

加权低秩矩阵恢复的混合噪声图像去噪

王圳萍 张家树 陈高

(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 611756)

摘要 传统的基于低秩矩阵恢复的图像去噪算法只对低秩部分进行约束,当高斯噪声过大时,会导致去噪不充分或细节严重丢失。针对此问题,提出了一种新的鲁棒的图像去噪模型。该模型在原有的低秩矩阵核范数约束的基础上引入高斯噪声约束项,此外为了提高低秩矩阵的低秩性和稀疏矩阵的稀疏性,引入了加权的方法。为了考察方法的去噪能力,选取了不同参数类型的混合噪声图像进行仿真,并结合峰值信噪比、结构相似度评价标准与传统的基于低秩矩阵恢复的图像去噪算法进行对比。实验结果表明,加权低秩矩阵恢复的混合噪声图像去噪算法能增加低秩矩阵的低秩性和稀疏矩阵的稀疏性,在保证去噪效果的同时,保留了图像的细节信息,具有更佳的视觉效果,同时,客观评价指标均有所提高。

关键词 图像去噪,低秩矩阵恢复,加权,稀疏

中图分类号 TP911.73 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.1.064

Mixture Noise Image Denoising Using Reweighted Low-rank Matrix Recovery

WANG Zhen-ping ZHANG Jia-shu CHEN Gao

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract The traditional image denoising algorithm based on low-rank matrix recovery only has the low rank restraint, and when Gaussian noise is too large, it will lead to insufficient denoise or serious loss of detail. To overcome the disadvantages of the image denoising algorithm based on low-rank matrix recovery, a novel robust image denoising algorithm was proposed, which adds Gaussian restraint into the low rank restraint model. Inspired by reweighted L_1 minimization for sparsity enhancement, reweighting singular values were used to enhance low rank of a matrix, and an efficient iterative reweighting scheme was proposed for enhancing low rank and sparsity simultaneously. Finally, to verify the denoising capability of the presented approach, images with different noise types and simulation parameters were generated using the presented method and the results were compared with the traditional image denoising algorithm based on low-rank matrix recovery. Performance analysis of peak signal to noise ratio and structural similarity index were carried on at the same time. The experimental results show that the mixture noise image denoising using reweighted low-rank matrix recovery algorithm can enhance low rank and sparsity of a matrix simultaneously, guarantee visual effect and keep the details, at the same time, the objective evaluation indexes are improved.

Keywords Image denoising, Low-rank matrix recovery, Reweighted, Sparse

1 引言

图像在获取和传输的过程中常常会受到各种噪声的污染,从而降低了图像的主观和客观质量,给后继的图像处理和应用(如图像分割、目标识别、图像检索以及图像编码、传输等)带来了诸多不利的影响。因此,图像去噪问题在图像预处理中起着至关重要的作用。文献[1,2]对图像去噪方法做了全面的综述。

近年来,基于相似块匹配的协同去噪方法^[3]在图像去噪方面取得了较好的结果,其基本思想是通过与相邻图像块进行匹配,将若干相似的块整合为一个三维矩阵,在三维空间进

行滤波处理,再将结果反变换融合到二维,形成去噪后的图像。文献[4]提出将矩阵分解为低秩部分和稀疏部分并对低秩矩阵恢复进行了全面的理论分析,低秩理论由于具有较强的鲁棒性,被广泛地应用于人工智能、图像处理、模式识别、计算机视觉等领域。首先在人脸识别系统^[5]中,低秩矩阵恢复算法的应用可有效地识别遮挡的人脸图像。文献[6]设计了一种基于低秩模型的鲁棒联合图像对齐方法,用于对齐一组本质上线性相关的图像,同时可以去除图像中存在的遮挡、污损等。文献[7]还把该算法应用在低秩纹理结构,从而达到校正图像和字符的目的。

2010年,文献[8]基于低秩矩阵恢复算法(LR算法)提出

到稿日期:2015-01-08 返修日期:2015-04-08 本文受国家自然科学基金项目(61271341),四川省自然科学基金项目(2013JY0136)资助。

王圳萍(1989-),女,硕士生,主要研究方向为图像去噪与图像超分辨,E-mail: zipperwang@163.com;张家树(1965-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为非线性与自适应信号处理及应用、数字视频图像技术及其应用、生物特征识别与身份认证;陈高(1984-),男,博士,主要研究方向为视频图像去噪。

