# 分数阶微积分定义的一致性在 HOL4 中的验证

李姗姗[1] 赵春娜[1] 关 永[1] 施智平[1] 王 瑞[1] 李晓娟[1] 叶世伟[2]
(首都师范大学信息工程学院高可靠嵌入式系统技术北京市工程研究中心 北京 100048)[1]
(中国科学院大学信息科学与工程学院 北京 100049)[2]

**摘 要** 分数阶微积分有3种常用的定义:Grunwald-Letnikov 定义、Riemann-Liouville 定义以及 Caputo 定义,3种定义之间存在着一定的联系,在一定条件下,它们可以相互转换。首先在高阶逻辑定理证明器 HOL4 中使用实数、积分、极限、超越函数等定理建立了基于 Caputo 定义的分数阶微积分形式化模型;然后验证了该定义与 Grunwald-Letnikov 定义、Riemann-Liouville 定义之间的关系,实现了这3种常用定义在 HOL4 中的转换,在一定程度上使这3种定义达到了统一,完善了高阶逻辑定理库。

**关键词** 分数阶微积分,定理证明,Caputo 定义,一致性

**中图法分类号** TP301.2 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.3.004

## Formalization of Consistency of Fractional Calculus in HOL4

LI Shan-shan[1] ZHAO Chun-na[1] GUAN Yong[1] SHI Zhi-ping[1] WANG Rui[1] LI Xiao-juan[1] YE Shi-wei[2]
(Beijing Key Laboratory of Electronic System Reliability Technology, College of Information Engineering Capital Normal University, Beijing 100048, China)[1]
(College of Information Science and Engineering, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)[2]

**Abstract** Fractional calculus has three commonly used definitions, including Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo definition. There are connections among these three kinds of definitions. They are interchangeable under certain conditions. This paper established a formal model of fractional calculus based on Caputo definition in the higher-order logic proof tool HOL4 using real, integral, limitation and transcendental functions. In order to achieve the conversion of these three definitions in HOL4, we verified the relationships among Caputo, Grunwald-Letnikov and Riemann-Liouville definition. This work will make these three definitions unite in a certain extent, and will also perfect the theo-rem library of higher-order logic.

**Keywords** Fractional calculus, Theorem proving, Caputo definition, Consistency

## 1 引言

近年来,随着人们对精准度要求的提高,分数阶微积分被广泛地应用于实际系统的分析中[1]。而对分数阶系统的分析有两种常用的方法,第一种是手工证明的方法,这种方法过程繁琐,不利于复杂问题的处理,并且由于人为错误的风险,很难保证复杂证明的正确性;第二种常用的分析方法是基于计算机的模拟仿真和计算机代数系统,模拟仿真的方法利用近似模型进行分析,这种方法并不能保证分析的精确性和可靠性。计算机代数系统以字符串作为运算单位进行符号运算,它利用核心算法高效地进行大规模代数运算,可以精确推导出符号表达式的解,这在一定程度上避免了数值计算解不精确的问题。但是对庞大的符号集进行运算的算法并没有经过验证,所得到的结果仍有可能存在问题。形式化方法近几十年在各个领域取得的成就为分数阶系统的分析提供了另一种思路。

形式化方法运用数学方法表达系统的规约或系统的性质,并且根据数学理论来评估所设计的系统是否满足系统的规约或具有所期望的性质。该方法建立在严格的数学基础上,由于数学理论严谨的逻辑性、规律性和确定性,这种方法能克服传统方法精确度不高的缺点,能保证分析的正确性和可靠性。形式化方法主要有模型检测和定理证明两种,由于分数阶系统阶次的任意性、连续性并且涉及到超越函数,基于高阶逻辑的定理证明器更适合于分数阶系统的建模与验证。

到稿日期:2015-01-31 返修日期:2015-04-06 本文受国际科技合作计划项目(2010DFB10930,2011DFG13000),国家自然科学基金项目(60873006,61070049,61170304,61104035,61174145,61201378),北京市自然科学基金项目,北京市优秀人才项目(4122017,KZ201210028036,KM201010028021,2012D005016000011)资助。

**李姗姗**(1990—),女,硕士生,主要研究方向为形式化验证,E-mail:shanshan_xiong@126.com;**赵春娜**(1978—),女,博士,副教授,主要研究方向为形式化验证、分数阶系统建模与控制;**关 永**(1966—),男,博士,教授,主要研究方向为电子系统健康状态预测与管理、形式化验证、高可靠嵌入式系统;**施智平**(1974—),男,博士,副研究员,CCF 会员,主要研究方向为形式化验证与视觉信息处理;**王 瑞**(1981—),女,博士,讲师,主要研究方向为形式化验证和高可靠嵌入式系统;**李晓娟**(1968—),女,博士,教授,主要研究方向为形式化验证与计算机网络;**叶世伟**(1968—),男,博士,副教授,主要研究方向为智能信息处理。

