

基于马氏距离的孪生多分类支持向量机

张谢锴¹ 丁世飞^{1,2}

(中国矿业大学计算机科学与技术学院 徐州 221116)¹

(中国科学院计算技术研究所智能信息处理重点实验室 北京 100190)²

摘要 孪生支持向量机(TWSVM)的研究是近来机器学习领域的一个热点。TWSVM具有分类精度高、训练速度快等优点,但训练时没有充分利用样本的统计信息。作为TWSVM的改进算法,基于马氏距离的孪生支持向量机(TMSVM)在分类过程中考虑了各类样本的协方差信息,在许多实际问题中有着很好的应用效果。然而TMSVM的训练速度有待提高,并且仅适用于二分类问题。针对这两个问题,将最小二乘思想引入TMSVM,用等式约束取代TMSVM中的不等式约束,将二次规划问题的求解简化为求解两个线性方程组,得到基于马氏距离的最小二乘孪生支持向量机(LSTMSVM),并结合有向无环图策略(DAG)设计出基于马氏距离的最小二乘孪生多分类支持向量机。为了减少DAG结构的误差累积,构造了基于马氏距离的类间可分性度量。人工数据集和UCI数据集上的实验均表明,所提算法不仅有效,而且相对于传统多分类SVM,其分类性能有明显提高。

关键词 孪生支持向量机,马氏距离,多分类,有向无环图

中图法分类号 TP181 文献标识码 A DOI 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.3.009

Mahalanobis Distance-based Twin Multi-class Classification Support Vector Machine

ZHANG Xie-kai¹ DING Shi-fei^{1,2}

(School of Computer Science and Technology, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)¹

(Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)²

Abstract Twin support vector machine (TWSVM) is a recent hot spot in the field of machine learning. TWSVM achieves fast training speed and good performance for data classification. However, it does not take full advantage of the statistical information in training samples. As an improved algorithm of TWSVM, mahalanobis distance-based twin support vector machine (TMSVM) takes the covariance of each class of data into consideration and is suitable for many real problems. However, the learning speed of TMSVM remains to be improved. Moreover, the approach only deals with binary classification problems. To solve these problems, this paper formulated a least squares version of TMSVM by considering equality type constraints instead of inequalities of TMSVM, which makes the solution follow from solving a set of linear equations instead of quadratic programming, and extended the binary classifier into a new multiclass classification algorithm with directed acyclic graph (DAG). In order to reduce error accumulation in DAG structure, a mahalanobis distance-based distance measure was designed as the class separability criterion. The experimental results on toy dataset and UCI datasets show that the proposed algorithm is efficient and has better classification accuracy than traditional multi-class SVM.

Keywords Twin support vector machine, Mahalanobis distance, Multi-class classification, Directed acyclic graph

1 引言

支持向量机(Support Vector Machine, SVM)^[1]是Vapnik等人提出的建立在统计学习理论^[2]基础上的一种机器学习算法。该方法在解决小样本、非线性及高维模式识别问题时具有明显优势。自提出以来, SVM就在理论研究和工程应用两方面受到了足够的重视。为了进一步提高SVM的性能,已经有许多改进算法被提出,例如广义特征值近似支持向

量机^[3]等。2007年, Jayadeva等人^[4]在广义特征值近似支持向量机的基础上做出进一步改进,得到了孪生支持向量机(Twin Support Vector Machine, TWSVM)。TWSVM为每一类样本求解一个超平面,使每类样本尽可能离本类的超平面近,同时尽可能地远离另一超平面,将SVM中的一个大型规划问题(Quadratic Programming Problem, QPP)转化为两个较小的二次规划,有效节省了训练时间。近来,对TWSVM的研究已成为机器学习领域的热点之一^[5]。TWSVM的各

到稿日期:2015-03-21 返修日期:2015-06-02 本文受国家重点基础研究发展规划(973计划)(2013CB329502),国家自然科学基金(61379101)资助。