了一种视频图像去噪算法,该方法的基本思路是根据纯净图像在相似块理论上是低秩的,通过相似块匹配,对相似块进行矩阵低秩恢复以达到去噪的目的。文献[9]利用低秩矩阵恢复算法提出了新的图像去噪算法,取得了较好的成果。

本文在研究中发现,基于低秩矩阵恢复的图像去噪算法去噪后的图像会产生条纹失真,并且当图像中混合有高斯白噪声和椒盐噪声时,该算法仅对椒盐噪声进行约束,若高斯噪声过大时,去噪效果急剧下降。此外,若对稀疏矩阵的稀疏性要求较大,绝大部分的高斯白噪声存在于低秩矩阵部分,导致该矩阵不满足低秩性要求,造成去噪不充分;若对稀疏矩阵的稀疏性要求较小,稀疏矩阵中只有很小部分元素为零,不再满足稀疏性,易造成图像细节的丢失。为了解决此问题,本文提出一种基于加权低秩矩阵恢复的混合噪声图像去噪算法(RLRE),该算法在LR算法的基础上引入高斯噪声约束项,此外为了提高低秩矩阵的低秩性和稀疏矩阵的稀疏性,引入了加权的低秩矩阵和加权的稀疏矩阵。实验结果表明,与LR算法相比,RLRE算法能增加低秩矩阵的低秩性和稀疏矩阵的稀疏性,在保证去噪效果的同时,保留了图像的细节信息,具有更佳视觉效果,同时,客观评价指标均有所提高。

2 低秩矩阵恢复算法及去噪原理

2.1 低秩矩阵恢复算法

低秩矩阵恢复最早由Wright等人^[10]提出,指当矩阵的某些元素被严重破坏后,自动识别出被破坏的元素,恢复出原矩阵的方法。该算法的前提为原矩阵是低秩的或者近似低秩,所以低秩矩阵恢复又被命名为鲁棒主成分分析^[11,12](RPCA)或者低秩稀疏矩阵分解(LRSMD)。假设矩阵 D 是由一个低秩矩阵 L 受到噪声矩阵 S 的破坏所得,并且 S 是一个稀疏矩阵,这样就可以运用LRMR来进行问题的求解,于是低秩矩阵恢复可用如下优化问题来描述,即

$$\min \text{rank}(L) + \lambda \|S\|_0 \quad \text{s. t. } L+S=D \quad (1)$$

式中, $\|S\|_0$ 是稀疏矩阵的 L_0 范数,即矩阵中非零元素的个数,然而从理论上说式(1)可以实现,但是实际上不可行,这是一个NP问题,计算量非常大,所以需要寻找合适的范数近似求解上述最优化问题,文献^[13]从理论上证明了 L_1 范数最小化求得的解非常接近 L_0 范数最小化的解,这样就可以将 L_0 范数最小化问题松弛到 L_1 范数最小化问题。并且式(1)中涉及矩阵的函数的秩,rank函数是奇异值的 L_0 范数,是非凸的不连续的函数,而核范数是奇异值的 L_1 范数,根据上述理论,可以用核范数来近似矩阵的rank函数,即

$$\min \|L\|_* + \lambda \|S\|_1 \quad \text{s. t. } L+S=D \quad (2)$$

式中,函数 $\|L\|_* = \sum_{k=1}^n \sigma_k(L)$ 是矩阵的核范数, $\sigma_k(L)$ 表示矩阵的第 k 个奇异值, λ 为权重函数,设定为 $\lambda = 1/\sqrt{\max(m,n)}$, m 和 n 是矩阵 L 的维数。本质就是把求解矩阵的秩凸优化为求解矩阵的迹,把具有多个解的方程变为具有唯一解并可以求解的方程。

2.2 低秩去噪原理

相似图像块应该具有相似的图像结构,在无污染和无缺损情况下,这些相似块应处于低维子空间,由这些相似块按照相同的规律组合成的矩阵具有较低的秩。当图像受到污染或出现部分缺损时,组合后的矩阵也将受到影响,这些影响可通

过低秩矩阵恢复处理来消除。带噪图像经相似块匹配后构造的矩阵 P 可以表示为

$$D=L+S \quad (3)$$

其中, L 为需要恢复的纯净相似块矩阵,是低秩的; S 代表噪声矩阵,是稀疏的。图像去噪转化为低秩矩阵恢复问题。带噪的相似块矩阵 D 经低秩矩阵恢复之后,得到去噪的相似块矩阵 L ,将 L 对应地放回相似块的位置,这样就得到了去噪图像。

