

基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型及其三支决策

薛占熬 刘 杰 朱泰隆 司小滕 王朋函

(河南师范大学计算机与信息工程学院 新乡 453007)

(河南省高校计算智能与数据挖掘工程技术研究中心 新乡 453007)

摘 要 概率粗糙集是研究不确定信息的重要理论基础,有着广泛的应用。由于概率粗糙集中的等价关系和概率测度的可加性要求过于严格,且在实际问题应用中难以满足,因此,对概率粗糙集及其模型进行拓展研究是非常有必要的。在概率粗糙集、Sugeno 测度和三支决策的理论基础上,对基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型及其三支决策规则进行了研究。首先构造了一种基于覆盖关系的 Sugeno 测度粗糙集模型,定义了该模型的上、下近似算子;然后证明了其并、交、补等运算的代数性质;最后结合三支决策理论,给出了该模型的三支决策规则和方法,并用实例验证了其有效性。

关键词 Sugeno 测度,覆盖,Sugeno 测度粗糙集,三支决策

中图分类号 TP181 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.3.053

Sugeno Measure Rough Set Model Based on Covering and its Three-way Decision

XUE Zhan-ao LIU Jie ZHU Tai-long SI Xiao-meng WANG Peng-han

(College of Computer and Information Engineering, Henan Normal University, Xinxian 453007, China)

(Engineering Technology Research Center for Computing Intelligence & Data Mining of Henan Province, Xinxian 453007, China)

Abstract The classical probabilistic rough set model is an important theoretical basis for dealing with the problem of uncertain information. It has a wide range of applications in uncertain information system. However, both the equivalence relation and probability measure in probabilistic rough set model are too strict to obtain in the practical applications. Therefore, it is necessary to expand the model, so that it should widen the scope of application. Based on the probabilistic rough set, Sugeno measure and three-way decision theory, the covering Sugeno measure rough set model was first proposed and the new three-way decision rules were researched. Firstly, the covering Sugeno measure rough set model was constructed and the upper and lower approximate operators were also defined. Secondly, the properties about the union, intersection and complement of the operators were provided. Finally, combined with the three-way decision theory, the three-way decision rules based on the model were proposed and a comprehensive illustration was presented to verify the model's effectiveness and feasibility.

Keywords Sugeno measure, Covering, Sugeno measure rough set model, Three-way decision

1 引言

粗糙集理论是由波兰科学家 Pawlak 教授^[1]于 1982 年提出的一种处理不精确和不确定知识的数学方法,在机器学习、数据挖掘和数据处理等领域中得到了广泛应用。Pawlak 粗糙集模型由于是基于确定性知识库的,忽略了可利用信息的不确定性,有学者将概率测度引入粗糙集理论形成了概率粗糙集^[2,3],近几年来概率粗糙集理论得到了广泛的应用和快速发展^[4-6]。概率粗糙集模型中的等价关系和概率测度的可加性要求过于严格,且在实际问题应用中很难同时满足这两个条件,因此,有必要对概率粗糙集进行拓展研究,使其能得到更好的应用。目前对概率粗糙集模型的拓展研究有两个方

面,一方面是从关系方面进行拓展,将论域上的二元等价关系推广为相似关系^[7]、一般的二元关系^[8]和模糊关系^[9]等进行研究;另一方面是将概率测度推广到基于其他测度的粗糙集模型(如 Sugeno 测度^[10,11]、信任测度和似然测度^[12,13]和不确定测度^[14]等)进行研究。刘耀辉^[11]于 2010 年提出了基于 Sugeno 测度的粗糙集模型,基于 Sugeno 测度的变精度粗糙集模型等使概率粗糙集的应用范围得到进一步拓展。然而 Sugeno 测度粗糙集模型利用等价关系将论域进行划分,但是等价关系在实际应用中往往会受到许多限制从而难以构造。覆盖^[15-18]作为划分的一种推广,可以为概率粗糙集处理更复杂的数据形式提供方便,所以从覆盖的角度对基于 Sugeno 测度的粗糙集模型进行深入研究,可以使概率粗糙集应用领域

到稿日期:2015-02-13 返修日期:2015-04-29 本文受国家自然科学基金计划项目(61273018),河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410174),河南省教育厅计划项目(14A520082),新乡市重点科技攻关计划项目(ZG14020)资助。

薛占熬(1963—),男,博士,教授,主要研究方向为人工智能基础理论和粗糙集理论,E-mail: xuezhanao@163.com;刘 杰(1989—),女,硕士生,主要研究方向为粗糙集和三支决策基本理论;朱泰隆(1990—),男,硕士生,主要研究方向为博弈论、决策论和粗糙集理论;司小滕(1989—),女,硕士生,主要研究方向为模糊集和粗糙集理论;王朋函(1986—),男,硕士生,主要研究方向为概率论和不确定推理。

变得更加广泛。对于现实生活中许多决策问题,直接作出肯定或者否定的决策会带来较大的风险代价,Yao^[19]在传统的二支决策(接受、拒绝决策)的基础上于2010年提出了第三种决策——延迟决策,它能更好地描述人们实际作决策时的思维过程,为利用粗糙集方法来解决决策问题提供可靠的理论依据,近几年来该理论得到了广泛的应用^[20,21],正成为国内外研究的一个新热点。所以本文在总结上述研究的基础上,在概率粗糙集、Sugeno 测度和三支决策的理论基础上,运用覆盖代替等价关系,对基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型进行研究,构造出一种基于覆盖关系的 Sugeno 测度粗糙集模型,定义了该模型的上、下近似算子,证明了该模型的并、交、补等运算的代数性质;结合三支决策理论,给出基于覆盖关系的 Sugeno 测度粗糙集模型的三支决策规则,并利用医疗实例验证了该模型决策的有效性。

2 基础知识

2.1 广义覆盖粗糙集

首先介绍 Bnikowski 广义覆盖粗糙集模型中的上、下近似定义。

定义 1^[9] 设非空有限集 U 是论域, $C = \{X | X \subseteq U\}$ 是 U 的子集族,如果任意 $X \subseteq C, X \neq \emptyset$, 且 $U \cap C = U$, 则称 C 是 U 的一个覆盖,并记 (U, C) 为覆盖近似空间。显然,论域 C 的划分是 U 的一个覆盖,所以覆盖是划分的推广。