张谢锴(1992—),男,硕士生,主要研究方向为机器学习、模式识别, E-mail: X_Zhang@cumt.edu.cn; 丁世飞(1963—),男,博士,教授, CCF 高级会员,主要研究方向为智能信息处理、人工智能与模式识别、机器学习与数据挖掘、粗糙集与软计算、粒度计算等, E-mail: dingsf@cumt.edu.cn。

种改进算法^[6-14]不断地被提出,例如针对 TWSVM 忽略了样本所隐含的统计信息的问题,基于马氏支持向量机的孪生支持向量机(Twin Mahalanobis Distance-based Support Vector Machine, TMSVM)^[15]考虑了样本间的相关性信息,提升了算法的泛化能力。

虽然, TWSVM 的发展已经取得了丰硕的成果,但是大部分改进算法都是为解决二分类问题而提出的。如何将它们有效地推广到多分类问题的解决中是一个非常有实际意义的研究内容。目前已有不少多分类 TWSVM 算法^[16-20]被提出。例如,“一对多”孪生多分类支持向量机^[21]运用“一对多”策略将二分类孪生支持向量机推广为多分类算法,基于最优分类决策树的孪生多分类支持向量机使用二分类 TWSVM 作为节点构成一个可用于多分类的二叉树分类器^[22]等。但是,这些算法都是将 TWSVM 或 LSTWSVM 结合常见多分类策略简单地推广到多分类问题中,并没有将更多 TWSVM 改进算法的优秀特性结合进来,特别是没有考虑样本隐含的统计信息,降低了其泛化能力。对此,本文将 TMSVM 充分考虑样本协方差信息的特点推广到多分类中,提出了一种基于马氏距离和 DAG 的最小二乘孪生多分类支持向量机算法。该算法不论是在 DAG 结构安排上还是单个分类器的分类过程中都能充分考虑样本的相关性信息,提升了算法的泛化能力。

本文第 2 节对 TWSVM、TMSVM 进行了简单的回顾和分析;第 3 节介绍所提出的新算法,将最小二乘思想引入 TMSVM 得到了基于马氏距离的最小二乘支持向量机,针对 LSTMSVM 设计了一种基于马氏距离的类间可分性度量用以确定最优分类 DAG 结构,结合最优 DAG 策略和 LSTMSVM 得到了多分类算法;第 4 节是实验;最后总结全文并对未来研究方向进行展望。

2 相关理论

2.1 孪生支持向量机

假设在 n 维空间 R^n 中有 m 个训练样本 x_i , 两类样本分别用矩阵 A, B 表示, A, B 每一行代表一个样本。TWSVM 的两个超平面可以通过求解下面两个二次规划问题得到^[4]:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \|K(A, C^T)w_1 + e_1 b_1\|^2 + c_1 e_1^T \xi \\ \text{s. t. } & -(K(B, C^T)w_1 + e_2 b_1) + \xi \geq e_2, \xi \geq 0 \\ \min & \frac{1}{2} \|K(B, C^T)w_2 + e_2 b_2\|^2 + c_2 e_2^T \eta \\ \text{s. t. } & -(K(A, C^T)w_2 + e_1 b_2) + \eta \geq e_1, \eta \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $C=[A; B]$, e_1 是与 $K(A, C^T)$ 具有相同行数的元素全为 1 的列向量, e_2 是与 $K(B, C^T)$ 具有相同行数的元素全为 1 的列向量。

测试样本离哪个超平面近就被归于对应类,即决策函数为:

$$f(x) = \begin{cases} +1, & K(x^T, C^T)w_1 + b_1 < K(x^T, C^T)w_2 + b_2 \\ -1, & K(x^T, C^T)w_1 + b_1 > K(x^T, C^T)w_2 + b_2 \end{cases} \quad (2)$$