3 加权低秩矩阵恢复的混合噪声图像去噪

图像中的噪声来源主要有两个:1)产生于图像获取过程中的噪声;2)产生于图像传输中的噪声。一般情况下,可用高斯噪声和椒盐噪声的混合模型来模拟实际获取图像中的噪声^[14]。经研究发现,基于低秩矩阵恢复的图像去噪算法仅对椒盐噪声进行约束,当高斯噪声过大时,去噪效果急剧下降。为了克服此问题,本文在LR算法的基础上引入高斯噪声约束项。

此外,LR算法若对稀疏矩阵的稀疏性要求较大,绝大部分的高斯白噪声存在于低秩矩阵部分,则会导致该矩阵不满足低秩性要求,造成去噪不充分;若对稀疏矩阵的稀疏性要求较小,则稀疏矩阵中只有很小部分元素为零,不再满足稀疏性,易造成图像细节的丢失。在文献^[15]中为了增强稀疏性,引入了加权的 L_1 范数,取得了很好的效果。其本质是当非零项较大时用大的权重削弱,当其值较小时用小的权重增强,以达到增强稀疏性的目的。而矩阵的秩是指非零奇异值的个数,与加权的 L_1 范数同理,可以使用加权的低秩矩阵以增强矩阵的低秩性。因此,本文在LR算法的基础上,在低秩矩阵前引入加权矩阵以增强低秩性,在稀疏矩阵前引入加权矩阵以增强稀疏性。本文提出的基于加权低秩矩阵恢复的混合噪声图像去噪算法(RLRE)模型如下:

$$\min_{L,S,E} \sum_{j=1}^n \omega_{L,j} \cdot \sigma_j + \lambda_1 \|W_S \cdot S\|_1 + \lambda_2 \|E\|_F^2 \quad (4)$$

$$\text{s. t. } L+S+E=D$$

式中, $W_L = \{\omega_{L,j}\}$ 是矩阵 L 的奇异值权重, W_S 是矩阵 S 的权重, $\{\sigma_j\}$ 是矩阵 L 的奇异值。 $\lambda_2 \|E\|_F^2$ 是高斯噪声约束项。

W_S 取值与文献^[15]相同,即与信号值成反比。同理, W_L 的取值也与 L 的奇异值成反比。算法步骤如算法1所示。

算法1

1. 初始化迭代计数变量 $k=0$, $W_L^{(0)} = 1 \in \mathbb{R}_{++}^n$, $W_S^{(0)} = 1 \cdot 1^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 。
2. 使用算法2,更新 L, S, E 。
3. 更新权重:

$$w_{L,j}^{k+1} = \frac{1}{\sigma_j^k + \epsilon_L}, w_{S,ij}^{k+1} = \frac{1}{|\sigma_{ij}^k| + \epsilon_S}$$

其中 ϵ_L 和 ϵ_S 是预先设置的正常数,此处均取为0.01。

4. 判断是否达到收敛条件或 k 达到最大循环值,如是,输出 L, S, E ,否则 $k=k+1$,跳转到第2步继续运行。

接下来采用不精确的增广拉格朗日(IALM)算法解式(4)中的优化问题。式(4)的增广拉格朗日形式为:

$$l(L,S,E,Y) = \sum_{j=1}^n \omega_{L,j} \cdot \sigma_j + \lambda_1 \|W_S \cdot S\|_1 + \lambda_2 \|E\|_F^2 + \langle Y, D-L-S-E \rangle + \frac{\mu}{2} \|D-L-S-E\|_F^2 \quad (5)$$

L, S, E 和拉格朗日乘子 Y 的更新公式分别为:

$$L_{k+1} = \arg \min_L \sum_{j=1}^n \omega_{L,j} \cdot \sigma_j + \frac{\mu}{2} \|D-L-S-E + \mu^{-1}Y\|_F^2$$

$$= D_{\mu^{-1}W_L} (D-S-E + \mu^{-1}Y)$$

$$S_{k+1} = \arg \min_S \lambda_1 \|W_S \cdot S\|_1 + \frac{\mu}{2} \|D-L-S-E + \mu^{-1}Y\|_F^2$$

