

# 基于稀疏分解的图像修复方法

祝 轩 张旭峰 李秋菊 王 宁 陶吉瑶  
(西北大学信息科学与技术学院 西安 710127)

**摘 要** 提出将冗余离散小波变换(RDWT)和波原子变换(WAT)作为字典对应用于图像稀疏形态成分分解,获得图像的结构与纹理;然后针对结构和纹理所具有的不同形态学特征,对结构采用具有曲率驱动、边缘强化和平滑去噪性能的 CDD 模型修复,对纹理采用基于样例的 Criminisi 纹理合成方法修复;最后合成获得修复结果。实验结果表明,该修复方法能够获得强且光顺的边缘,纹理清晰完整,相比于传统方法具有更好的修复结果。

**关键词** 图像修复,稀疏分解,字典,CDD 模型,Criminisi 方法

**中图分类号** TN911.73 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2016.1.063

## Image Inpainting Method Based on Sparse Decomposition

ZHU Xuan ZHANG Xu-feng LI Qiu-ju WANG Ning TAO Ji-yao

(School of Information Science and Technology, Northwest University, Xi'an 710127, China)

**Abstract** This paper proposed a new couple of dictionaries which are redundant discrete wavelet transformation and wavelet atomic transformation, and applied it to image sparse morphological component decomposition to get the structure and texture. Then, based on the fact that the structure and texture have different characteristics, it uses curvature driven diffusion model which has curvature driven, edge enhancement and smooth denoising characteristics, and uses Criminisi texture synthesis method to inpaint the structure and texture respectively. At last, they are compounded and the inpainting result is got. The experiment results show that the new method can not only decompose the image very well, but also inpaint the image with strong and fairing edge, complete and clear texture. This method shows better results in image restoration compared to the classical ones.

**Keywords** Image inpainting, Sparse decomposition, Dictionary, CDD model, Criminisi method

## 1 引言

数字图像修复是图像处理和计算机视觉研究中的重要课题之一。图像修复是依据图像中已有信息按照一定规则对图像中的受损区域或遗失部分进行信息填充和补全<sup>[1,2]</sup>。图像修复技术在特定目标移除、遥感图像修复、医学图像处理等方面有着广泛的应用。

目前,常用的图像修复方法主要有偏微分方程(Partial Differential Equations, PDE)<sup>[3,4]</sup>和纹理合成<sup>[5]</sup>两类。PDE 方法的代表主要有 BSCB<sup>[3]</sup>、TV<sup>[4]</sup>和 CDD<sup>[6]</sup>等模型。PDE 方法是基于扩散机制修复图像,使待修复区域周围的完好信息沿着等照度线方向扩散至待修复区域,这一特征使其特别适合修复具有大尺度和较强边缘的结构信息,保证修复后大尺度结构连通、光顺和平滑。CDD 修复模型的扩散强度依赖于梯度和曲率,其修复效率高,修复原理比 BSCB 模型具有更明确的物理意义,能够克服 TV 修复模型存在的视觉连通性问题。纹理合成方法主要有过程纹理合成和基于样例的纹理合成两类。基于样例的纹理合成方法是对完好区域进行采样,搜索

最匹配的图像块匹配填充待修复块,该方法特别适合修复具有周期特征的纹理信息。Criminisi 等人<sup>[7]</sup>提出基于样例优先的纹理合成方法,首先通过特征函数确定待修复区域内待修复块的优先权,然后在完好区域内全局搜索与待修复块最匹配的块,最后将最匹配块复制到待修复块。Criminisi 方法能有效避免出现断裂、模糊等现象,修复速度快。

形态学理论认为自然界中的图像通常是由结构和纹理两部分组成。结构反映图像中的大尺度特征,具有分段光滑的特点;纹理反映图像中的局部不规则性,其在整体上具有某种周期性规律。Elad 等人提出的稀疏形态成分分解 MCA 模型(Morphological Component Analysis Model)<sup>[8]</sup>分别用曲波变换(Curvelet Transform)和局部离散余弦变换(Local Discrete Cosine Transform, LDCT)作为字典对实现图像结构和纹理的分解。文献<sup>[9]</sup>指出采用稀疏形态成分分解方法获得好的结构和纹理分量的关键是设计具有互斥鉴别特性的字典对,即一个字典能够很好地表示图像中的一种分量,而对另外一种分量则非常不敏感;另一个字典则反之。通过选取具有互斥鉴别特性的字典对能够较好地分别提取出图像中的结构和