相对于 SVM, TWSVM 算法不仅训练速度明显加快,而且精确度也有所提高。但其仅考虑了样本间几何距离信息,其泛化能力仍有待提高。

2.2 基于马氏距离的孪生支持向量机

为提升 TWSVM 的泛化能力,彭新俊等^[13]利用样本数据协方差信息设计了基于马氏距离的核函数计算方法,得到了基于马氏距离的 TWSVM。

假设在 n 维空间 R^n 中有 m_1 个正类样本及 m_2 个负类样本,两类样本分别用矩阵 A, B 表示, A, B 每一行就代表一个样本。 $y_i \in \{-1, +1\}$ 表示对应样本的标签。TMSVM 的两个非平行超平面通过求解如下两个 QPPs 得到。

$$\min \frac{1}{2} \|K_A(A, C)w_1 + e_1 b_1\|^2 + c_1 \xi \quad (3)$$

$$\text{s. t. } -(K_A(B, C)w_1 + e_2 b_1) \geq e_2 - \xi, \xi \geq 0$$

$$\min \frac{1}{2} \|K_B(B, C)w_2 + e_2 b_2\|^2 + c_2 \eta \quad (4)$$

$$\text{s. t. } -(K_B(A, C)w_2 + e_1 b_2) \geq e_1 - \eta, \eta \geq 0$$

其中, c_1 和 c_2 是两个惩罚参数, η 和 ξ 是松弛变量, $K_A(x, y)$ 、 $K_B(x, y)$ 是基于马氏距离的核函数。

如果令 S_A 表示通过变换 $\varphi(x)$ 映射到高维空间后正类样本的协方差矩阵,即

$$\begin{aligned} S_A &= E\{[\varphi(x) - E(\varphi(x))]^T [\varphi(x) - E(\varphi(x))] | y=1\} \\ &= \varphi(A) J_1 J_1^T \varphi(A) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $J_1 J_1^T = \frac{1}{m_1} (I - \frac{1}{m_1} e_1 e_1^T)$ 。那么,

$$\begin{aligned} K_A(x_i, x_j) &= \varphi(x_i) S_A^{-1} \varphi(x_j)^T \\ &\approx \sigma^{-1} K(x_i, x_j) - \sigma^{-1} K(x_i, x_j) J_1 (\sigma I + \\ &\quad J_1^T K_A J_1)^{-1} J_1^T K(A, x_j) \\ &= \sigma^{-1} K(x_i, x_j) - \sigma^{-2} K(x_i, x_j) [J_1 J_1^T - \\ &\quad \sigma^{-1} J_1 J_1^T (K_A^{-1} + \sigma^{-1} J_1 J_1^T)^{-1} J_1 J_1^T] \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $K(x_i, x_j) = (\varphi(x_i) \cdot \varphi(x_j))$, σ 是为保证矩阵可逆而引入的正则化参数。同理可计算 $K_B(x_i, x_j)$ 。

3 本文的多分类算法

3.1 最小二乘 TMSVM

由于需要计算马氏距离, TMSVM 分类速度比 TWSVM 慢得多,这对需构造多个二分类器的 DAG 多分类策略是非常不利的。为了提升 TMSVM 的计算速度,引入最小二乘思想^[6],用等式约束代替不等式约束,使得 TMSVM 中 QPPs 的求解转化为非线性方程组的求解。

最小二乘 TMSVM (LSTMSVM) 模型为:

$$\min \frac{1}{2} \|K_A(A, C)w_1 + e_1 b_1\|^2 + \frac{c_1}{2} \xi^T \xi \quad (7)$$

$$\text{s. t. } -(K_A(B, C)w_1 + e_2 b_1) = e_2 - \xi, \xi > 0$$

$$\min \frac{1}{2} \|K_B(B, C)w_2 + e_2 b_2\|^2 + \frac{c_2}{2} \eta^T \eta \quad (8)$$

$$\text{s. t. } (K_B(A, C)w_2 + e_1 b_2) = e_1 - \eta, \eta > 0$$

其中, e_1 和 e_2 是元素全为 1 的分别与 $K_1(A, C)$ 和 $K_1(B, C)$ 行数相同的列向量。

将式(7)中等式约束代入目标函数,式(7)可以转化为:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \|K_A(A, C)w_1 + e_1 b_1\|^2 + \frac{c_1}{2} \|K_A(B, C)w_1 + \\ & e_2 b_1 + e_2\|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