定义 2^[9] 设 (U, C) 是一个覆盖近似空间,对任意 $X \subseteq U$, 称 $Md(x) = \{K \in C | x \in K \wedge (\forall S \in C \wedge x \in S \wedge S \subseteq K \rightarrow K = S)\}$ 为 x 的最小描述。

定义 3^[9] 设 (U, C) 是一个覆盖近似空间,对任意 $X \subseteq U$, X 关于 (U, C) 的下近似与上近似定义分别为: $\underline{C}(X) = \{x \in U | (\cap Md(x)) \subseteq X\}$, $\overline{C}(X) = \{x \in U | (\cap Md(x)) \cap X \neq \emptyset\}$ 。

如果 $\underline{C}(X) = \overline{C}(X)$, 则称 X 关于覆盖近似空间 (U, C) 是可定义的;否则, X 关于覆盖近似空间 (U, C) 是不可定义的。特别地,当 C 是论域 U 上的划分时, $\underline{C}(X)$ 和 $\overline{C}(X)$ 便退化为 Pawlak 粗糙集中的下近似与上近似。

2.2 基于 Sugeno 测度的粗糙集

定义 4^[14] 设 X 是一非空集合, ζ 是由 X 的子集组成的非空类, μ 是定义在 ζ 上的非负实值集函数。称 μ 满足(在 ζ 上) σ - λ 律当且仅当存在 $\lambda \in (-\frac{1}{\sup \mu}, \infty) \cup \{0\}$, 使得下式成立。

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} [1 + \lambda \cdot \mu(E_i)] - 1 \right\}, & \lambda \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i), & \lambda = 0 \end{cases}$$

其中, $\{E_n\}$ 是 ζ 中的集合构成的任意不交序列,且这些集合的并仍然在 ζ 中。

定义 5^[14] 设 F 是 X 上的子集组成的 σ 代数。称 μ 为 F 上的 Sugeno 测度,当且仅当 μ 满足 σ - λ 律,且 $\mu(X) = 1$, 简记为 g_λ 测度。

定理 1^[14] $g_\lambda (\lambda > -1)$ 具有性质:

$$g_\lambda (\sim A) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A)}$$

证明:参考文献[14],略。

定义 6^[14] 设 U 是有限论域, P 是 U 上的概率测度,任

意 $A, B \subseteq U$, 当 $\lambda \neq 0$ 时, 称 $g_\lambda(A|B) = \frac{1}{\lambda} [(1 + \lambda)^{P(A|B)} - 1]$ 为

事件 B 发生的条件下事件 A 出现的 Sugeno 条件概率。

定义 7^[15] 设 U 是有限对象构成的论域, R 是 U 上的等价关系,其构成的等价类为 $U/R = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, 仍记 x 所在的等价类为 $[x]_R$, 令 g_λ 为定义在 U 的子集类构成的 σ 代数上的 Sugeno 测度,三元组 $A_\lambda = (U, R, g_\lambda)$ 称为 Sugeno 近似空间, U 中的每个子集称为概念,代表了一个随机事件。

设 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 对于任意 $X \subseteq U$, 定义 X 关于 Sugeno 近似空间 $A_\lambda = (U, R, g_\lambda)$ 依参数 λ, α, β 的 Sugeno 测度(I)型下近似 $\underline{GI}_\alpha(X)$ 和上近似 $\overline{GI}_\beta(X)$ 如下^[15]:

$$\underline{GI}_\alpha(X) = \{x \in U | g_\lambda(X|[x]_R) \geq \alpha\}$$

$$\overline{GI}_\beta(X) = \{x \in U | g_\lambda(X|[x]_R) > \beta\}$$

X 关于 A_λ 依参数 λ, α, β 的 Sugeno 测度(I)型正域、负域和边界域分别为:

$$POS(X, \alpha, \beta, \lambda) = \underline{GI}_\alpha(X) = \{x \in U | g_\lambda(X|[x]_R) \geq \alpha\}$$

$$NEG(X, \alpha, \beta, \lambda) = U \setminus \overline{GI}_\beta(X) = \{x \in U | g_\lambda(X|[x]_R) \leq \beta\}$$

$$BND(X, \alpha, \beta, \lambda) = \{x \in U | \beta < g_\lambda(X|[x]_R) < \alpha\}$$

本节回顾了 Bnikowski 广义覆盖粗糙集模型、Sugeno 测度(I)型等概念。在以下研究中,主要讨论 $\lambda > 0$ 的情况,即假定 $\lambda > 0$, 不再详细说明。

3 基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型及其性质

定义 8 设 U 是有限对象构成的论域, C 是 U 上的一个覆盖,令 g_λ 为定义在 U 的子集类构成的 σ 代数上的 Sugeno 测度, $Md(x)$ 表示元素为 $x \in U$ 的最小描述,记三元组 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$ 称为覆盖 Sugeno 近似空间, U 中的每个子集称为概念,它代表了一个随机事件。设 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, 对于任意 $X \subseteq U$, 定义 X 关于覆盖 Sugeno 近似空间 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$ 依参数 λ, α, β 的 Sugeno 测度(I)型下近似 $\underline{GC}_\alpha(X)$ 和上近似 $\overline{GC}_\beta(X)$ 如下:

$$\begin{cases} \underline{GC}_\alpha(X) = \{x \in U | g_\lambda(X \cap Md(x)) \geq \alpha\} \\ \overline{GC}_\beta(X) = \{x \in U | g_\lambda(X \cap Md(x)) > \beta\} \end{cases} \quad (1)$$