$$= S_{\lambda_1 \mu^{-1}W_S} (D-L-E + \mu^{-1}Y)$$

$$E_{k+1} = \arg \min_E \lambda_2 \|E\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|D-L-S-E + \mu^{-1}Y\|_F^2$$

$$= \frac{\mu}{\mu + 2\lambda_2} (D-L-S + \mu^{-1}Y)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \mu (D-L-S-E)$$

$$\mu_{k+1} = \min(\rho\mu_k, \mu_{\max})$$

其中, $S_W(X)$ 是矩阵的收缩算子, 定义为:

$$S_W(X) = \text{sgn}(X) \max(|X| - W, 0)$$

$D_W(X)$ 是矩阵的奇异值阈值算子, 若 $X = U\Sigma V^T$, 则

$$D_W(X) = U S_W(\Sigma) V^T$$

算法步骤如算法 2 所示。

算法 2

1. 初始化 $Y, L, S, E, \mu = 1, 25/\|D\|_2, k=0, \rho=1, \mu_{\max} = 10^7 \mu$ 。
2. 若不收敛, 则进行循环;
3. $L_{k+1} = D_{\mu^{-1}W_L} (D - S_k - E_k + \mu^{-1}Y_k)$;
4. $S_{k+1} = S_{\lambda_1 \mu^{-1}W_S} (D - L_k - E_k + \mu^{-1}Y_k)$;
5. $E_{k+1} = \frac{\mu_k}{\mu_k + 2\lambda_2} (D - S_k - L_k + \mu^{-1}Y_k)$;
6. $Y_{k+1} = Y_k + \mu_k (D - S_k - E_k - L_k)$;
7. 更新 $\mu_{k+1} = \min(\rho\mu_k, \mu_{\max}), k=k+1$;
8. 当 $\|D-L-S-E\|_F \leq 10^{-7} \|D\|_F$ 时结束循环, 输出 L, S, E 。

4 实验结果

4.1 评价标准

本文分别从以下几个指标对提出的 RLRE 算法与 LR 算法进行对比分析。

$$PSNR = 10 \times \log \frac{255^2 \cdot mn}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [g(x,y) - f(x,y)]^2}$$

$$SSIM = \frac{(2\mu_f \mu_g + c_1)(2\sigma_{fg} + c_2)}{(\mu_f^2 + \mu_g^2 + c_1)(\sigma_f^2 + \sigma_g^2 + c_2)}$$

其中, PSNR 代表峰值信噪比, $f(x,y)$ 为原始高分辨率图像, 大小为 $m \times n$, $g(x,y)$ 表示重建得到的图像。从 PSNR 的定义可以看出 PSNR 的值越大, 图像的失真就越小, 即放大后图像的质量就越好。SSIM 代表结构相似度, μ 为图像均值, σ 为图像方差或协方差, c_1 和 c_2 为保证分母不为零的小常数。SSIM 的取值范围是 (0~1), 其越接近 1, 则表明恢复的图像和原始图像的结构越相似, 恢复图像的效果越好。

4.2 实验结果及分析

为了取得更好的去噪效果, 本算法的块匹配搜索算法选择误差最小的全局搜索算法。在噪声较大时, 直接对原噪声图像进行块匹配会使匹配误差增大, 为了减小匹配误差, 本文对原噪声图像用中值滤波器预处理, 然后对预处理之后的图像进行块匹配, 得到相似块所在的位置, 然后在噪声图像中提取相似块, 排列成列向量构成矩阵 D , 这样可以增大结果的可靠性, 进一步改善去噪效果。实验中将本文提出的 RLRE 算法与 LR 算法以及目前公认的效果较好的 BM3D 去噪算法进

行了对比。本实验中 $\lambda_1 = 1/\sqrt{\max(n_1, n_2)}, \lambda_2 = 1/(10rn_1\sqrt{\sigma n_2/5})$, 其中 n_1, n_2 分别为矩阵 D 的列数和行数, r 为椒盐噪声水平值, σ 为高斯白噪声的标准差, 相似块的大小为 8×8 , 重叠值为 4, 相似块的个数选为 20。在图像中加入均值为零, 标准差为 σ 的加性高斯白噪声和噪声水平为 r 的椒盐噪声。