定理证明将系统及其属性都形式化为数学模型，再由数学模型转换为逻辑模型，从逻辑上判断设计的正确性，这是最为严格和规范的方法，结论的可信度也最高。

分数阶系统的分析以分数阶微积分为基础，分数阶微积分不仅是很好的建模工具，而且还可以从逻辑上证明系统的有效性。分数阶微积分至今已有 300 多年的历史，许多数学家从不同分析角度入手，结合实际应用，分别给出了分数阶微积分运算的不同定义，因此，目前分数阶微积分存在着多个运算定义，各定义的合理性与科学性已经在实际中得到检验，常用的定义有 Grunwald-Letnikov（G_L）定义、Riemann-Liouville(R_L)定义和 Caputo 定义[2]。这 3 种定义有联系也有区别，在某些条件下，三者是等价的，可以进行相互转换。分数阶微积分与整数阶微积分几乎是一同出现的，前者没有得到广泛应用的原因之一就是到现在为止也不存在一个统一的定义，这在一定程度上限制了分数阶微积分的发展及其在实际中的应用。本文验证了 3 种常用定义之间的关系，实现了定义之间的相互转换，在一定条件下实现了 3 种定义之间的统一。

定理证明与分数阶微积分相结合的研究工作中，Umair Siddique 和 Osman Hasan[3]用高阶逻辑方法对分数阶微积分的 R_L 定义及 Gamma 函数的一些相关性质进行了形式化，并对分数阶积分器和分数阶微分器进行了形式化分析。师丽坤[4]在定理证明器 HOL4 中形式化了分数阶微积分的 G_L 定义，分析了分数阶 FC 元件，并实现了对分数阶位置伺服系统的建模与验证。定理证明器中，对系统进行建模和推理要依赖于定理库中的定义与定理，定理库中的定义与定理越多，系统的建模和推导能力就越强。本文根据定理证明的高可靠性和完备性，先完成定理证明系统中分数阶微积分 Caputo 定义的形式化建模，然后验证分数阶微积分 3 种常用定义在一定条件下存在的一致性。本文分数阶微积分的形式化不仅会提高 HOL4 的建模和推导能力，同时实现了分数阶微积分 3 种常用定义在 HOL4 中的转换，在一定程度上促进了定理证明器在分数阶系统建模与分析中的应用。此外，HOL4 作为计算机辅助定理证明工具之一，是一种数学与信息科学交叉的验证方法，其基于高阶逻辑进行演算与推导的本质丰富了计算机科学基础种类的应用，特别是计算机逻辑演算的发展与应用，而其人机交互的特征使得人们可以更好地利用计算机代替用户进行推理与验证，并且用户能检验验证步骤的正确与否，提高效率与准确率。分数阶微积分定义在高阶逻辑中的验证将有助于利用计算机来检验复杂系统的安全性和精准性，从而推动计算机科学的发展。

本文第 2 节介绍了基于 Caputo 定义的分数阶微积分，并在高阶逻辑定理证明器 HOL4 中建立了它的形式化模型；第 3 节简单介绍了分数阶微积分另外两种常用的 G_L 和 R_L 定义，比较了各定义的优缺点，分析了各定义间的关系，并在定理证明器 HOL4 中对其进行了验证；最后总结全文。

## 2 基于 Caputo 定义的分数阶微积分及其形式化

分数阶微积分起源于 1695 年。它将传统意义上的整数阶微积分的阶次由整数扩展到非整数，能更准确地描述实际系统。在处理实际问题时需要尽量避免不具备物理意义或者难以进行物理解释的概念出现，而分数阶微积分的其他定义恰恰存在着这样的问题。针对这一问题，M. Caputo 于 1967 年提出了分数阶微积分 Caputo 定义，该定义具有整数阶导数初值，在建模应用及积分变换中满足的初始条件以整数阶微积分的形式给出，能够有效应用于实际，因此被广泛应用于实际问题的建模。基于 Caputo 定义的分数阶微积分统一式如式(1)所示[5]。

$$ {}_a^C D_t^v f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-v)}\int_a^t \frac{f^{(m)}(x)}{(t-x)^{v-m+1}}\mathrm{d}x \tag{1} $$

