集对属性软计算方法及应用

刘保相　白　斌　李丽红　李　言
(华北理工大学理学院　唐山 063009)

摘　要　集对分析方法的关键是计算联系度,集对关联函数的构建为刻画集合之间的关系、确定联系度表达式提供了一种新的软计算方法。首先,基于粗糙集定义了属性关联函数,探讨了其基本性质;其次,定义了集对关联函数,证明了当集对中任一集合扩充为整个论域时,集对关联函数退化为属性关联函数,进一步探讨了集对关联函数的基本性质;再次,基于属性集与元素集的交并运算给出了集对关联函数的合成运算及运算律;最后,利用实例说明了集对属性软计算方法的可行性与实用性。

关键词　粗糙集,联系度,属性关联函数,集对关联函数

中图法分类号　TP181　　**文献标识码**　A　　**DOI**　10.11896/j.issn.1002-137X.2016.1.016

Set Pair Attributes Soft Computing Method and its Application

LIU Bao-xiang　BAI Bin　LI Li-hong　LI Yan
(College of Science, North China University of Science and Technology, Tangshan 063009, China)

Abstract　The key to set pair analysis method is to compute the connection degree. The structure of set pair correlation function provides a new soft computing method of describing the relationship between the collections and determining the connection degree express formula. Firstly, based on rough set, the attribute correlation function was defined and the basic properties were discussed. Secondly, the set pair correlation function was defined and it was proved that the set pair correlation degrades into the attribute correlation function when any collection of set pair is expended to the whole region. The basic properties of the set pair correlation function were discussed. What's more, the synthetic operations and operation laws were given. Finally, the feasibility and practicability of the set pair of soft computing method about attributes were illustrated through a case study.

Keywords　Rough set, Connection degree, Attribute correlation function, Set pair correlation function

软计算[1-3]是融合粗糙集和模糊逻辑等理论,对不确定、不精确及不完全真值的数据进行容错处理,以实现低代价、易控制处理及高鲁棒性的方法。粗糙集[4,5]利用上、下近似集来刻画和逼近集合,把无法确定的个体都归属于边界区域;集对理论通过分析集对特性的同一性、差异性和对立性来刻画集合之间的联系状态。

粗糙集与集对分析是两种有效的进行信息系统中不确定性研究的重要工具,已有许多学者基于软计算的思想对二者进行融合研究并将其应用于诸多领域[6-9]。王慧萍等[10]针对不完备信息系统,将粗糙集理论与集对分析理论相结合,对不完备信息系统下的集对粗糙模型进行了研究;刘保相[11]采用SPA的方法对不同时刻的粗集进行比较,给出集对联系度,通过分析联系度得出粗集的变化情况;杨亚锋等[12]利用粗糙集的上、下近似构建了粗糙联系函数,提出了基于粗糙集的集对分析方法,对粗集 X 在相对于论域 U 形成的确定-不确定系统进行了静态描述。然而,在不同属性集上由粗糙近似集构建的集对联系度是不同的,因此需要探讨不同属性集上集对联系度的动态变化情况及互动规律;同时,在实际应用中,通常会遇到需要将集对联系度进行合成以实时反映现实问题的情况。

基于此,本文提出了一种新的集对属性软计算方法——集对关联函数,以期描述确定及不确定系统的动态变化情况。本文第1节定义了属性关联函数,并对其性质进行了研究;第2节给出了集对关联函数的定义,讨论并证明了其一系列的相关性质;第3节结合集合运算中的交并运算,针对集对关联函数中的两个动态因子:属性集和集对,分别提出了两种集对关联函数的合成运算;第4节通过实例验证了集对关联函数定义的正确性及合并运算的有效性和实用性。

1　属性关联函数与性质

本文在信息系统意义下,基于粗糙集理论中知识库[13]和近似集[14,15]等概念,定义了属性关联函数并探讨了其基本性质。

定义1(属性关联函数)　给定知识库 $K=(U,A)$ 和属性集 R,集合 $X\subseteq U$ 关于属性集 R 的粗糙集为 $(\underline{R}(X),\overline{R}(X))$:

$$\underline{R}(X)=\{x\in U\mid [x]_R\subseteq X\}$$

到稿日期:2015-04-30　返修日期:2015-06-07　本文受国家自然科学基金项目(61370168,61472340)资助。

刘保相(1957-),男,教授,主要研究方向为概念格、粗糙集、数据挖掘等;**白　斌**(1989-),男,硕士生,主要研究方向为粗糙集、集对分析、信息熵等,E-mail:956201990@qq.com;**李丽红**(1978-),女,副教授,主要研究方向为集对分析、网络计算等;**李　言**(1990-),女,助教,主要研究方向为粗糙集、概念格、三支决策等。

$\overline{R}(X)=\{x\in U|[x]_R\cap X\neq\emptyset\}$

称 $\mu_R(X)=a_R+b_Ri+c_Rj$ 为 X 关于属性集 R 的属性关联函数，其中：

$a_R=|\underline{R}(X)|/|U|,b_R=|\overline{R}(X)-\underline{R}(X)|/|U|$

$c_R=|U-\overline{R}(X)|/|U|$

分别称为 X 关于 R 的同一度、差异度和对立度，且 $a_R+b_R+c_R=1$ 满足归一化条件，$i\in[-1,1]$、$j=-1$ 为标记符号。

给定知识库 $K=(U,A)$ 和属性集 $R,S\subseteq A$，令 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{|U|}\}$，$\omega=\{\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_{|U|}\}\}$，集合 $X\subseteq U$ 的属性关联函数 $\mu_R(X)$ 有以下性质。