X 关于覆盖 Sugeno 近似空间 $A_{C\lambda}$ 依参数 λ, α, β 的 Sugeno 测度(I)型正域、负域和边界域分别为:

$$\begin{cases} POS_C(X, \alpha, \beta, \lambda) = \underline{GC}_\alpha(X) \\ \quad = \{x \in U | g_\lambda(X \cap Md(x)) \geq \alpha\} \\ NEG_C(X, \alpha, \beta, \lambda) = U \setminus \overline{GC}_\beta(X) \\ \quad = \{x \in U | g_\lambda(X \cap Md(x)) \leq \beta\} \\ BND_C(X, \alpha, \beta, \lambda) = \{x \in U | \beta < g_\lambda(X \cap Md(x)) < \alpha\} \end{cases} \quad (2)$$

当 $\underline{GC}_\alpha(X) = \overline{GC}_\beta(X)$ 时, 称 X 依参数 α, β 关于 $A_{C\lambda}$ 是 Sugeno 测度(I)型可定义集;否则, 称 X 依参数 α, β 关于 $A_{C\lambda}$ 是 Sugeno 测度(I)型粗糙集。

注 1 在定义 8 中,若设 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$ 为 Sugeno 测度近似空间,即 U 是非空有限论域, R 是 U 上的一个等价关系,则 U 的划分 $U/R = \{[x]_R | x \in U\}$ 便构成了 U 的一个覆盖,这样, $\cap Md(x) = [x]_R$ 。即任意 $X \subseteq U$,

$$\underline{GC}_\alpha(X) = \{x \in U | g_\lambda(X \cap Md(x)) \geq \alpha\}$$

$$= \{x \in U | g_\lambda(X|[x]_R) \geq \alpha\} = \underline{GI}_\alpha(X)$$

$$\overline{GC}_\beta(X) = \{x \in U | g_\lambda(X \cap Md(x)) > \beta\}$$

$$= \{x \in U \mid g_\lambda(X \mid [x]_R) > \beta\} = \overline{GI}_\beta X$$

此时,基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型退化为文献[15]中的 Sugeno 测度粗糙集模型。

注2 在定义8中,若取 $\alpha=1, \beta=0, \lambda=0, g_\lambda$ 此时为概率测度,模型退化为基于覆盖的概率粗糙集模型。

注3 在定义8中,如果覆盖 C 为论域 U 的划分,且取 $\alpha=1, \beta=0, \lambda=0$,当 g_λ 为概率测度时,覆盖概率粗糙集模型退化为概率粗糙集模型。

定理2 设 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$,任意 $X, Y \in U, 0 \leq \beta < \alpha \leq 1$,则 X 关于 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$ 依参数 α, β 的下近似和上近似满足下列性质。

- (1) $\underline{GC}_\alpha(\emptyset) = \overline{GC}_\beta(\emptyset) = \emptyset$,
 $\underline{GC}_\alpha(U) = \overline{GC}_\beta(U) = U$;
- (2) $\underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \overline{GC}_\beta(X)$;
- (3) $\underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \sim \overline{GC}_\alpha(\sim X)$,
 $\overline{GC}_\beta(X) \subseteq \sim \overline{GC}_\beta(\sim X)$;
- (4) 若 $X \subseteq Y$,则 $\underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \underline{GC}_\alpha(Y), \overline{GC}_\beta(X) \subseteq \overline{GC}_\beta(Y)$;
- (5) $\underline{GC}_\alpha(X \cap Y) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X) \cap \underline{GC}_\alpha(Y)$,
 $\overline{GC}_\beta(X \cap Y) \subseteq \overline{GC}_\beta(X) \cap \overline{GC}_\beta(Y)$;
- (6) $\underline{GC}_\alpha(X \cup Y) \supseteq \underline{GC}_\alpha(X) \cup \underline{GC}_\alpha(Y)$,
 $\overline{GC}_\beta(X \cup Y) \supseteq \overline{GC}_\beta(X) \cup \overline{GC}_\beta(Y)$;
- (7) 若 $\alpha_1 \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta_2$,则 $\underline{GC}_{\alpha_2}(X) \subseteq \underline{GC}_{\alpha_1}(X), \overline{GC}_{\beta_2}(X) \subseteq \overline{GC}_{\beta_1}(X)$ 。

证明:根据定义8和定理1,性质(1)、(2)和(7)容易证明,这里仅证明性质(3)–(6)。

对于性质(3):

$$\begin{aligned} \underline{GC}_\alpha(X) &= \{x \in U \mid g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) \geq \alpha\} \\ &= \{x \in U \mid \frac{1 - g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x))}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x))} \geq \alpha\} \\ &= \{x \in U \mid g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x)) \leq \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha \cdot \lambda}\} \\ &\subseteq \{x \in U \mid g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x)) \leq 1 - \alpha\} \\ &= \sim \{x \in U \mid g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x)) > 1 - \alpha\} \\ &= \sim \overline{GC}_\alpha(\sim X) \\ \overline{GC}_\beta(X) &= \{x \in U \mid g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) > \beta\} \\ &= \{x \in U \mid \frac{1 - g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x))}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x))} > \beta\} \\ &= \{x \in U \mid g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x)) < \frac{1 - \beta}{1 + \beta \cdot \lambda}\} \\ &\subseteq \{x \in U \mid g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x)) \leq 1 - \beta\} \\ &= \sim \{x \in U \mid g_\lambda(\sim X \mid \cap Md(x)) \geq 1 - \beta\} \\ &= \sim \overline{GC}_\beta(\sim X) \end{aligned}$$

所以, $\underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \sim \overline{GC}_\alpha(\sim X), \overline{GC}_\beta(X) \subseteq \sim \overline{GC}_\beta(\sim X)$ 。

对于性质(4),取 $x \in \underline{GC}_\alpha(X)$,则 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) \geq \alpha$,根据 g_λ 的定义,且 $X \subseteq Y$,可得, $g_\lambda(Y \mid \cap Md(x)) \geq g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) \geq \alpha$ 。即 $x \in \underline{GC}_\alpha(Y)$,从而得 $\underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \underline{GC}_\alpha(Y)$ 。