式中，$m-1<v<m, m\in \mathbb{N}$；${}_aD_t^v$ 是分数阶微积分操作算子，表示对函数 $f(t)$ 求 $v$ 阶微积分，$t$ 和 $a$ 是操作算子的上限和下限。这是分数阶微积分 Caputo 定义的统一表达式，当 $v>0$ 时，表示 $v$ 阶微分；当 $v<0$ 时，表示 $v$ 阶积分；当 $v=0$ 时，不对原函数 $f(t)$ 做任何操作。本文为了区分不同的定义，在算子的左上角做了区分，算子 ${}_a^C D_t^v$ 左上角的 $C$ 是 Caputo 的简称，表示该式是 Caputo 定义。另外，式(1)中，$\Gamma(\cdot)$是伽马函数[5]，其定义如式(2)所示。

$$ \Gamma(z)=\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t \tag{2} $$

其中，$z$ 在复平面的右半平面取值，即 $\mathrm{Re}(z)>0$。伽马函数是分数阶微积分中最为常用的基本函数，又称第二类 Euler 积分，它将阶乘的概念从自然数推广至实数域甚至复数域，当变量为自然数时，就是人们非常熟悉的阶乘表达式，即 $n!$，伽马函数因此又被称为广义阶乘。

在高阶逻辑定理证明器 HOL4 中还没有分数阶微积分 Caputo 定义的形式化模型。本文将在 HOL4 中已形式化的实数库[6]、超越函库、整数阶积分库[7]等理论库的基础上，利用伽马函数在 HOL4 中的形式化，在 HOL4 中建立分数阶微积分 Caputo 定义的形式化模型。Caputo 定义对原函数有一定的要求，这里首先给出 Caputo 定义存在性条件的形式化。

**定义 1** 分数阶微积分 Caputo 定义存在条件定义

*val frac_c_exists_def=⊢∀f v a t n l.*

*frac_c_exists f v a t n l=(∀m. m<=(flr v+1)==>(λt. n_order_deriv m f t) differentiable t)∧(∀v. integrable(a,t−1/2 pow n) (λx. (((t−x) rpow (&(flr v)+1−v−1))*(n_order_deriv (flr v+1) f x))))∧(λn. 1/Gamma (&(flr v)+1−v)*(integral(a,t−1/2 pow n) (λx. (((t−x) rpow (&(flr v)+1−v−1))*(n_order_deriv (flr v+1) f x)))))−−>l)*

上述定义中涉及到 3 个条件，用符号“∧”结合起来。第一个条件是微积分的原函数必须是 $m$ 阶可导的，这里 $m$ 满足 $m\leqslant\lfloor v\rfloor+1$，$v$ 是微积分的阶次，$\lfloor\cdot\rfloor$表示向下取整，其在 HOL4 中的形式化是函数 *flr*。此外，从式(1)可以看出，对原函数求 $m$ 阶导数后，还要计算导函数的一阶积分，这就要求导函数是绝对可积的，这也是上述定义中第二个条件所表达的，HOL4 中用 *integrable(a,b) f* 表示函数 $f$ 在区间$(a,b)$上是可积的。Caputo 定义在 HOL4 中形式化时利用了极限的形式来表示积分的变上限，这里规定式(1)是有限的。

只有在满足上述条件的情况下，才有 Caputo 定义及其形式化。根据上面分数阶微积分 Caputo 定义的存在性条件的定义，当使用算子 ${}_a^C D_t^v$ 时，总假设这些条件是成立的。下面在 HOL4 中建立分数阶微积分 Caputo 定义的形式化模型。

**定义 2** 分数阶微积分 Caputo 定义形式化模型

*val FRAC_C_DEF=⊢∀f v a t. frac_c f v a t=*

if ($v$=0) then $f\ t$

else lim(λ$n$. 1/*Gamma* (&(*flr* $v$)+1−$v$) * (*integral*($a$,$t$−1/2 *pow* $n$) (λ$x$. ((($t$−$x$) *rpow* (&(*flr* $v$)+1−$v$−1)) * (*n_order_deriv* (*flr* $v$+1) $f\ x$)))))