令式(9)的目标函数的梯度为零,上述无约束问题的解可以通过求解下面的线性方程组获得。

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = -(\frac{1}{c_1} H^T H + G^T G)^{-1} G e_1^T \quad (10)$$

其中, $H = [K_A(A, C), e_1]$, $G = [K_A(B, C), e_2]$ 。同理可以求解式(8)。

LSTMSVM 在不丢失分类准确度的情况下, 相对 TMSVM, 训练速度明显提升。DAG 策略需要训练多个二分类器, 提高每个二分类器的训练速度能够有效提升采用 DAG 策略实现的多分类算法的整体速度。

3.2 基于马氏距离的类间可分性度量

DAG 结构存在误差累积问题^[19]。为减少累积误差, 必须合理组织结构, 使待分类样本先输入最容易分离的两个类所对应的二分类器, 越难分离的两个类对应的分类器放在 DAG 的越底层。普遍采用的欧氏距离得到的类间可分性度量仅仅考虑了类中心点间的欧氏距离大小, 并未考虑样本间的相关关系。马氏距离能够将这种样本间包含的隐藏信息考虑进来, 因此能够更有效地度量两个样本总体的相似程度^[23]。下面用马氏距离得到一种用于确定 DAG 最优结构的类间可分性度量。

假设 n 维空间 R^n 中存在 m 个训练样本, 这些样本可分为 l 类, $A_i (i=1, 2, 3, \dots, l)$ 分别表示这 l 类样本, $m_i (i=1, 2, 3, \dots, l)$ 分别表示每类训练样本的个数。那么, 通过函数 φ 映射到高维希尔伯特空间后的类 A_i 中某个样本 x_k 到类 A_j 的马氏距离为:

$$\begin{aligned} d_{ij}^k &= ((\varphi(x_k) - \mu_j)^T S_j^{-1} (\varphi(x_k) - \mu_j))^{1/2} \\ &= (K_{A_j}(x_k, A_j) - \frac{2}{m_j} \sum_{n=1}^{m_j} K_{A_j}(x_k, x_{jn}) + \\ &\quad \frac{1}{m_j} \sum_{n=1}^{m_j} K_{A_j}(x_{jn}, x_{jn}))^{1/2} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, μ_j , S_j 是希尔伯特空间中第 j 类训练样本数据的均值和协方差矩阵。

于是可以使用式(12)衡量两个类被正确分类的容易程度。

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{1}{m_i} \sum_{k=0}^{m_i} (d_{ij}^k)^2 + \frac{1}{m_j} \sum_{k=0}^{m_j} (d_{ji}^k)^2) \quad (12)$$

上式是 A_i 到 A_j 的类间马氏距离和 A_j 到 A_i 的类间马氏距离的平均值, 因此 D_{ij} 越大, 两类对应的两个类的样本将越容易被正确分类。

3.3 本文算法描述

结合上面的分析, 本文算法描述如下。

步骤 1 计算可分性度量。计算各类训练样本的均值、协方差矩阵, 进而按照式(12)计算各类训练样本两两之间的可分离性度量 $\{D_{ij}\}$, 将所得的可分性度量从大到小排列。

步骤 2 构造二分类器结点。依次选取训练集中的两类训练样本训练得到总共 $l(l-1)/2$ 个二分类 LSTMSVM。

步骤 3 构造最优 DAG。记 $D_{i_0 j_0}$ 为最大可分性度量。那么将训练第 i_0 类样本和第 j_0 类样本得到的二分类 LSTMSVM 作为根节点, 在剩余二分类器中选取分别与第 i_0 类训练样本和第 j_0 类训练样本有关且可分性度量最大的作为第二层节点, 以此类推, 得到一个最优有向无环图。

步骤 4 对新样本进行分类。将待分类的新样本依次输入到按照步骤 3 得到 DAG LSTMSVM 进行分类。如果当前分类器是叶子节点, 则当前输出结果即为该样本分类结果; 否则根据当前结果向下进入下一层分类器继续分类。

