1984, 8(1): 85-89
- [7] Hoory S, Szeider S. Computing unsatisfiable k-SAT instances with few occurrences per variables [J]. Journal of Theoretical Computer Science, 2005, 337(1/3): 347-359
- [8] Hoory S, Szeider S. Families of unsatisfiable k-CNF formulas with few occurrences per variables [J/EB]. arXiv: math/0411167, 2014
- [9] Savický P, Sgall J. Note DNF tautologies with a limited number of occurrences of every variable[J]. Theoretical Computer Science, 2000, 238(1/2): 495-498
- [10] Xu Dao-yun. Applications of minimal unsatisfiable formulas to polynomial reductions for formulas [J]. Journal of Software, 2006, 17(5): 1204-1212
- [11] Xu Dao-yun, Deng Tian-yan, Zhang Qing-shun. k-LSAT is NP-complete for $k \geq 3$ [J]. Journal of Software, 2008, 19(3): 511-521
- [12] Wang Jian, Xu Dao-yun. An effective algorithm for reducing k-CNF to t-CNF [J]. Journal of Nanjing University (Mathematical Biquarterly), 2005, 22(1): 53-65
- [13] Jian Ding, Sly A, Sun N. Satisfiability threshold for random regular NAE-SAT [C]// Proc. 46th STOC. 2014: 814-822
- [14] Coja-Oghlan A, Panagiotou K. Going after the k-SAT threshold [C]// Proc. 45th STOC. 2013: 705-714
- [15] B Vapst, Coja-Oghlan A. The condensation phase transition in the regular k-SAT model [J/EB]. arXiv: 1507.03512, 2015