定义 2 分数阶微积分 Caputo 定义形式化模型中，*frac_c* 表示基于 Caputo 定义的分数阶微积分操作算子，$f$ 为要进行微积分的原函数，其类型为 real−>real，这里需要说明的是，HOL4 中用 real 表示实数类型，用 num 表示自然数类型。$v$ 是微积分的阶次，$t$ 和 $a$ 分别表示积分的上、下限。在 HOL4 中，*Gamma* 代表式(1)中的 $\Gamma(\cdot)$，这部分使用文献[3]中 *Gamma* 函数的形式化定义，此处的变量是 &(*flr* $v$)+1−$v$。*n_order_deriv* $m\ f\ x$ 表示函数 $f$ 对 $x$ 的 $m$ 阶导数，即 $f^{(m)}(x)$，$m$ 的类型为 num，这与式(1)中 $m\in\mathrm{N}$ 的要求是一致的。操作符“&”表示将 num 类型转换为相应的 real 类型。HOL4 是一个严谨的逻辑验证工具，进行运算的项若类型不一致会出现错误。这里的取整函数 *flr* 得到的结果是 num 类型的，而与其进行相加减的 1 和阶次 $v$ 都是 real 类型的，此时若直接进行运算，HOL4 会出现类型不匹配的错误提示。这里要用操作符“&”将 *flr* $v$ 由 num 类型转换为 real 类型，才能避免类型不匹配的错误，继而进行计算。

式(1)中，积分区间从常数 $a$ 到变量 $t$，是变上限积分，这是定义中的难点，HOL4 中的积分函数 *integral*($a$,$b$)仅能表示从常数 $a$ 到常数 $b$ 的定积分，不能体现本定义中变上限积分的特点，变上限需要根据 HOL4 现有的定义、定理重新构造。本文使用极限和积分嵌套的形式来解决。首先构造积分的上限，考虑到 HOL4 中已有的一些定理库，这里构造出式子 $t-1/2^n$，通过用极限函数对该式取极限即 $\lim\limits_{n\to\infty}(t-1/2^n)$ 表示出变量 $t$，从而表示积分的变上限。因此，定义 2 中的积分上限用 lim(λ$n$. $t$−1/2 *pow* $n$)来表示，lim(λ$n$. $f$)为序列库中的定义，表示当 $n\to\infty$ 时，求 $f$ 的极限[8]。

## 3 3 种定义之间的一致性验证

分数阶微积分不同的定义是从不同的角度去考察的，至今在数学上仍然没有一个统一的时域定义表达式。虽然这是对同一事物殊途同归的处理方法，但是同时也给进一步研究分数阶微积分带来了一些难度，这也是分数阶微积分理论没有得到广泛应用的原因之一，所以有必要验证定义之间的相互关系。G_L 和 R_L 定义是分数阶微积分另外两种常用定义，下文将介绍这两种定义并验证它们与 Caputo 定义的联系。

分数阶微积分 G_L 定义从整数阶高阶导数出发，利用 Hospital 法则和数学归纳法，将微积分的阶次从整数阶扩展到了任意实数，可以看成是整数阶微积分差分定义极限形式的推广。式(3)是 G_L 定义的时域表达式[5]。

$$ {}^{GL}_{a}D^{v}_{t}f(t)=\lim_{h\to 0}h^{-v}\sum_{j=0}^{[(t-v)/h]}(-1)^{j}\binom{v}{j}f(t-jh) \tag{3}$$

与上文 Caputo 定义类似，${}^{GL}_{a}D^{v}_{t}$ 表示基于 G_L 定义的分数阶微积分，$\binom{v}{j}$是 $v$ 为实数、$j$ 为自然数的实数二项式，其说明与形式化可参见文献[9]，$h$ 是积分时间步长。

为了使计算简化，分数阶微积分 R_L 定义对 G_L 定义进行了改进，从多重积分概念出发，利用柯西积分公式和普通导数概念来定义分数阶微积分。R_L 定义的分数阶微积分是目前较为常用的分数阶微积分定义[10]，其数学表达式如式(4)所示[5]。

$$ {}^{RL}_{a}D^{v}_{t}f(t)=\frac{1}{\Gamma(m-v)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{m}\int_{a}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-(m-v)}}\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

其中，$m-1<v<m, m\in\mathrm{N}$。从以上 3 个定义的数学表达式可以看出，G_L 定义是差分格式定义的，适用于数值计算，极大地促进了分数阶微积分的实际应用。R_L 定义采用微分-积分形式，能使分数阶微积分的数学分析变得简便、清晰，但在数学上的要求也比较严苛，微积分函数 $f(t)$必须是连续且可积的，尽管在工程实际应用中能满足系统函数的连续性和可积性，但由于 R_L 定义还需要解决一个理论上可实现但实际上缺乏物理意义的初始值问题，因而它在应用上受到了一定限制[11]。而弱奇异性的 Caputo 定义恰好解决了这一问题，其初值表达式是整数阶导函数，有明确的物理意义，更适合工程实际问题的应用，其分数阶微积分的拉普拉斯变换式也更加简洁，更适合用于分数阶微分方程的讨论。3 种定义都存在优缺点，若能实现 3 种定义的转换，必定能在一定程度上促进分数阶微积分的应用。本文将在高阶逻辑定理证明器 HOL4 中验证这三者间的关系。本文第 2 节已经对分数阶微积分的 Caputo 定义进行了形式化建模，而 R_L 定义和G_L定义也已分别由 Umair Siddique、Osman Hasan 和师丽坤实现。为了区分且使读者一目了然，同时遵循 HOL4 的命名规则，本文分别将R_L定义和 G_L 定义的形式化模型记作 *frac_rl* 和 *frac_gl*。