算法流程如图 1 所示。

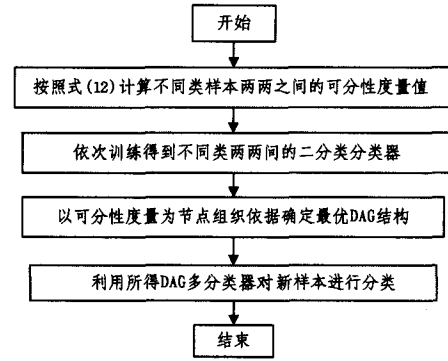


图 1 算法流程

3.4 算法分析

下面对本文算法的时间复杂度和理论合理性进行简单的分析。为了表述简单, 以线性情况为例进行说明, 采用其它核函数时完全可以得到类似的结论。

首先分析 LSTMSVM 的时间复杂度。在训练阶段, 不同于 TWSVM 和 TMSVM 需要通过迭代求解二次规划问题来获得问题的解, LSTMSVM 模型求解仅需计算式(11)即可, 主要时间耗费在于式(10)中矩阵逆的计算, 时间复杂度即为矩阵求逆运算的时间复杂度。而计算马氏距离核的时间复杂度为 $O(l^{2.3})$ ^[15]。在预测分类阶段, LSTMSVM 时间复杂度与 TWSVM、TMSVM 以及 SVM 都相同, 主要时间耗费为矩阵乘法的运算, 时间复杂度为 $O(l^2)$ 。对于 DAG LSTMSVM 算法整体, 当算法被用于共有 m 个样本的 k 分类问题时, 共需训练 $k(k-1)/2$ 个二分类 LSTMSVM, 因此其时间复杂度为 $O(k(k-1)/2) * O((m/k)^3) = O(m^3/k)$ 。

接下来对马氏距离核进行简单分析。事实上, 样本方差 S 可以分解为 $S = T^T \Lambda T$, 其中 T 是正交矩阵, Λ 为元素全为正的对角矩阵。于是 TMSVM 中使用的线性马氏距离概念可以表示为 $d = x^T S^{-1} x = (Tx)^T \Lambda^{-1} (Tx)$ 。可以看出马氏距离即为将样本做一个正交变换后再求欧氏距离。正交变换消除了类内样本相关性的影响, 并且使距离计算不受变量单位的影响^[23], 因此经过正交变换后的样本间欧氏距离更能反映类间可分性的大小, 特别是当分类器 TMSVM 中已经是马氏距离作为样本间距离评判标准时, 使用马氏距离构造的类间可分性度量作为 DGA 策略中分类顺序的依据可以使整个分类过程的样本相似度评判标准一致。

4 实验及结果分析

本节对所提算法进行实验验证。本文实验均采用十交叉验证。运行环境为 2GB 内存, CORE i5 处理器, 2.6GHz 主频, Windows2007 操作系统。全部算法均使用 Matlab7.5 实现和运行。

4.1 人工数据集上的实验

为了验证本文算法的有效性, 模拟正态分布生成一组三分类人工数据集用于实验, 该人工数据集中第 1 类和第 3 类各包含 100 个样本点, 第二类样本个数为 60。使用欧氏距离作为可分性度量时得到的 DGA 根节点对应于类 2 和类 3 的分类器。使用本文可分性度量, DAG 的根节点对应于类 1 与类 2 的分类器。最终分类结果如图 2 所示, 可以看出采用本文算法所得分类结果更好。

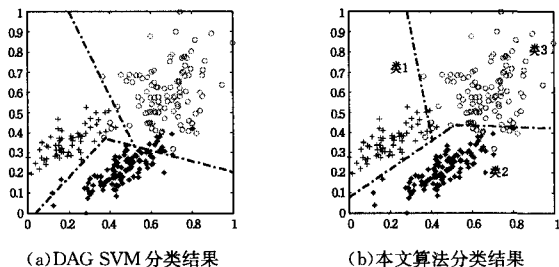


图2 分类结果比较

4.2 UCI 数据集上的实验

为了进一步验证本文算法的有效性,选用 UCI 机器学习数据库中几个常用的数据集对算法进行测试,数据集的具体信息如表 1 所列。选取最常用的 1-v-1 SVM 以及本文算法的基础 DGA TWSVM 作为对比算法。实验结果如表 2—表 5 所列。表 2、表 3 分别是选用线性核函数时实验所得分类准确率和训练时间,表 4、表 5 分别为选用 Gauss 径向基核函数时实验所得分类精度和训练时间。表中分类精度为十交叉验证所得的平均结果。训练时间为十交叉验证所用的全部训练时间。