图 1 显示图像中所加噪声类型是均值为零, 标准差 $\sigma=5$ 的高斯白噪声和噪声水平 $r=0.1$ 的椒盐噪声的算法去噪效果对比图。图 2 显示当高斯噪声标准差增加到 10 时, 算法去噪效果的对比图。可以看出, 当噪声较小时, BM3D 去噪后, 图像中仍有大量的椒盐噪声, 而当噪声增加时, 图像过度平滑, 造成细节的严重丢失, 说明了 BM3D 不能有效去除混合噪声。对于 LR 算法, 当噪声增加时, 平坦区域去噪不充分, 即高斯噪声仍然残留在图像中, 有细节丢失, 图像变得很模糊。而本文提出的 RLRE 算法很好地解决了 LR 算法去噪时出现的问题, 去除噪声的同时很好地保留了图像的细节信息。



图 1 $\sigma=5, r=0.1$ 时, 算法去噪效果对比

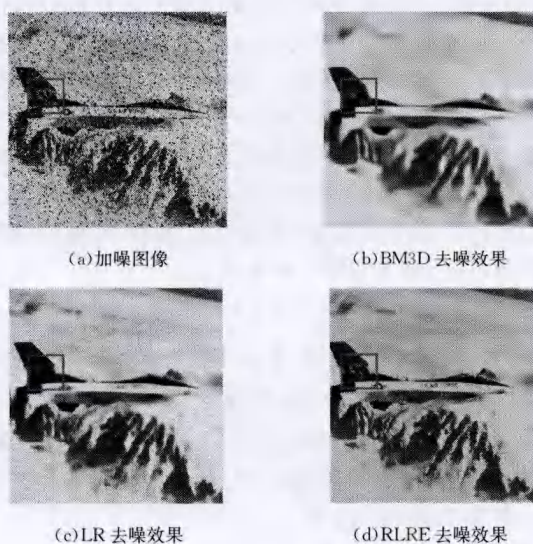


图 2 $\sigma=10, r=0.1$ 时, 算法去噪效果对比

为了验证不同噪声水平下算法的性能, 实验中考虑了两种情况: 1) 当高斯白噪声固定, 椒盐噪声增加时算法的性能变化; 2) 当椒盐噪声固定, 高斯白噪声增加时算法的性能变化。

图 3 显示的是第一种情况,即当高斯白噪声的标准差 $\sigma=7$,椒盐噪声 r 从 0.05 增加到 0.2 时的 PSNR 值与 SSIM 值,以 cameraman 图像为例。由图 3 可知,当高斯白噪声一定时,随着椒盐噪声的增加,RLRE 算法的性能始终优于 BM3D 和 LR 算法。图 4 显示的是当椒盐噪声 $r=0.1$,高斯白噪声的标准差 σ 从 7 增加到 25 时的 PSNR 值与 SSIM 值,以 cameraman 图像为例。由此图可知,当椒盐噪声一定时,随着高斯白噪声的增加,RLRE 算法的性能始终优于 LR 算法。与 BM3D 相比,当高斯噪声较大时,高斯噪声严重影响了低秩矩阵的低秩性质和稀疏矩阵的稀疏性,RLRE 算法去噪效果锐减,当高斯噪声标准差为 25 时,其 SSIM 值还低于 BM3D,这也说明了 BM3D 能很好地去除高斯噪声。

为了进一步验证 RLRE 算法的性能,实验中采集了 10 幅图像进行测试分析。对这些图像分别加入均值为 0、标准差 $\sigma=10$ 的高斯白噪声和噪声水平 $r=0.1$ 的随机脉冲噪声。比较图像去噪后的 PSNR 和 SSIM 以及平均值,结果如表 1 所列。由表 1 可知,RLRE 算法对不同的图像去噪效果均优于 BM3D 和 LR 算法。