到稿日期:2014-11-20 返修日期:2015-03-24 本文受陕西省自然科学基金(2014JM8341,2010JM8026)资助。

祝 轩(1968-),女,博士,教授,主要研究方向为计算机视觉、稀疏表示、模式识别;张旭峰(1987-),女,硕士生,主要研究方向为图像/图形处理,E-mail:641057797@qq.com;李秋菊(1988-),女,硕士生,主要研究方向为图像/图形处理;王 宁(1990-),女,硕士生,主要研究方向为图像/图形处理;陶吉瑶(1991-),女,硕士生,主要研究方向为图像/图形处理。

纹理信息。结构和纹理的有效分离是后续根据结构和纹理所具有的不同特征,采用相应的修复方法获得高质量修复结果的关键基础。

由于结构和纹理本身并没有严格的区分界定,因此在实际应用中设计或找到一对能够比较好地鉴别结构和纹理的字典对比较困难。本文提出将冗余离散小波变换(Redundant Discrete Wavelet Transform, RDWT)和波原子变换(Wave Atoms Transform, WAT)作为字典对,用稀疏形态成分分解方法分别捕获结构和纹理。其中 RDWT 可以很好地捕获结构, WAT 可以比较好地捕获纹理。

本文提出将 RDWT 和 WAT 作为稀疏形态成分分解模型中的一对字典,分别捕获结构和纹理;然后根据结构和纹理所具有的不同形态学特征分别采用 CDD 模型和纹理合成 Criminisi 方法修复结构和纹理;最后合成修复结果。实验结果表明,本文方法较经典的图像修复模型能够获得强且光顺的边缘,且纹理结构清晰完整。

本文第 1 节讨论稀疏分解模型及其数值求解;第 2 节讨论结构和纹理修复方法;第 3 节给出若干实验结果;最后总结全文。

## 2 稀疏分解模型及其数值实现

### 2.1 稀疏分解模型

MCA 稀疏分解模型<sup>[8]</sup>:

$$(\alpha_n^{opt}, \alpha_t^{opt}) = \arg \min_{(\alpha_n, \alpha_t)} \|\alpha_n\|_1 + \|\alpha_t\|_1 + \lambda \|X - D_n \alpha_n - D_t \alpha_t\|_2^2 + \gamma TV(D_n \alpha_n) \quad (1)$$

式中,  $D_n$  和  $D_t$  分别是稀疏表示结构和纹理的字典对 Curvelet Transform 和 LDCT;  $\alpha_n$  和  $\alpha_t$  分别是稀疏表示结构和纹理的系数;  $\lambda \|X - D_n \alpha_n - D_t \alpha_t\|_2^2$  是保真项;  $TV(\cdot)$  是全变差修正项,用于平滑分解后的结构,保证结构成分分段平滑;  $\lambda$  和  $\gamma$  是控制参数。

对于式(1)中的字典对  $D_n$  和  $D_t$ , 本文考虑到 RDWT 具有空间平移不变、采样频率固定、变换后的各个子图与原始图像大小一样的特性,其最低频率子图集中了原始图像的大部分结构信息<sup>[10]</sup>,同时 RDWT 能克服系数软阈值带来的伪吉布斯效应,适合做稀疏表示结构的字典  $D_n$ ; WAT 具有小波的局部化和多尺度特性,能很好地保留图像的边缘轮廓,对纹理信息丰富的图像具有很好的表征能力,能够有效地捕获图像的高维奇异特征和纹理信息,为振荡信号提供了最优的稀疏表示<sup>[11,12]</sup>。因此,本文提出将 RDWT 和 WAT 作为  $D_n$  和  $D_t$  字典对分别提取结构和纹理,得如下稀疏分解模型:

$$(\alpha_n^{opt}, \alpha_t^{opt}) = \arg \min_{(\alpha_n, \alpha_t)} \|\alpha_n\|_1 + \|\alpha_t\|_1 + \lambda \|X - D_n \alpha_n - D_t \alpha_t\|_2^2 \quad (2)$$