### 3.1 Caputo 定义与 G_L 定义的关系

Caputo 定义是 G_L 定义的一种改进，其目的是使拉氏变换更加简洁，从而便于分数阶微分方程的讨论。G_L 定义的分数阶导数与 Caputo 定义的分数阶导数存在着一定的关系，两定义之间存在一个差值，如式(5)所示。

$$ {}^{C}_{a}D^{v}_{t}f(t)={}^{GL}_{a}D^{v}_{t}f(t)-\frac{f(a)t^{-v}}{\Gamma(1-v)} \tag{5}$$

式中，$f(a)$是函数 $f(x)$在 $a$ 处的取值，$\Gamma(1-v)$是变量为$1-v$ 的广义阶乘。该关系在 HOL4 中的形式化模型如定义 3 所示。

**定义 3** Caputo 型导数与 G_L 型导数关系的形式化

*val FRAC_C_GL*= ⊢ ∀ $f\ v\ a\ t\ b$. (*frac_c* $f\ v\ a\ t$) $b$= *frac_gl* $f\ v\ a\ b\ t$−$f\ a$ * $t$ *rpow* (−$v$) / *Gamma* (1−$v$)

上述定义中，*frac_c* 是定义 2 中分数阶微积分 Caputo 定义，*frac_gl* 是分数阶微积分 G_L 定义，$f\ a$ 表示函数 $f$ 在积分下限 $a$ 处的取值。$t$ *rpow* (−$v$)对应式子 $t^{-v}$，这里需要注意的是，HOL4 中有两个操作符能表示 $x^y$，分别是 $x$ *rpow* $y$ 和 $x$ *pow* $y$，这两个操作符的区别在于：前者的底数和指数的类型都是 real，后者的底数类型是 real 类型而指数类型是 num。由于此处分数阶微积分阶次的非整次性，定义 3 使用的是前者。

从式(5)可推导出，只有函数的初值 $f(a)=0$ 时，Caputo 定义的分数阶导数与 G_L 定义的分数阶导数是等价的。该属性在 HOL4 中的验证如定理 1 所示。

**定理 1** Caputo 型导数与 G_L 型导数的一致性

*FRAC_C_GL_EQ*= ⊢ ∀ $f\ v\ a\ t\ b$. ($f\ a$=0)==> ((*frac_c* $f\ v\ a\ t$) $b$=*frac_gl* $f\ v\ a\ b\ t$)

定理 1 由蕴含式构成，蕴含式的左边是两者等价的前提条件 $f(a)=0$，HOL4 中用 $f\ a$ 表示函数 $f$ 在 $a$ 处的函数值，

该条件记作 $f\ a=0$，在这个前提下，逐步验证 G_L 型导数和 Caputo 型导数的等价性。首先用定义 3 对定理 1 进行重写，进而用假设将目标中的 $f\ a$ 替换为 0，此时再运用定理证明器 HOL4 实数库里的相关定理如 REAL_MUL_LZERO、REAL_DIV_LZERO 等即可实现定理 1 的证明。

### 3.2 Caputo 定义与 R_L 定义的关系

R_L 定义与 Caputo 定义均是对 G_L 定义的改进，从式(1)和式(4)也可看出，两者既有区别，又有联系。R_L 定义是先积分再求导，Caputo 定义是先求导再积分，且很容易证明${}_a^C D_t^v f(t) \neq {}_a^{RL} D_t^v f(t)$，两者的关系是[12]：

$$ {}_a^C D_t^v f(t) = {}_a^{RL} D_t^v f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} f^k(a) \qquad (6)$$

该关系在 HOL4 中的形式化描述如定义 4 所示。

**定义 4** Caputo 定义与 R_L 定义关系的形式化

*val FRAC_C_RL* = ⊢ ∀ *f v a t*. *frac_c f v a t* = *frac_rl f v a t* − *sum*(0, *flr v*) (λ(*k*:*num*). 1/*Gamma*(&*k* − *v* + 1) * (*t* − *a*) *rpow* (&*k* − *v*) * *n_order_deriv k f a*)