表1 数据集信息

数据集	样本数	样本维数	类别数
Wine	178	13	3
Glass	214	9	6
Seeds	210	7	3
Dermatology	358	34	6
Soybean	47	35	3
Iris	150	4	3
Segment	2310	19	7
Dna	3186	180	3
Landsat	2000	36	6

表2 采用线性核时算法的分类正确率对比

数据集	1-v-1 SVM	DAG TWSVM	本文算法
Wine	97.86	98.22	98.22
Glass	58.72	60.65	60.81
Seeds	92.90	95.65	96.19
Dermatology	97.48	97.78	96.98
Soybean	63.89	64.98	64.98
Iris	96.20	96.32	97.33
Segment	96.34	95.34	96.07
Dna	94.33	95.42	95.75
Landsat	83.34	82.64	83.63

表3 采用线性核时实验训练时间对比

数据集	1-v-1 SVM	DAG TWSVM	本文算法
Wine	0.311	0.128	0.019
Glass	0.530	0.232	0.097
Seeds	0.742	0.231	0.062
Dermatology	1.153	0.553	0.097
Soybean	0.078	0.038	0.026
Iris	0.587	0.138	0.001
Segment	109.22	32.61	1.023
Dna	79.85	20.07	2.971
Landsat	96.36	17.73	0.914

表4 采用 Gauss 径向基核时算法的正确率对比

数据集	1-v-1 SVM	DAG TWSVM	本文算法
Wine	98.33	97.26	98.34
Glass	53.72	53.65	59.41
Seeds	92.90	94.65	96.19
Dermatology	97.77	97.76	96.85
Soybean	63.07	64.93	64.93
Iris	97.23	97.03	97.23
Segment	97.51	96.16	96.41
Dna	95.46	95.20	95.61
Landsat	87.34	85.97	86.65

表5 采用 Gauss 径向基核时实验训练时间对比

数据集	1-v-1 SVM	DAG TWSVM	本文算法
Wine	0.766	0.226	0.032
Glass	1.370	0.370	0.173
Seeds	1.105	0.386	0.129
Dermatology	1.565	0.733	0.153
Soybean	0.129	0.099	0.098
Iris	0.603	0.243	0.055
Segment	196.87	65.74	23.94
Dna	130.85	51.58	19.35
Landsat	156.36	47.73	24.91

4.3 实验结果分析

从人工数据集上的实验结果(见图 2)可以看出,使用本文类间可分性度量确定的 DAG 结构将错误分类发生的位置尽量控制在叶子节点上,减少了累积误差的产生。在 UCI 数据集上通过实验对本文算法整体效果进行了验证。表 2、表 3 表明在采用线性核函数时,相对传统多分类 SVM 算法,本文算法不但分类精度普遍提升,而且训练速度也明显加快。相对于 DGA TWSVM,本文算法在保证正确率的同时加快了训练速度。表 4、表 5 表明在采用高斯径向基核函数时,本文算法的分类精度普遍优于传统多分类 SVM 算法,并且尽管马氏距离高斯径向基核函数的较大计算量导致算法整体速度下降,但所提算法仍明显快于传统多分类 SVM 算法和 DGA TWSVM 算法。因此 UCI 数据集上的实验表明,本文算法相对于传统 SVM 多分类算法不论是在训练速度还是分类精度上都有着一定的优势。可以看出,本文算法在保留二分类 TMSVM 的分类优点的基础上适用于各种多分类问题。