同理可证, $\overline{GC}_\beta(X) \subseteq \overline{GC}_\beta(Y)$ 。

对于性质(5),取 $x \in \underline{GC}_\alpha(X \cap Y)$,则 $g_\lambda(X \cap Y \mid \cap Md(x)) \geq \alpha$,根据 g_λ 定义和性质(4),且 $X \cap Y \subseteq X, X \cap Y \subseteq Y$,因为 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) \geq \alpha, g_\lambda(Y \mid \cap Md(x)) \geq \alpha$ 。即 $x \in \underline{GC}_\alpha(X), x \in \underline{GC}_\alpha(Y)$,从而 $x \in \underline{GC}_\alpha(X) \cap \underline{GC}_\alpha(Y)$,故, $\underline{GC}_\alpha(X \cap Y) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X) \cap \underline{GC}_\alpha(Y)$ 。

$$Y) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X) \cap \underline{GC}_\alpha(Y)。$$

同理可证, $\overline{GC}_\beta(X \cap Y) \subseteq \overline{GC}_\beta(X) \cap \overline{GC}_\beta(Y)$ 。

对于性质(6),取 $x \in \underline{GC}_\alpha(X \cup Y)$,则 $g_\lambda(X \cup Y \mid \cap Md(x)) \geq \alpha$,根据 g_λ 定义和性质(4),且 $X \subseteq X \cup Y, Y \subseteq X \cup Y$,有 $\underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X \cup Y), \underline{GC}_\alpha(Y) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X \cup Y)$,故, $\underline{GC}_\alpha(X) \cup \underline{GC}_\alpha(Y) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X \cup Y)$ 。

同理可证, $\overline{GC}_\beta(X \cup Y) \supseteq \overline{GC}_\beta(X) \cup \overline{GC}_\beta(Y)$ 。

推论1 若 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$,则

$$\underline{GC}_1(X) \subseteq \underline{GC}_\alpha(X), \overline{GC}_\beta(X) \subseteq \overline{GC}_0(X)$$

证明:根据定理2性质(7),容易证明,略。

定理3 设 $0 < r < 1$,则任意 $X \subseteq U$,有

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow r^+} \underline{GC}_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha > r} \underline{GC}_\alpha(X) = \overline{GC}_r(X)$$

$$(2) \lim_{\beta \rightarrow r^-} \overline{GC}_\beta(X) = \bigcap_{\beta < r} \overline{GC}_\beta(X) = \underline{GC}_r(X)$$

证明:(1)当 $\alpha > r$ 时,由定义8可知, $\underline{GC}_\alpha(X) = \{x \in U \mid g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in U \mid g_\lambda(X \mid \cap Md(x)) > r\} = \overline{GC}_r(X)$,由定理2性质(7)知, $\underline{GC}_\alpha(X)$ 随着 α 的减小而增大,因此 $\lim_{\alpha \rightarrow r^+} \underline{GC}_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha > r} \underline{GC}_\alpha(X) \subseteq \overline{GC}_r(X)$ 。

若存在 $x_0 \in \overline{GC}_r(X) \setminus \bigcup_{\alpha > r} \underline{GC}_\alpha(X)$,则有 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) > r$,但对任意 $\alpha > r$ 有 $x_0 \notin \underline{GC}_\alpha(X)$,即任意 $\alpha > r$,有 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) < \alpha$,导出 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) < r$ 与 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) > r$ 的矛盾。

从而 $\bigcup_{\alpha > r} \underline{GC}_\alpha(X) = \overline{GC}_r(X)$ 。因此, $\lim_{\alpha \rightarrow r^+} \underline{GC}_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha > r} \underline{GC}_\alpha(X) = \overline{GC}_r(X)$ 成立。

$$\text{同理可证 } \lim_{\beta \rightarrow r^-} \overline{GC}_\beta(X) = \bigcap_{\beta < r} \overline{GC}_\beta(X) = \underline{GC}_r(X)。$$

定理4 设 $0 < r < 1$,则任意 $X \subseteq U$,有

$$(1) \lim_{\alpha \rightarrow r^-} \underline{GC}_\alpha(X) = \bigcap_{\alpha < r} \underline{GC}_\alpha(X) = \underline{GC}_r(X)$$

$$(2) \lim_{\beta \rightarrow r^+} \overline{GC}_\beta(X) = \bigcup_{\beta > r} \overline{GC}_\beta(X) = \overline{GC}_r(X)$$

证明:(1)当 $\alpha < r$ 时,由定理3可知, $\underline{GC}_\alpha(X) \supseteq \underline{GC}_r(X)$,再由定理2性质(7)知, $\underline{GC}_\alpha(X)$ 随着 α 的增大而减小,因此, $\lim_{\alpha \rightarrow r^-} \underline{GC}_\alpha(X) = \bigcap_{\alpha < r} \underline{GC}_\alpha(X) \supseteq \underline{GC}_r(X)$ 。

若存在 $x_0 \in \bigcap_{\alpha < r} \underline{GC}_\alpha(X) \setminus \underline{GC}_r(X)$,则对任意 $\alpha > r$,有 $x_0 \in \underline{GC}_\alpha(X)$,但 $x_0 \notin \underline{GC}_r(X)$,即任意 $\alpha > r$,有 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) \geq \alpha$,而 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) < r$,导出矛盾。因为,任意 $\alpha > r, g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) \geq \alpha$,可得 $g_\lambda(X \mid \cap Md(x_0)) \geq r$ 。从而 $\bigcap_{\alpha < r} \underline{GC}_\alpha(X) = \underline{GC}_r(X)$ 。因此, $\lim_{\alpha \rightarrow r^-} \underline{GC}_\alpha(X) = \bigcap_{\alpha < r} \underline{GC}_\alpha(X) = \underline{GC}_r(X)$ 。

$$\text{同理可证 } \lim_{\beta \rightarrow r^+} \overline{GC}_\beta(X) = \bigcup_{\beta > r} \overline{GC}_\beta(X) = \overline{GC}_r(X)。$$

定义9 若 $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$,则 X 关于覆盖 Sugeno 近似空间 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$ 依参数 λ, α, β 的近似精度 $\eta(X, \alpha, \beta, \lambda)$ 和粗糙度 $\rho(X, \alpha, \beta, \lambda)$ 分别定义为:

$$\eta(X, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{|\underline{GC}_\alpha(X)|}{|\overline{GC}_\beta(X)|}$$

$$\rho(X, \alpha, \beta, \lambda) = 1 - \eta(X, \alpha, \beta, \lambda) = 1 - \frac{|\underline{GC}_\alpha(X)|}{|\overline{GC}_\beta(X)|}$$