*FRAC_C_RL* 是定义的存储名称，*sum* 是 HOL4 定义定理库中的求和函数，其定义如下：

⊢ ∀ *f n m*. (*sum* (*n*,0) *f* = 0) ∧ (*sum* (*n*, *SUC m*) *f* = *sum* (*n*,*m*) *f* + *f* (*n*+*m*))

*sum*(0, *flr v*)*g* 表示对函数 *g* 从 0 到 *flr v* 求和，这里 *g* 是 real−>real 的函数类型；由于 $k-v$ 的非整次性，$(t-a)^{k-v}$ 在 HOL4 中用(*t* − *a*) *rpow* (&*k* − *v*)来形式化，这里 *k* 是 num 类型而 *v* 是 real 类型，需要用操作符"&"将 *k* 转换为real 类型；*n_order_deriv k f a* 是函数 *f* 的 *k* 阶导数在 *a* 处的取值。

同样地，从式(6)可推导出，如果微积分函数 $f(t)$ 具有 $m+1$阶导数，$m$ 至少取$\lfloor v \rfloor = n-1$，并且 $f^k(a)=0(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，在这些条件下，两者是等价的[13]。该属性在 HOL4 中的形式化验证如定理 2 所示。

**定理 2** Caputo 定义与 R_L 定义的一致性

*FRAC_C_RL_QE* = ⊢ ∀ *f v a t*. ((∀ *k*. *k* <= *flr v* + 1 ==> (λ*x*. *n_order_derivk f x*) *differentiable x*) ∧ (∀ *k*. *n_order_deriv k f a* = 0)) ==> (*frac_c f v a t* = *frac_rl f v a t*)

定理 2 验证的难点在于其在 HOL4 中的构造，两者等价的前提条件中提到，微积分的原函数必须是 $m+1$ 阶可导的，由于微积分阶次的不同，$m$ 就会有不同的取值，且若函数是 $m+1$阶可导的，则必然是 $m$ 阶可导的，也就是说，对于任意的小于或等于 $m+1$ 的整数 $k$，函数必须是 $k$ 阶可导的。这里，用(∀ *k*. *k* <= *flr v* + 1 ==> (λ*x*. *n_order_derivk f x*) *differentiable x* )在 HOL4 中形式化这一前提条件。其中，$v$ 是微积分的阶次，可以是任意实数，而 $m$ 与 $v$ 的关系是 $m=\lfloor v \rfloor$，$v$ 的任意性间接表明了 $m$ 的任意性。条件中的 ∀ *k*. *k* <= *flr v* + 1表示对于任意的、小于或等于$\lfloor v \rfloor + 1$ 的整数 $k$，*f differentiable x* 表示 $f$ 对 $x$ 可导。第二个条件 ∀ *k*. *n_order_deriv k f a* = 0 说明函数 $f$ 的 $k$ 阶导数的初值为 0。在这两个条件下，可以推导出 Caputo 定义与 R_L 定义等价。

证明过程中先用 Caputo 定义与 R_L 定义之间的关系即定义 4 对目标进行重写，进而用第二个条件化简目标并计算。证明期间涉及到函数 0 从 0 到 *flr v* 的求和，为了方便本证明和其他证明的使用，本文将该引理单独成定理，证明完成后保存为 *SUM_0*，并将其直接应用于 Caputo 定义与 R_L 定义一致性的证明。引理 *SUM_0* 在 HOL4 中的高阶逻辑证明过程如下：

```
val SUM_0=store_thm("SUM_0",
  "!n. sum(0,n) (\k. 0)=0",
Induct_on 'n'
  THENL[REWRITE_TAC [sum],ALL_TAC]
   THEN REWRITE_TAC [sum]
   THEN FULL_SIMP_TAC std_ss []
THEN SRW_TAC [][]);
```

上述以 ML 语言为基础的高阶逻辑证明中，*THEN*、*THENL*、*REWRITE_TAC*、*SRW_TAC* 等均是定理证明器 HOL4 中的对策和策略，熟悉并正确使用对策、策略能提高用户的验证效率。策略后的中括号里是证明所用的定义或定理。

在定理 2 的证明中使用引理 *SUM_0*，首先要将 *SUM_0* 中的全称量词 *n* 特殊化成定理 2 中的 *flr v*，接着使用 HOL4 中的自动证明策略实现定理 2 的证明。