值得指出的是,由于 RDWT 在捕获结构的同时能够保证结构分段平滑,因此相比于式(1),式(2)去掉了  $TV(\cdot)$  修正项,提高了分解速度。

### 2.2 数值实现

用具有快速收敛特性的简单 Bregman 数值迭代算法求解式(2),得:

$$(\alpha_n^{k+1}, \alpha_t^{k+1}) = \arg \min_{(\alpha_n, \alpha_t)} \|\alpha_n\|_1 + \|\alpha_t\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|X - D_n \alpha_n - D_t \alpha_t - b^k\|_2^2 \quad (3)$$

$$b^{k+1} = b^k + (D_n \alpha_n^{k+1} + D_t \alpha_t^{k+1} - X) \quad (4)$$

式中,  $b$  为 Bregman 迭代引入的参量,  $\lambda$  是控制参数。式(3)和式(4)按下述迭代方案求解:

#### 1. 初始化

设置参数:迭代次数  $K$ , 迭代步长  $\Delta$ , 阈值  $\delta = \Delta * K$ , 参数  $\lambda = 1/\delta$ ,  $ST_\delta(\cdot)$  表示软阈值化处理;

初始化:结构  $u_n = 0$ , 纹理  $u_t = 0$ ,  $b = 0$ 。

#### 2. $K$ 次迭代

(1) 根据  $u_t$  重构  $u_n$ :

计算残差  $R$ :  $R = X - u_n - u_t - b$ ;

稀疏表示  $u_n + R$ :  $\alpha_n = \arg \min_{\alpha_n} \|u_n + R - D_n \alpha_n\|_2^2$ ;

软阈值化系数  $\alpha_n$ :  $\alpha_n^{opt} = ST_\delta(\alpha_n)$ ;

重构  $u_n$ :  $u_n = D_n \alpha_n^{opt}$ ;

(2) 根据  $u_n$  重构  $u_t$ :

计算残差  $R$ :  $R = X - u_n - u_t - b$ ;

稀疏表示  $u_t + R$ :  $\alpha_t = \arg \min_{\alpha_t} \|u_t + R - D_t \alpha_t\|_2^2$ ;

软阈值化系数  $\alpha_t$ :  $\alpha_t^{opt} = ST_\delta(\alpha_t)$ ;

重构  $u_t$ :  $u_t = D_t \alpha_t^{opt}$ ;

(3) 更新  $b = b + (u_n + u_t - X)$ 。

3. 计算  $\delta = \delta - \Delta$ ; 如果  $\delta > \Delta$ , 返回步骤 2, 否则终止。

## 3 修复模型及其数值实现

对于污损图像来说,采用稀疏分解方法提取的结构和纹理分量具有各不相同的特征。污损结构图像往往表现为边缘和等照度线的断裂及不完整。CDD 模型具有曲率驱动、平滑去噪和边缘强化性能,其可以消除断裂等照度线的“大曲率”局部结构、稳定等照度线的平直部分,因此本文采用 CDD 模型修复结构。污损纹理图像往往表现为周期性纹理断裂和模糊等现象。基于样例优先权的 Criminisi 纹理合成方法<sup>[7]</sup>能在完好区域匹配出最适合的纹理块复制给断裂和模糊的纹理块,避免纹理断裂和模糊,适用于修复纹理。

### 3.1 结构修复及数值实现

CDD 模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(g(|k|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}), & (x, y) \in D \\ u(x, y, t) = u_0(x, y), & (x, y) \in D^c \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $u_0$  为初始图像,  $D$  是待修复区域,  $D^c$  是完好区域,  $\frac{g(k)}{|\nabla u|}$  为扩散系数,其由曲率驱动  $g(|k|)$  和边缘停止  $\frac{1}{|\nabla u|}$  两个分量构成,本文  $g(|k|)$  取:

$$g(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \infty, & k = \infty \\ \text{中间值}, & 0 < k < \infty \end{cases} \quad (6)$$

$g(|k|)$  可以消除等照度线中存在的任何“大曲率”局部结构,且稳定等照度线的平直部分;  $\frac{1}{|\nabla u|}$  用于强化边缘;  $g(|k|)$  和  $\frac{1}{|\nabla u|}$  的共同作用可以延长图像中的等照度线、强化边缘,使受损图像中的完好信息延伸到待修复区域,达到修复目的。离散化式(5),得 CDD 模型数值化方案:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \cdot \nabla \cdot \left[ \frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] \quad (7)$$