由此可见, X 关于覆盖 Sugeno 近似空间 $A_{C\lambda} = (U, C, g_\lambda)$ 依参数 λ, α, β 是可定义的,当且仅当其近似精度 $\eta(X, \alpha, \beta, \lambda) = 1$,而粗糙度 $\rho(X, \alpha, \beta, \lambda) = 0$ 。

4 基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型的三支决策规则

设 $\Omega = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 表示有限 m 个特征状态集合, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是由 n 个有限的决策行动构成的集合。 $g_\lambda(G_j | \cap Md(x))$ 表示对象在最小描述所有集合的交集 $\cap Md(x)$ 下处于状态 G_j 的 Sugeno 测度, 令 $\lambda(a_i | G_j)$ 为在状态 G_j 的情况下采取 a_i 行动的损失或代价。对具有描述 $\cap Md(x)$ 的对象 x , 如果采取决策 a_i , 其期望损失为:

$$R(a_i | \cap Md(x)) = \sum_{j=1}^m \lambda(a_i | G_j) \cdot g_\lambda(G_j | \cap Md(x))$$

一般地, 对于给定的描述 $\cap Md(x)$, 令 $\tau(x)$ 为决策行动集 A 的一个映射函数 ($\tau(x) \in A$), 则 $\tau(x)$ 是一个决策规则。决策规则 $\tau(x)$ 下的期望总体风险为:

$$R = \sum_{\cap Md(x)} R(\tau(x) | \cap Md(x)) \cdot g_\lambda(\cap Md(x)) \quad (3)$$

式(3)给出了各对象描述的情况。对于每个描述 $\cap Md(x)$ 的对象 x , 可以根据式(3)计算条件风险 $R(a_i | \cap Md(x))$, 从中选出条件风险最小的决策行动。

基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型的三支决策为: 特征状态集合 $\Omega = \{X, \sim X\}$ 分别表示某事件属于 X 和不属于 X , $A = \{a_P, a_B, a_N\}$ 表示决策行为集, 其中 a_P, a_B 和 a_N 分别表示接受事件、延迟决策和拒绝某事件 3 种行为。在实际应用中采取不同的决策行为会产生不同的风险代价, 用 $\lambda_{PP}, \lambda_{BP}, \lambda_{NP}$ 分别表示对象 x 的描述 $\cap Md(x)$ 属于 X 时, 采取决策行动 a_P, a_B, a_N 下的风险代价; 用 $\lambda_{PN}, \lambda_{BN}, \lambda_{NN}$ 分别表示对象 x 的描述 $\cap Md(x)$ 不属于 X 时, 采取决策行动 a_P, a_B, a_N 下的风险代价。因此, 由式(3)知, 采取 a_P, a_B, a_N 3 种决策行动下的期望损失分别表示为:

$$\begin{aligned} R(a_P | \cap Md(x)) &= \lambda_{PP} \cdot g_\lambda(X | \cap Md(x)) + \lambda_{PN} \cdot g_\lambda(\sim X | \cap Md(x)) \\ R(a_B | \cap Md(x)) &= \lambda_{BP} \cdot g_\lambda(X | \cap Md(x)) + \lambda_{BN} \cdot g_\lambda(\sim X | \cap Md(x)) \\ R(a_N | \cap Md(x)) &= \lambda_{NP} \cdot g_\lambda(X | \cap Md(x)) + \lambda_{NN} \cdot g_\lambda(\sim X | \cap Md(x)) \end{aligned}$$

根据 Bayes 决策中最小风险原则, 得到如下 3 条决策规则:

规则(P): 若 $R(a_P | \cap Md(x)) \leq R(a_B | \cap Md(x))$ 和 $R(a_P | \cap Md(x)) \leq R(a_N | \cap Md(x))$, 则 $x \in POS(X)$ 。

规则(B): 若 $R(a_B | \cap Md(x)) \leq R(a_P | \cap Md(x))$ 和 $R(a_B | \cap Md(x)) \leq R(a_N | \cap Md(x))$, 则 $x \in BND(X)$ 。

规则(N): 若 $R(a_N | \cap Md(x)) \leq R(a_P | \cap Md(x))$ 和 $R(a_N | \cap Md(x)) \leq R(a_B | \cap Md(x))$, 则 $x \in NEG(X)$ 。

由于在实际情况中风险函数往往满足 $0 \leq \lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$ 和 $0 \leq \lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$, 由定理 1, 用 $g_\lambda(X | \cap Md(x))$ 代替 $g_\lambda(\sim X | \cap Md(x))$, 即:

$$g_\lambda(\sim X | \cap Md(x)) = \frac{1 - g_\lambda(X | \cap Md(x))}{1 + g_\lambda(X | \cap Md(x))}$$

由上述得出如下 3 条决策规则的条件。对于规则(P): $R(a_P | \cap Md(x)) \leq R(a_B | \cap Md(x))$, 得

$$g_\lambda(X | \cap Md(x)) \geq \{-[(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})] + [(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2 + 2(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + 4\lambda \cdot (\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2\lambda \cdot (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})]$$

或

$$g_\lambda(X | \cap Md(x)) \leq \{-[(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})] - [(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2 + 2(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{BN}) + 4\lambda \cdot (\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2\lambda \cdot (\lambda_{BP} - \lambda_{PP})]$$

此不等式右边为负值, 超出 $g_\lambda(X | \cap Md(x))$ 的值域范围 ($g_\lambda \in [0, 1]$), 故舍去此式。

由 $R(a_P | \cap Md(x)) \leq R(a_N | \cap Md(x))$, 得

$$g_\lambda(X | \cap Md(x)) \geq \{-[(\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})] + [(\lambda_{NP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})^2 + 2(\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + 4\lambda \cdot (\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2\lambda \cdot (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})]$$