结束语 本文多分类算法在分类过程中考虑了样本协方差信息,样本之间的相关性对分类具有重要作用。因此本文算法相对于多分类 SVM 算法不但训练速度更快,而且分类精度也明显更高。特别是针对二分类 TMSVM 和 DAG 策略设计的基于马氏距离的类间可分性度量能够有效评价分类的容易程度。实验也表明了该算法的有效性。不足之处在于马氏距离中的求逆运算的计算量较大。如何进一步提升算法的训练速度、自动选择参数以及进一步挖掘利用样本中隐含的统计和结构信息是下一步需要研究的问题。

参考文献

- [1] Cortes C, Vapnik V N. Support vector networks [J]. Machines Learning, 1995, 20(2): 273-297
- [2] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory[M]. New York: Springer, 1998
- [3] Mangasarian O L, Wild E. Multisurface proximal support vector machine classification via generalized eigenvalues [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006, 28(1): 69-74
- [4] Jayadeva, Khemchandni R, Chandra S. Twin support vector machines for pattern classification[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(5): 905-910
- [5] Ding Shie-fei, Yu Jun-zhao, Qi Bing-juan, et al. An overview on twin support vector machines[J]. Artificial Intelligence Review, 2014, 42(2): 245-252
- [6] Kumar M A, Gopal M. Least squares twin support vector machines for pattern classification[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(4): 7535-7543
- [7] Shao Yuan-hai, Chen Wei-jie, Zhang Jing-jing, et al. An efficient weighted Lagrangian twin support vector machine for imba-

- lanced data classification[J]. Pattern Recognition, 2014, 47(9): 3158-3167
- [8] Wang Di, Ye Qiao-lin, Ye Ning. Localized multi-plane TWSVM classifier via manifold regularization[C]//2010 Second International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 2011. New York: IEEE, 2010: 70-73
- [9] Wang Ya-nan, Zhao Xi, Tian Ying-jie. Local and global regularized twin SVM[J]. Procedia Computer Science, 2013, 18: 1710-1719
- [10] Kumar M A, Gopal M. Application of smoothing technique on twin support vector machines[J]. Pattern Recognition Letters, 2008, 29(13): 1842-1848
- [11] Ding Shi-fei, Huang Hua-juan, Yu Jun-zhao, et al. Polynomial smooth twin support vector machines based on invasive weed optimization algorithm[J]. Journal of Computers, 2014, 9(5): 2063-2071
- [12] Ding Shi-fei, Huang Hua-juan, Shi Zhong-zhi. Weighted smooth CHKS twin support vector machines[J]. Journal of Software, 2013, 24(11): 2548-2557(in Chinese)
丁世飞, 黄华娟, 史忠植. 加权光滑 CHKS 孪生支持向量机[J]. 软件学报, 2013, 24(11): 2548-2557
- [13] Ding Shi-fei, Wu Fu-lin, Shi Zhong-zhi. Wavelet twin support vector machine[J]. Neural Computing and Applications, 2014, 25(6): 1241-1247
- [14] Xie Xi-jiong, Sun Shi-liang. Multitask centroid twin support vector machines[J]. Neurocomputing, 2015, 149(2): 1085-1091
- [15] Peng Xin-jun, Xu Dong. Twin Mahalanobis distance-based support vector machines for pattern recognition[J]. Information Sciences, 2012, 200: 22-37
- [16] Chu Mao-xiang, Wang An-na, Gong Rong-fei, et al. Multi-class Classification Methods of Enhanced LS-TWSVM for Strip Steel Surface Defects[J]. Journal of Iron and Steel Research International, 2014, 21(2): 174-180
- [17] Xu Yi-tian, Guo Rui. A twin hyper-sphere multi-class classification support vector machine[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 27(4): 1783-1790
- [18] Yang Zhi-xia, Shao Yuan-hai, Zhang Xiang-sun. Multiple birth support vector machine for multi-class classification[J]. Neural Computing and Applications, 2013, 22(1): 153-161
- [19] Chen J, Ji G R. Multi-class LSTSVM classifier based on optimal directed acyclic graph[C]//The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering, 2010. New York: IEEE, 2010: 100-104
- [20] Xu Yi-tian, Guo Rui, Wang Lai-sheng. A twin multi-class classification support vector machine[J]. Cognitive Computation, 2013, 5(4): 580-588
- [21] Xie Jun-ying, Hone Ka-ta, Xie Wei-xin, et al. Extending twin support vector machine classifier for multi-category classification problems[J]. Intelligent Data Analysis, 2013, 17(4): 649-664
- [22] Shao Yuan-hai, Chen Wei-jie, Huang Wen-biao, et al. The best separating decision tree twin support vector machine for multi-class classification[J]. Procedia Computer Science, 2013, 17: 1032-1038
- [23] Wang Xue-min. Applied multivariate analysis(4th edition)[M]. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press, 2014: 25-34(in Chinese)
王学民. 应用多元分析(第4版)[M]. 上海: 上海财经大学出版社, 2014: 25-34