式中,  $u^n$  为待修复点,  $\Delta t$  为迭代步长(本文取  $\Delta t = 1$ )。待修复点采用半点差分求解:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \nabla u \right]_{i,j} = (g \frac{u_x}{|\nabla u|})_{i,j+1/2} - (g \frac{u_x}{|\nabla u|})_{i,j-1/2} + (g \frac{u_y}{|\nabla u|})_{i+1/2,j} - (g \frac{u_y}{|\nabla u|})_{i-1/2,j} \quad (8)$$

以半点  $(i, j + \frac{1}{2})$  的计算为例:

$$(u_x)_{i,j+1/2} = u_{i,j+1} - u_{i,j} \quad (9)$$

$$(u_y)_{i,j+1/2} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{4} \quad (10)$$

$$|\nabla u|_{i,j+1/2} = \sqrt{(u_x)_{i,j+1/2}^2 + (u_y)_{i,j+1/2}^2} \quad (11)$$

$$k_{i,j+1/2} = \nabla \cdot \left[ \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]_{i,j+1/2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{|\nabla u|} \right]_{i,j+1/2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{|\nabla u|} \right]_{i,j+1/2} \quad (12)$$

其余 3 个半点的计算与式(9)一式(12)类似。

### 3.2 纹理修复及数值实现

Criminisi 方法修复纹理的原理<sup>[7]</sup>如图 1 所示。

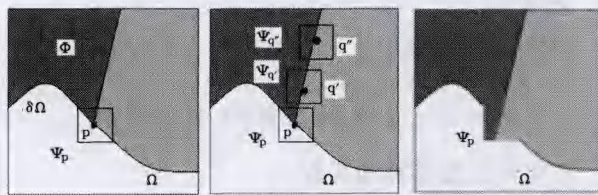


图 1 Criminisi 修复原理

图中  $\Omega$  表示待修复区域,  $\Phi$  为完好区域,  $\delta\Omega$  为待修复边界,  $p$  表示  $\delta\Omega$  上任一像素点,  $\Psi_p$  为待修复块,  $\Psi_q$  为  $\Psi_p$  在完好区域内对应的最佳匹配块。

Criminisi 算法实现过程:

(1) 参数:  $C(p)$  为待修复块的置信度,  $|\Psi_p|$  为待修复块面积,  $D(p)$  为待修复块数据项,  $\nabla I_p$  为与  $p$  点梯度垂直的等照度线梯度,  $\vec{n}_p$  是轮廓线在  $p$  点的单位法向量,  $\alpha=255$  为归一化系数。

初始化:

$$C(p) = \begin{cases} 0, & p \in \Omega \\ 1, & p \in \Phi \end{cases}$$

(2) 按式(13)计算待修复块  $\Psi_p$  的优先值  $P(p)$ , 确定优先值最大的待修复块为当前修复块。

$$P(p) = C(p)D(p) \quad (13)$$

式中,  $C(p) = \frac{\sum_{q \in \Psi_p \cap \Phi} C(q)}{|\Psi_p|}$ ,  $D(p) = \frac{|\nabla I_p \cdot \vec{n}_p|}{\alpha}$ 。

(3) 按式(14)在完好区域内全局搜索与待修复块  $\Psi_p$  最匹配的样本块, 将最匹配样本块复制到待修复块。

$$\Psi_q = \arg \min_{\Psi_q \in \Phi} d(\Psi_p, \Psi_q) \quad (14)$$

(4) 更新  $C(p)$ , 计算次优待修复块, 重复上述过程, 直到待修复区域全部填充, 结束。

## 4 实验结果及评价

本文实验均在 Matlab7.0 环境下完成。

图 2 给出本文方法和 MCA 方法分解  $256 \times 256$  大小的 Adar 图像的结果。实验参数:  $\Delta=0.1, K=50, \delta=\Delta * K, \lambda=1/\delta$ 。