或

$$g_\lambda(X | \cap Md(x)) \leq \{-[(\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})] - [(\lambda_{NP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})^2 + 2(\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{NN}) + 4\lambda \cdot (\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2\lambda \cdot (\lambda_{NP} - \lambda_{PP})]$$

此不等式右边为负值, 超出 $g_\lambda(X | \cap Md(x))$ 的值域范围 ($g_\lambda \in [0, 1]$), 故舍去此式。

为方便讨论, 取 $\lambda = 1$, 又因为 $0 \leq \lambda_{PP} \leq \lambda_{BP} < \lambda_{NP}$ 和 $0 \leq \lambda_{NN} \leq \lambda_{BN} < \lambda_{PN}$, $\lambda_{BP} - \lambda_{PP} < \lambda_{NP} - \lambda_{PP}$, $\lambda_{PN} - \lambda_{BN} < \lambda_{PN} - \lambda_{NN}$, 最后得

$$g_\lambda(X | \cap Md(x)) \geq \{-[(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})] + [(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2 + 6(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})]$$

此时令

$$\alpha' = \{-[(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})] - [(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})^2 + 6(\lambda_{BP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{BN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2(\lambda_{BP} - \lambda_{PP})] \quad (4)$$

$$\gamma' = \{-[(\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) + (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})] + [(\lambda_{NP} - \lambda_{PP})^2 + (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})^2 + 6(\lambda_{NP} - \lambda_{PP}) \cdot (\lambda_{PN} - \lambda_{NN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2(\lambda_{NP} - \lambda_{PP})] \quad (5)$$

即若 $g_\lambda(X | \cap Md(x)) \geq \alpha'$ 且 $g_\lambda(X | \cap Md(x)) \geq \gamma'$, 则采用规则(P)。

同理可得, 若 $\beta' \leq g_\lambda(X | \cap Md(x)) \leq \alpha'$, 则采用规则(B); 若 $g_\lambda(X | \cap Md(x)) \leq \gamma'$ 且 $g_\lambda(X | \cap Md(x)) \leq \beta'$, 则采用规则(N)。其中,

$$\beta' = \{-[(\lambda_{NP} - \lambda_{BP}) + (\lambda_{BN} - \lambda_{NN})] + [(\lambda_{NP} - \lambda_{BP})^2 + (\lambda_{BN} - \lambda_{NN})^2 + 6(\lambda_{NP} - \lambda_{BP}) \cdot (\lambda_{BN} - \lambda_{NN})]^{\frac{1}{2}}\} / [2(\lambda_{NP} - \lambda_{BP})] \quad (6)$$

由规则(B)可知, $\beta' < \alpha'$, 本文只讨论 $0 \leq \beta' < \alpha' \leq 1$ 的情况, 故有 $0 \leq \beta' < \gamma' < \alpha' \leq 1$ 。决策规则(P)、(B)、(N)可重写为 (P_1) 、 (B_1) 、 (N_1) 。

规则(P₁):

若 $g_\lambda(X | \cap Md(x)) \geq \alpha'$, 则 $x \in POS(X)$ 。

规则(B₁):

若 $\beta' < g_\lambda(X | \cap Md(x)) < \alpha'$, 则 $x \in NEG(X)$ 。

规则(N₁):

若 $g_\lambda(X | \cap Md(x)) \leq \beta'$, 则 $x \in BND(X)$ 。

规则(P₁)的语义解释为: 若在对象 x 的描述 $\cap Md(x)$ 下, X 发生的 Sugeno 测度大于阈值 α' , 则将 $\cap Md(x)$ 分到 X 的正域中, 作出肯定决策。

规则(B₁)的语义解释为: 若在对象 x 的描述 $\cap Md(x)$ 下, X 发生的 Sugeno 测度介于阈值 α' 和 β' 之间, 则将 $\cap Md(x)$

(x)分到 X 的边界域中,作出延迟决策。

规则(N_1)的语义解释为:若在对象 x 的描述 $\cap Md(x)$ 下, X 发生的 Sugeno 测度小于阈值 β' ,则将 $\cap Md(x)$ 分到 X 的负域中,作出拒绝决策。

5 实例分析

如果设论域 U 是一群病人构成的集合,特征状态集合 $\Omega=\{X, \sim X\}$,这里 X 表示患某种疾病(如流感)的病人全体,记 $POS(X)$ 、 $BND(X)$ 、 $NEG(X)$ 分别为 X 的正域(立即接受治疗的病人全体)、负域(不用治疗的病人全体)和边界域(延迟决策,即需进一步观察的病人全体)。现设对象 $X \in U$ 的描述为 $\cap Md(x)$,则每一位病人 x 在临床表现 $\cap Md(x)$ 下均面临 3 种可能的决策: $A=\{a_P, a_B, a_N\}$ 表示决策行动集,其中 a_P 、 a_B 和 a_N 表示每一位病人 x 分类时的 3 个决策,依次对应对象 x 要立即接受治疗($x \in POS(X)$)、 x 不用治疗($x \in NEG(X)$)和 x 需要进一步观察再决定是否接受治疗($x \in BND(X)$)。

例 1 设有 6 位病人构成的论域 U ,记 $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$,取 $X=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$ 为 6 位病人的病症表现,如表 1 所列。

表 1 6 位病人的病症表现

U	咳嗽	发烧	头疼	肌肉痛	咽干
x_1	是	否	否	否	否
x_2	是	是	是	否	否
x_3	否	是	是	否	否
x_4	否	否	是	否	是
x_5	否	否	是	是	否
x_6	否	否	否	否	是

对论域 U 中的对象根据病症分类为:咳嗽 $\{x_1, x_2\}$;发烧 $\{x_2, x_3\}$;头疼 $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$;肌肉疼 $\{x_5\}$;咽干 $\{x_4, x_6\}$ 。

根据覆盖定义, $C=\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_5\}, \{x_4, x_6\}\}$ 变为 U 的一个覆盖。

$Md(x_1)=\{\{x_1, x_2\}\}$, $Md(x_2)=\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$,
 $Md(x_3)=\{\{x_2, x_3\}\}$, $Md(x_4)=\{\{x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{x_4, x_6\}\}$,
 $Md(x_5)=\{\{x_5\}\}$, $Md(x_6)=\{\{x_4, x_6\}\}$ 。