### 3.3 R_L 定义与 G_L 定义的关系

图 1 表示了 3 种常用定义之间的转换关系，其中实线箭头表示已完成的关系验证，而虚线箭头表示未完成的。本文在 HOL4 中已实现了分数阶微积分 G_L 定义与 Caputo 定义之间、Caputo 定义与 R_L 定义之间关系的形式化验证。对于 G_L定义与 R_L 定义的关系，当微积分的原函数 $f(t)$存在 $m+1$阶连续导数且 $m$ 至少取得$\lfloor v \rfloor$时(这里 $v$ 是分数阶微积分的阶次)，G_L 定义和 R_L 定义等价；若不满足上述条件，R_L定义是 G_L 定义的拓展[9]。另外，根据 HOL4 的推理规则，本文已形式化的 Caputo 定义可充当两者转换的桥梁，这里不再加以证明。

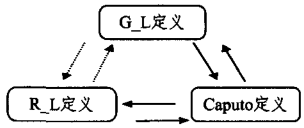


图 1 3 定义间的转换关系

**结束语** 运用分数阶微积分对系统进行建模可以更好、更准确地描述实际系统的特性，所以对分数阶系统分析的正确性显得尤为重要。定理证明器作为形式化方法的一种，将系统规范和设计实现都形式化为数学逻辑公式形式的模型，验证过程直观且严谨，其自身的自证功能保证了形式化的正确性。本文基于高阶逻辑定理证明器 HOL4，实现了分数阶微积分 Caputo 定义的形式化，并在这一基础上，结合 G_L 定义和 R_L 定义的形式化，验证了这些定义存在的关系，实现了常用定义在 HOL4 中的转换，提升了定理证明器 HOL 对分数阶系统的建模与分析能力。分数阶微积分的性质是分数阶系统分析设计和应用的前提，因此，下一步工作将在 HOL4 中完成分数阶微积分 Caputo 定义性质的形式化验证，并将它们应用于分数阶系统的形式化建模与分析，利用计算机解决更广泛的问题。

## 参 考 文 献


[1] Dalir M. Applications of Fractional Calculus[J]. Applied Mathematical Sciences，2010，4(21)：1021-1032


(下转第 53 页)

lanced data classification[J]. Pattern Recognition, 2014, 47(9): 3158-3167

[8] Wang Di, Ye Qiao-lin, Ye Ning. Localized multi-plane TWSVM classifier via manifold regularization[C]// 2010 Second International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 2011. New York: IEEE, 2010: 70-73

[9] Wang Ya-nan, Zhao Xi, Tian Ying-jie. Local and global regularized twin SVM[J]. Procedia Computer Science, 2013, 18: 1710-1719

[10] Kumar M A, Gopal M. Application of smoothing technique on twin support vector machines[J]. Pattern Recognition Letters, 2008, 29(13): 1842-1848

[11] Ding Shi-fei, Huang Hua-juan, Yu Jun-zhao, et al. Polynomial smooth twin support vector machines based on invasive weed optimization algorithm[J]. Journal of Computers, 2014, 9(5): 2063-2071

[12] Ding Shi-fei, Huang Hua-juan, Shi Zhong-zhi. Weighted smooth CHKS twin support vector machines[J]. Journal of Software, 2013, 24(11): 2548-2557(in Chinese)
丁世飞,黄华娟,史忠植. 加权光滑 CHKS 孪生支持向量机[J]. 软件学报, 2013, 24(11): 2548-2557

[13] Ding Shi-fei, Wu Fu-lin, Shi Zhog-zhi. Wavelet twin support vector machine[J]. Neural Computing and Applications, 2014, 25 (6): 1241-1247

[14] Xie Xi-jiong, Sun Shi-liang. Multitask centroid twin support vector machines[J]. Neurocomputing, 2015, 149(2): 1085-1091

[15] Peng Xin-jun, Xu Dong. Twin Mahalanobis distance-based support vector machines for pattern recognition[J]. Information Sciences, 2012, 200: 22-37

[16] Chu Mao-xiang, Wang An-na, Gong Rong-fei, et al. Multi-class Classification Methods of Enhanced LS-TWSVM for Strip Steel Surface Defects[J]. Journal of Iron and Steel Research International, 2014, 21(2): 174-180

[17] Xu Yi-tian, Guo Rui. A twin hyper-sphere multi-class classification support vector machine[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 2014, 27(4): 1783-1790

[18] Yang Zhi-xia, Shao Yuan-hai, Zhang Xiang-sun. Multiple birth support vector machine for multi-class classification[J]. Neural Computing and Applications, 2013, 22(1): 153-161