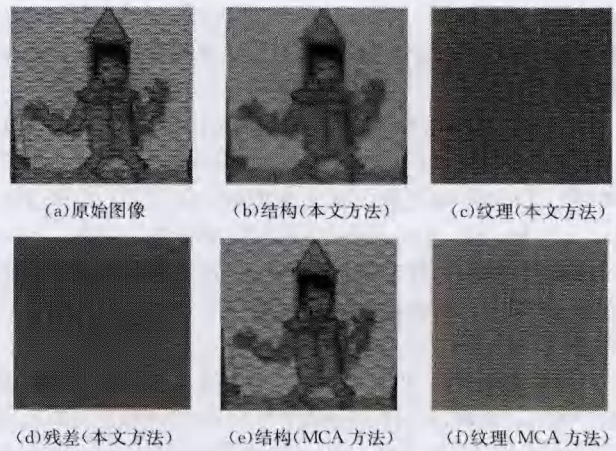


图 2 本文方法和 MCA 方法分解图像对比

观察图 2 可以看出, 相比 MCA 方法, 本文所设计的字典对可以更准确地捕获结构和纹理, 所得结构边缘光滑、突出(如手指、人物轮廓部分), 纹理保真度高且清晰完整, 残差几乎为零。MCA 方法的结构边缘比较模糊且含有大量纹理(如背景), 而纹理部分则失真严重。

图 3 是本文方法、CDD、Criminisi 和 MCA 方法修复  $256 \times 256$  大小的污损 Barbara 图像的结果。实验参数:  $K=200, \Delta=0.2, \delta=\Delta * K, \gamma=1, \lambda=1/\delta$ 。

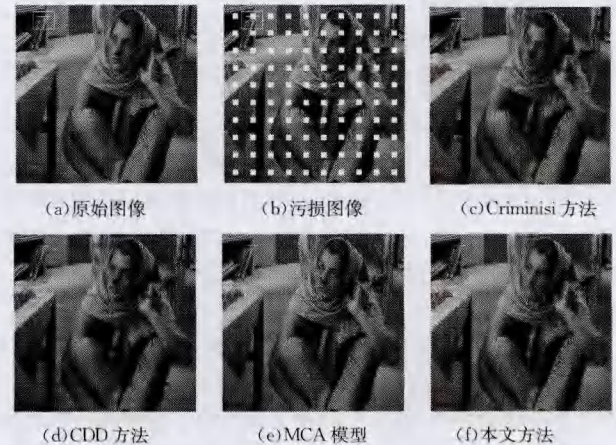


图 3 修复结果比较

初步观察图 3 可知, 本文方法修复质量最高。为了更好地体现本文方法的优越性, 放大图 3(a) 局部得图 4(a), 并叠加文字得图 4(b), 修复结果如图 4(c)~图 4(f)。实验参数同图 3 中的参数。



图 4 局部 Barbara 图像修复结果比较

观察图 4 可以明确看出 Criminisi、CDD 和 MCA 方法或多或少都留有修复的痕迹(如脸部和围巾部分),而本文方法几乎看不出修复痕迹。

客观上,本文从最小均方误差(MSE)、峰值信噪比(PSNR)和保真度曲线 3 个方面对上述方法加以评价。表 1 给出上述方法的最小均方误差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)。

表 1 4 种修复方法 MSE、PSNR 值

|              | Barbara 污损修复<br>(图 3) |         | 局部 Barbara 污损修复<br>(图 4) |         |
|--------------|-----------------------|---------|--------------------------|---------|
|              | MSE                   | PSNR    | MSE                      | PSNR    |
| Criminisi 算法 | 2.1219                | 14.8639 | 2.7995                   | 13.6599 |
| CDD 模型       | 2.0891                | 14.0312 | 2.7530                   | 13.7327 |
| MCA 模型       | 1.4434                | 16.5369 | 1.9636                   | 15.2002 |
| 本文方法         | 1.2910                | 17.0214 | 1.7164                   | 15.7846 |