根据 $P(X|\cap Md(x))=\frac{|X \cap (\cap Md(x))|}{|\cap Md(x)|}$, $P(X|\cap Md(x_1))=1$, $P(X|\cap Md(x_2))=1$, $P(X|\cap Md(x_3))=\frac{1}{2}$,
 $P(X|\cap Md(x_4))=1$, $P(X|\cap Md(x_5))=0$, $P(X|\cap Md(x_6))=1$ 。

为便于计算,取 $\lambda=1$,由定义 6 求出 $g_\lambda(X|\cap Md(x))$,即
 $g_\lambda(X|\cap Md(x))=2^{P(X|\cap Md(x))}-1$ 。由 $g_\lambda(X|\cap Md(x))=2^{P(X|\cap Md(x))}-1$ 得,

$$g_\lambda(X|\cap Md(x_1))=2^{P(X|\cap Md(x_1))}-1=2^1-1=1$$

$$g_\lambda(X|\cap Md(x_2))=2^{P(X|\cap Md(x_2))}-1=1$$

$$g_\lambda(X|\cap Md(x_3))=2^{P(X|\cap Md(x_3))}-1=2^{\frac{1}{2}}-1 \approx 0.41$$

$$g_\lambda(X|\cap Md(x_4))=2^{P(X|\cap Md(x_4))}-1=2^1-1=1$$

$$g_\lambda(X|\cap Md(x_5))=2^{P(X|\cap Md(x_5))}-1=2^0-1=0$$

$$g_\lambda(X|\cap Md(x_6))=2^{P(X|\cap Md(x_6))}-1=2^1-1=1$$

参照文献[19],结合例 1,设风险代价(第一组)为: $\lambda_{PP}=0.13$, $\lambda_{BP}=0.43$, $\lambda_{NP}=1.03$, $\lambda_{NN}=0.27$, $\lambda_{BN}=0.77$, $\lambda_{PN}=1.65$ 。

由式(4)和式(6)知,确定阈值 $\alpha' \approx 0.65$, $\beta' \approx 0.38$ 。由式(1)得 $GC_\alpha(X)=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$, $\overline{GC}_\beta(X)=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,即 $POS_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=GC_\alpha(X)=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$,
 $NEG_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=U-\overline{GC}_\beta(X)=\{x_5\}$, $BND_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\overline{GC}_\beta(X)-GC_\alpha(X)=\{x_3\}$ 。

在基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型下, $POS_C(X)$ 中的对象即病人 x_1, x_2, x_4, x_6 为肯定接受治疗的病人; $NEG_C(X)$ 中的对象即病人 x_5 为不用治疗的病人; $BND_C(X)$ 中的对象即病人 x_3 为需进一步观察病情再决定是否接受治疗的病人(延迟决策)。

针对例 1,我们就基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型和其它模型进行比较分析。

在例 1 中,如果用传统的二支决策进行诊断决策,即只有接受治疗和放弃治疗两种结果。若接受规则: $g_\lambda(X|\cap Md(x)) \geq 0.5$,则采取接受治疗;若拒绝规则: $g_\lambda(X|\cap Md(x)) < 0.5$,则采取放弃治疗。

其结果为:病人 x_1, x_2, x_4, x_6 为肯定接受治疗,病人 x_3, x_5 为放弃治疗。但由表 1 知,病人 x_3 有“发烧”症状,此症状对病人来说是比较严重的,所以采取“进一步观察再做决定是否接受治疗”更为合理,而二支决策直接将病人 x_3 判为不用治疗,可能带来严重的误判后果。

在例 1 中,如果根据文献[11]的 Sugeno 测度粗糙集模型,按照等价关系进行决策,有如下结果:

设 $U/R=\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}\}$,则 $PI_\alpha X=\overline{PI}_\beta X=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$,得 $POS(X)=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$, $NEG(X)=\{x_3, x_5\}$, $BND(X)=\emptyset$ 。

其结果为:病人 x_1, x_2, x_4, x_6 为肯定接受治疗,病人 x_3, x_5 为放弃治疗。

在该例子中得出的结果与二支决策一样,直接将病人 x_3 判为不用治疗,直接带来风险。

因此,我们提出的基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型的三支决策在某种程度上可以减少决策的风险。

这里另外选取两组代价进行对比,来说明本文提出的代价是较合理的。

(1)若设风险代价(第二组)为: $\lambda_{PP}=0.29$, $\lambda_{BP}=0.49$, $\lambda_{NP}=1.19$, $\lambda_{NN}=0.14$, $\lambda_{BN}=0.57$, $\lambda_{PN}=1.45$ 。由式(4)和式(6)知,确定阈值 $\alpha' \approx 0.72$, $\beta' \approx 0.32$ 。其分类结果为: $POS_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$, $NEG_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\{x_5\}$, $BND_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\{x_3\}$ 。

与第一组分类结果一致,该组风险代价的选取也是合理的。

(2)若设风险代价(第三组)为: $\lambda_{PP}=0.36$, $\lambda_{BP}=0.56$, $\lambda_{NP}=0.86$, $\lambda_{NN}=0.19$, $\lambda_{BN}=0.76$, $\lambda_{PN}=1.61$ 。由式(4)和式(6)知,确定阈值 $\alpha' \approx 0.71$, $\beta' \approx 0.53$ 。其分类结果为: $POS_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$, $NEG_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\{x_3, x_5\}$, $BND_C(X, \alpha, \beta, \lambda)=\emptyset$ 。

根据分析可知,病人 x_3 “进一步观察再做决策”是比较合理的,但此时边界域为空集,问题退化为传统的二支决策,病人 x_3 直接被归类为放弃治疗,与第一组分类结果不一致,该组风险代价的选取是不合理的。