[19] Chen J, Ji G R. Multi-class LSTSVM classifier based on optimal directed acyclic graph[C]// The 2nd International Conference on Computer and Automation Engineering, 2010. New York: IEEE, 2010: 100-104

[20] Xu Yi-tian, Guo Rui, Wang Lai-sheng. A twin multi-class classification support vector machine [J]. Cognitive Computation, 2013, 5(4): 580-588

[21] Xie Jun-ying, Hone Ka-ta, Xie Wei-xin, et al. Extending twin support vector machine classifier for multi-category classification problems[J]. Intelligent Data Analysis, 2013, 17(4): 649-664

[22] Shao Yuan-hai, Chen Wei-jie, Huang Wen-biao, et al. The best separating decision tree twin support vector machine for multi-class classification [J]. Procedia Computer Science, 2013, 17: 1032-1038

[23] Wang Xue-min. Applied multivariate analysis(4th edition)[M]. Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press, 2014: 25-34(in Chinese)
王学民. 应用多元分析(第 4 版)[M]. 上海:上海财经大学出版社, 2014: 25-34

---

(上接第 26 页)

[2] Tomovsk Ž, Garra R. Analytic Solutions of Factional Integro-Differential Equations of Volterra Type with Variable Coefficients[J]. Fractional Calculus & Applied Analysis, 2014, 17(1): 38-60

[3] Siddique U, Hasan O. Formal Analysis of Fractional Order Systems in HOL[C]// 2011 IEEE Formal Methods in Computer-Aided Design. 2011: 163-170

[4] Shi Li-kun. Formal Analysis of Fractional Systems Based on Grunwald-Letnikov Definition using High Order Logic[D]. Beijing: Capital Normal University, 2014(in Chinese)
师丽坤. 基于 Grunwald-Letnikov 定义的分数阶系统高阶逻辑形式化分析[D]. 北京:首都师范大学, 2014

[5] Zhao Chun-na, Li Ying-shun, Lu Tao. Analysis and Design of Fractional Systems [M]. Beijing: National Defend Industry Press, 2010: 13-20(in Chinese)
赵春娜,李英顺,陆涛. 分数阶系统分析与设计[M]. 北京:国防工业出版社, 2010: 13-20

[6] Harrison J. Theorem Proving with the Real Numbers [M]. Springer-Verlag, 1998

[7] Gu Wei-qing, Shi Zhi-ping, Guan Yong, et al. Formalization of Gauge Integration Theory in HOL4 [J]. Computer Science, 2013, 40(2): 191-194(in Chinese)
谷伟卿,施智平,关永,等. Gauge 积分在 HOL4 中的形式化[J]. 计算机科学, 2013, 40(2): 191-194

[8] Zhao Gang, Zhao Chun-na, Guan Yong, et al. Formalization of Laplace Transform Calculus in HOL4 [J]. Journal of Chinese Computer System, 2014, 35(9): 2178-2181(in Chinese)
赵刚,赵春娜,关永,等. 拉普拉斯变换微积分性质在 HOL4 中的形式化[J]. 小型微型计算机系统, 2014, 35(9): 2178-2181

[9] Shi Li-kun, Zhao Chun-na, Guan Yong, et al. Formalization of Real Binomial Coefficient in HOL4[J]. Computer Science, 2014, 41(2): 15-18(in Chinese)
师丽坤,赵春娜,关永,等. 实数二项式系数在 HOL4 中的形式化[J]. 计算机科学, 2014, 41(2): 15-18

[10] Zhou Ji-liu, Pu Yi-fei, Liao Ke. Fractional Calculus Principle and its Application in the Analysis and Processing of Modern Signal [M]. Beijing: Science Press, 2006: 14-16(in Chinese)
周激流,蒲亦菲,廖科. 分数阶微积分原理及其在现代信号分析与处理中的应用[M]. 北京:科学出版社, 2006: 14-16

[11] Wang Chun-yang. Study on Fractional Order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller Parameter Tuning methods and Design[D]. Jilin: Jilin University, 2013(in Chinese)
王春阳. 分数阶 PID 控制器参数整定方法与设计研究[D]. 吉林:吉林大学, 2013

[12] Wang Ji-feng. Analysis of Control Performance for Fractional Order Systems[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 13-14(in Chinese)
汪纪锋. 分数阶系统控制性能分析[M]. 北京:电子工业出版社, 2010: 13-14

[13] Chen Wen, Sun Hong-guang, Li Xi-cheng. Fractional Derivative Model of Mechanical and Engineering Problems [M]. Beijing: Science Press, 2010: 18-19(in Chinese)
陈文,孙洪广,李西成. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京:科学出版社, 2010: 18-19