随机对图 3(b)中的受损区域(方框标示区域)和原始图像、4 种修复结果的相同位置划线,绘制相应的保真度曲线如图 5 所示。

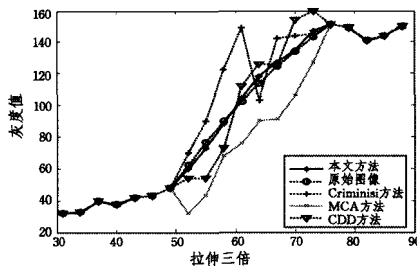


图 5 保真度曲线

观察图 5 可见,本文方法曲线最接近原始图像曲线,修复保真度最高。无论是主观视觉,还是客观的保真度曲线、MSE 和 PSNR 量化指标都反映出本文方法较 CDD、Criminisi 和 MCA 方法有更好的修复效果。

**结束语** 本文将图像修复工作划分为分解(分解为结构和纹理)和修复(根据结构和纹理所具有的不同特征,采用不同的方法修复)两个阶段,而传统的图像修复方法则是采用单一的方法对整幅图像修复,不能针对不同成分的图像特征有针对性地进行修复。在追求高质量图像修复的情况下,本文方法不失为一个不错的选择。同时,需要说明的是由于增加了分解环节,相比于单一修复方法来说是以时间为代价换取修复质量。

综上所述,字典对的设计对图像稀疏分解质量至关重要,本文提出的稀疏分解图像修复方法采用新的字典对获取结构和纹理,并有针对性地进行 CDD 模型和 Criminisi 方法修复结构和纹理,保证修复后的图像具有强且光滑的边缘,纹理清晰完整。后续工作中,探索构造更有效的字典对、提高算法效率、获得更好的图像修复质量是今后努力的目标。

### 参考文献

[1] Cai Han-hui. The key technology of image restoration research [D]. Nanjing: Nanjing University of Technology, 2012 (in Chinese)

蔡汉辉. 图像修复的关键技术研究[D]. 南京:南京理工大学, 2012

[2] Zhao M, Li S. Hybrid inpainting algorithm based on sparse representation and fast inpainting method[J]. International Journal of Digital Content Technology and its Applications, 2011, 5(7): 239-247

[3] Ni Kang-yu. Variational PDE-based Image Segmentation and Inpainting with Application in computer Graphics[D]. Los Angeles: University of California, 2008

[4] Chan T F, Shen Jian-hong. Variational image inpainting [J]. Communications on pure and applied mathematics, 2005, 58(5): 579-619

[5] Fang Bao-long. Image restoration algorithm based on texture synthesis research [D]. Jinan: Shandong University, 2013 (in Chinese)

方宝龙. 基于纹理合成的图像修复算法研究[D]. 济南:山东大学, 2013

[6] Zhu Xuan, Lei Wen-juan, Zhang Shen-hua, et al. Image Zooming by Combination of the Curvature-Driven and Edge-Stopping Nonlinear Diffusion [J]. Computer Science, 2011, 38(3): 290-291, 299 (in Chinese)

祝轩, 雷文娟, 张申华, 等. 曲率驱动与边缘停止相结合的图像放大[J]. 计算机科学, 2011, 38(3): 290-291, 299

[7] Criminisi A, Perez P, Toyama K. Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(9): 1200-1212

[8] Starck J-L, Elad M, Donoho D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and a variational approach [J]. IEEE Trans. Image Process, 2005, 14(10): 1570-1582

[9] Smith L N, Elad M. Improve dictionary learning: multiple dictionary updates and coefficient reuse [J]. IEEE Signal Processing Letter, 2013, 20(1): 9-82

[10] Fowler J E. The redundant discrete wavelet transform and additive noise [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(9): 629-632

[11] Song Yi-mei, Lu Cheng-wu, Song Guo-xiang. Image denoising based on wave atoms and total variation [J]. Application Research of Computers, 2010, 27(5): 1962-1964 (in Chinese)

宋宜美, 卢成武, 宋国乡. 结合波原子和全变差方法的图像去噪 [J]. 计算机应用研究, 2010, 27(5): 1962-1964

[12] 刘国军, 冯象初, 张选德. 波原子纹理图像阈值算法 [J]. 电子与信息学报, 2009(8): 1791-1795

Liu Guo-jun, Feng Xiang-chu, Zhang Xuan-de. Threshold Algorithm of Texture Images with Wave Atoms [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2009(8): 1791-1795

[13] Elad M, Starck J L, Querre P, et al. Simultaneous Cartoon and Texture Image inpainting Using Morphological Component Analysis (MCA) [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19(3): 340-358