综上所述,不同的代价影响到不同的分类结果,并且代价

的选取不是唯一的。本文第一组选取的代价是较合理的。

结束语 本文在结合目前已有的覆盖粗糙集和 Sugeno 测度粗糙集模型研究的基础上,提出了基于覆盖的 Sugeno 测度粗糙集模型,并证明了其性质;最后结合三支决策理论,给出了基于覆盖关系的 Sugeno 测度粗糙集模型的三支决策规则,通过医疗诊断的实例验证了该模型在某种程度上可减小决策的风险,具有一定的实际意义,为三支决策理论提供了一种新方法。今后我们将进一步对该模型的其他性质以及在其他领域中的实际应用进行深入研究。

参考文献

- [1] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356
- [2] Zhang Wen-xiu, Wu Wei-zhi, Liang Ji-ye, et al. Rough set theory and method[M]. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese)
张文修, 吴伟志, 梁吉业, 等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001
- [3] Wang Ji-yi, Xu Li-ming. Probabilistic rough set models[J]. Computer Science, 2002, 29(8): 76-78 (in Chinese)
王基一, 许黎明. 概率粗糙集模型[J]. 计算机科学, 2002, 29(8): 76-78
- [4] Yao Yi-yu. Two Semantic Issues in a Probabilistic Rough Set Model[J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 108(3/4): 249-265
- [5] Huang Guang-qiu, Li Rui-yan. Multiple probabilistic rough sets [J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(33): 142-148 (in Chinese)
黄光球, 李瑞艳. 多重概率粗糙集模型[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(33): 142-148
- [6] Wang Qian-zhen, Cai Rui-ying. Application of probabilistic rough set models to mechanical fault diagnosis[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(28): 222-224 (in Chinese)
王前震, 蔡瑞英. 概率粗糙集模型在机械故障诊断中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(28): 222-224
- [7] Abo-Tabl E A. A comparison of two kinds of definitions of rough approximations based on a similarity relation[J]. Information Sciences, 2011, 181(12): 2587-2596
- [8] Zhang Yu. Several kinds of rough set model based on general binary relation[D]. Jingzhou: Bohai University, 2013 (in Chinese)
张宇. 基于一般二元关系的几种粗糙集模型[D]. 锦州: 渤海大学, 2013
- [9] Gong Xi-ling, Wang Yan-ping, Zhang Yu. Probability rough set model and Bayes decision-making under fuzzy relationship[J]. Journal of Liaoning University of Technology (Natural Science Edition), 2009, 29(5): 339-342 (in Chinese)
宫喜玲, 王艳平, 张瑜. 模糊关系下的概率粗糙集模型及其 Bayes 决策[J]. 辽宁工业大学学报(自然科学版), 2009, 29(5): 339-342
- [10] Ha Ming-hu, Li Jia, Tian Jing, et al. The key theorem of learning theory on g_λ measure spaces[C]//Proceedings of the Third International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 2004: 1904-1907
- [11] Liu Yao-hui. Rough set model based on Sugeno measure[D]. Baoding: Hebei University, 2010 (in Chinese)
刘耀辉. 基于 Sugeno 测度粗糙集模型[D]. 保定: 河北大学, 2010
- [12] Wang Yong-wei, Zhao Rong-cai, Chang De-xian, et al. Reasoning decision method based on improved theory of evidence[J]. Computer Science, 2014, 41(12): 24-29 (in Chinese)
汪永伟, 赵荣彩, 常德显, 等. 一种基于改进证据理论的推理决策方法[J]. 计算机科学, 2014, 41(12): 24-29
- [13] Xue Zhan-ao, Liu Jie, Xue Tian-yu, et al. Three-way decision based on belief function[C]// 9th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology (RSKT2014), LNAI 8818. New York: Springer, 2014: 742-752
- [14] Tian Da-zeng, Wang Lin, Wu Jing, et al. Rough set model based on uncertain measure[J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 4(3): 252-256
- [15] Zhu W, Wang Fei-yue. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets[J]. Information Science, 2003, 152(1): 217-230
- [16] Zhu W. Relationship among basic concepts in covering-based rough sets[J]. Information Sciences, 2009, 179: 2478-2486
- [17] Hu Jun, Wang Guo-yin, Zhang Qing-hua. Covering based generalized rough fuzzy set model[J]. Journal of Software, 2010, 21(5): 967-977 (in Chinese)
胡军, 王国胤, 张清华. 一种覆盖粗糙模糊集模型[J]. 软件学报, 2010, 21(5): 967-977
- [18] Wang Li-juan, Yang Xi-bei, Yang Jing-yu, et al. Comparison on covering-based rough set models[J]. Computer Science, 2012, 39(7): 229-236 (in Chinese)
王丽娟, 杨习贝, 杨静宇, 等. 基于覆盖的粗糙集模型比较[J]. 计算机科学, 2012, 39(7): 229-236
- [19] Gong Zeng-tai, Shi Zhan-hong. On the Covering Probabilistic Rough Set Models and Its Bayes Desicionsl[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(4): 142-148 (in Chinese)
巩增泰, 史战红. 基于覆盖的概率粗糙集模型及其 Bayes 决策[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(4): 142-148
- [20] Yao Yi-yu. Three-way decisions with probabilistic rough sets [J]. Information Sciences, 2010, 180(3): 341-353
- [21] Zhang Zhi-fei, Wang Rui-zhi. Applying three-way decisions to sentiment classification with sentiment uncertainty[C]// 9th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology (RSKT2014), LNAI 8818. Shanghai, China: Springer, 2014: 720-731
- [22] Zhou Zhe, Zhao Wei-bin, Shang Lin. Sentiment analysis with automatically constructed lexicon and three-way decision[C]// 9th International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology (RSKT2014), LNAI 8818. Shanghai, China: Springer, 2014: 777-788
- [23] Liu Dun, Yao Yi-yu, Li Tian-rui. Three-way investment decision with decision-theoretic rough set [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2011, 4: 66-74
- [24] Liu Dun, Li Tian-rui, Liang De-cui. Three-way government decision analysis with decision -theoretic rough sets[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 2012, 20: 119-132
- [25] Zhou Bin, Yao Yi-yu, Luo Ji-gang. A three-way decision approach to email spam filtering[C]//Proceedings of the 23th Canadian Conference on Artificial Intelligence (AI 2010), LNCS (LNAI) 6085. 2010: 28-39