(上接第 26 页)

- [2] Tomovsk Z, Garra R. Analytic Solutions of Fractional Integro-Differential Equations of Volterra Type with Variable Coefficients[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis, 2014, 17(1): 38-60
- [3] Siddique U, Hasan O. Formal Analysis of Fractional Order Systems in HOL[C]//2011 IEEE Formal Methods in Computer-Aided Design. 2011: 163-170
- [4] Shi Li-kun. Formal Analysis of Fractional Systems Based on Grunwald-Letnikov Definition using High Order Logic[D]. Beijing: Capital Normal University, 2014(in Chinese)
师丽坤. 基于 Grunwald-Letnikov 定义的分数阶系统高阶逻辑形式化分析[D]. 北京: 首都师范大学, 2014
- [5] Zhao Chun-na, Li Ying-shun, Lu Tao. Analysis and Design of Fractional Systems [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010: 13-20(in Chinese)
赵春娜, 李英顺, 陆涛. 分数阶系统分析与设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 13-20
- [6] Harrison J. Theorem Proving with the Real Numbers [M]. Springer-Verlag, 1998
- [7] Gu Wei-qing, Shi Zhi-ping, Guan Yong, et al. Formalization of Gauge Integration Theory in HOL4 [J]. Computer Science, 2013, 40(2): 191-194(in Chinese)
谷伟卿, 施智平, 关永, 等. Gauge 积分在 HOL4 中的形式化[J]. 计算机科学, 2013, 40(2): 191-194
- [8] Zhao Gang, Zhao Chun-na, Guan Yong, et al. Formalization of Laplace Transform Calculus in HOL4 [J]. Journal of Chinese Computer System, 2014, 35(9): 2178-2181(in Chinese)
赵刚, 赵春娜, 关永, 等. 拉普拉斯变换微积分性质在 HOL4 中的形式化[J]. 小型微型计算机系统, 2014, 35(9): 2178-2181
- [9] Shi Li-kun, Zhao Chun-na, Guan Yong, et al. Formalization of Real Binomial Coefficient in HOL4 [J]. Computer Science, 2014, 41(2): 15-18(in Chinese)
师丽坤, 赵春娜, 关永, 等. 实数二项式系数在 HOL4 中的形式化[J]. 计算机科学, 2014, 41(2): 15-18
- [10] Zhou Ji-liu, Pu Yi-fei, Liao Ke. Fractional Calculus Principle and its Application in the Analysis and Processing of Modern Signal [M]. Beijing: Science Press, 2006: 14-16(in Chinese)
周激流, 蒲亦菲, 廖科. 分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 14-16
- [11] Wang Chun-yang. Study on Fractional Order PID⁺ Controller Parameter Tuning methods and Design[D]. Jilin: Jilin University, 2013(in Chinese)
王春阳. 分数阶 PID 控制器参数整定方法与设计研究[D]. 吉林: 吉林大学, 2013
- [12] Wang Ji-feng. Analysis of Control Performance for Fractional Order Systems[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 13-14(in Chinese)
汪纪锋. 分数阶系统控制性能分析[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 13-14
- [13] Chen Wen, Sun Hong-guang, Li Xi-cheng. Fractional Derivative Model of Mechanical and Engineering Problems [M]. Beijing: Science Press, 2010: 18-19(in Chinese)
陈文, 孙洪广, 李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 18-19