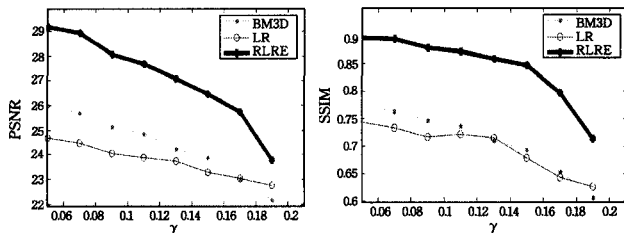


图 3 $\sigma=7, r$ 依次增加时,不同算法的 PSNR 与 SSIM 对比

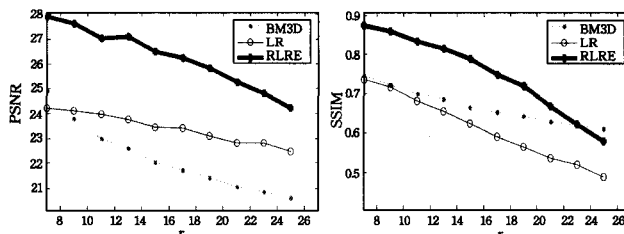


图 4 $r=0.1, \sigma$ 依次增加时,不同算法的 PSNR 与 SSIM 对比

表 1 不同图像去噪后的 PSNR 值和 SSIM 值

图像标号	BM3D		LR		RLRE	
	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
1	22.1529	0.6121	23.1842	0.6973	26.2061	0.8435
2	22.8510	0.7094	22.9995	0.5556	27.7011	0.8412
3	22.1264	0.6025	23.3394	0.6248	27.3151	0.8375
4	19.9452	0.3680	21.1716	0.5410	23.3916	0.7363
5	19.5556	0.2748	21.0184	0.5412	23.1274	0.7028
6	25.6401	0.7217	26.7763	0.7130	30.1025	0.8192
7	24.0203	0.6050	25.4366	0.6525	28.6410	0.7871
8	26.6986	0.6857	28.4345	0.6855	31.2927	0.8108
9	21.8164	0.4319	23.3206	0.4319	25.6308	0.7283
10	23.3503	0.7092	24.0734	0.7026	27.3649	0.8468
Avg.	22.8157	0.5720	23.9755	0.6145	27.0773	0.7954

结束语 本文提出一种去除图像中混合噪声的加权低秩矩阵恢复算法。为了克服高斯噪声过大时去噪效果急剧下降的问题,在基于低秩矩阵恢复的图像去噪算法基础上引入高斯噪声约束项,此外为了提高低秩矩阵的低秩性和稀疏矩阵的稀疏性,引入了加权的低秩矩阵和加权的稀疏矩阵。实验

表明,该算法能很好地克服低秩矩阵恢复算法的缺陷,在达到去噪效果的同时很好地保留了图像细节信息,具有更佳视觉效果,同时客观评价指标均有所提高。

参考文献

- [1] Chatterjee P, Milanfar P. Is denoising dead? [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(4): 895-911
- [2] Buades A, Coll B, Morel J M. A review of image denoising algorithms, with a new one [J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 490-530
- [3] Kervrann C, Boulanger J. Optimal spatial adaptation for patch-based image denoising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(10): 2866-2878
- [4] Candès E J, Li X, Ma Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the ACM (JACM), 2011, 58(3): 11
- [5] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust face recognition via sparse representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210-227
- [6] Peng Y, Ganesh A, Wright J, et al. RASL: Robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(11): 2233-2246
- [7] Zhang Z, Ganesh A, Liang X, et al. TILT: transform invariant low-rank textures [J]. International Journal of Computer Vision, 2012, 99(1): 1-24
- [8] Ji H, Liu C, Shen Z, et al. Robust video denoising using low rank matrix completion [C] // 2010 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2010: 1791-1798
- [9] LIU Xin-yan, MA Jie, ZHANG Xiao-mei, et al. Image denoising of low-rank matrix recovery via joint Frobenius norm [J]. Journal of Image and Graphics, 2014, 19(4): 502-511
- [10] Wright J, Ganesh A, Rao S, et al. Robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank matrices via convex optimization [C] // Advances in Neural Information Processing Systems, 2009: 2080-2088
- [11] Ganesh A, Wright J, Li X, et al. Dense error correction for low-rank matrices via principal component pursuit [C] // 2010 IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT). IEEE, 2010: 1513-1517
- [12] Zheng Xiu-qing, He Kun, Zhang Jian. Image denoising by principal component analysis with structural information [J]. Computer Science, 2014, 41(8): 301-305 (in Chinese)
郑秀清,何坤,张健.基于结构信息的RPAC图像去噪[J].计算机科学, 2014, 41(8): 301-305
- [13] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing [J]. Comptes Rendus Mathématique, 2008, 346(9): 589-592
- [14] Lopez-Rubio E. Restoration of images corrupted by Gaussian and uniform impulsive noise [J]. Pattern Recognition, 2010, 43(5): 1835-1846
- [15] Candès E J, Wakin M B, Boyd S P. Enhancing sparsity by re-weighted l1 minimization [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5/6): 877-905