性质 1 属性关联函数 $\mu_R(X)=i$ 的充分必要条件是 $U/R=U$。

证明：(充分性)当 $U/R=U$ 时，$\overline{R}(X)=U,\underline{R}(X)=\emptyset$，$a_R=0,c_R=0,b_R=1$，得 $\mu_R(X)=i$。

(必要性)当 $\mu_R(X)=i$ 时，$a_R=|\underline{R}(X)|/|U|=0,c_R=|U-\overline{R}(X)|/|U|=0$，则 $\underline{R}(X)=\emptyset,\overline{R}(X)=U$，得 $U/R=U$。

性质 2 属性关联函数 $\mu_R(X)=a_R+c_Rj$ 的充分必要条件是 $U/R=\omega$。

证明：(充分性)由 $U/R=\omega$ 得

$\overline{R}(X)=\underline{R}(X)=X$

$b_R=|\overline{R}(X)-\underline{R}(X)|/|U|=0$

则 $\mu_R(X)=a_R+c_Rj$。

(必要性)当 $\mu_R(X)=a_R+c_Rj$ 时，$b_R=0,\overline{R}(X)=\underline{R}(X)=X$，得 $U/R=\omega$。

性质 3 令 $T=R\cup S$，集合 X 关于属性 T 的属性关联函数 $\mu_T(X)=a_T+b_Ti+c_Tj$，有：$a_T\geqslant a_R,a_T\geqslant a_S,c_T\geqslant c_R,c_T\geqslant c_S,b_T\leqslant b_R,b_T\leqslant b_S$。

证明：设属性集 R,S,T 在 U 上的划分分别为：

$U/R=\{X_1^R,X_2^R,\cdots,X_k^R\}$

$U/S=\{X_1^S,X_2^S,\cdots,X_l^S\}$

$U/T=\{X_1^T,X_2^T,\cdots,X_m^T\}$

由于 $T=R\cup S$ 有：

$\underline{T}(X)\supseteq\underline{R}(X),\underline{T}(X)\supseteq\underline{S}(X)$

$\overline{T}(X)\subseteq\overline{R}(X),\overline{T}(X)\subseteq\overline{S}(X)$

$BN^T(X)=\overline{T}(X)-\underline{T}(X)\subseteq BN^R(X)=\overline{R}(X)-\underline{R}(X)$

$BN^T(X)\subseteq BN^S(X)=\overline{S}(X)-\underline{S}(X)$

$a_T=|\underline{T}(X)|/|U|\geqslant|\underline{R}(X)|/|U|=a_R$

$a_T=|\underline{T}(X)|/|U|\geqslant|\underline{S}(X)|/|U|=a_S$

$c_T=|U-\overline{T}(X)|/|U|\geqslant|U-\overline{R}(X)|/|U|=c_R$

$c_T=|U-\overline{T}(X)|/|U|\geqslant|U-\overline{S}(X)|/|U|=c_S$

$b_T=|\overline{T}(X)-\underline{T}(X)|/|U|\leqslant|\overline{R}(X)-\underline{R}(X)|/|U|=b_R$

$b_T=|\overline{T}(X)-\underline{T}(X)|/|U|\leqslant|\overline{S}(X)-\underline{S}(X)|/|U|=b_S$

证毕。

2 集对关联函数与性质

2.1 集对关联函数

集对是具有一定联系的两个集合组成的对子。集对分析是基于成对原理辩证认识和整体刻画集合之间的同异反联系状态，能较好地实现不确定性信息处理的辩证思维与数学方法的有机结合。在信息系统中，结合属性关联函数，在论域 U 中任取两个集合 $X,Y\subseteq U$ 构成集对 $H(X,Y)$，基于集对 $H(X,Y)$ 的上、下近似集，定义集对关联函数，使集对分析表示的确定和不确定性之间的联系更客观、更有效。

定义 2(集对关联函数) 给定知识库 $K=(U,A)$ 和属性集 R，由 $X,Y\subseteq U$ 组成集对 $H(X,Y)$ 关于 R 的粗糙集($\underline{R}(X,Y),\overline{R}(X,Y)$)：

$\underline{R}(X,Y)=\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)$

$\overline{R}(X,Y)=\overline{R}(X\cap Y)=\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)$

称 $\mu_R(X,Y)=a_R^H+b_R^Hi+c_R^Hj$ 为集对 $H(X,Y)$ 关于属性集 R 的集对关联函数，其中：

$a_R^H=|\underline{R}(X\cap Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|,\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)$

$b_R^H=|\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)-\underline{R}(X\cap Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|$

$c_R^H=|\overline{R}(X\cup Y)-\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|$

分别称为 $H(X,Y)$ 关于 R 的同一度、差异度和对立度，$i\in[-1,1]$，$j=-1$ 为标记符号，$a_R^H+b_R^H+c_R^H=1$ 仍然满足归一化条件。

2.2 集对关联函数的基本性质

知识库 $K=(U,A)$ 和属性集 R，集对 $H(X,Y)$ 的集对关联函数有以下性质。

性质 4 当 $Y=U$ 时，$\mu_R(X,Y)=\mu_R(X)$。

证明：当 $Y=U$ 时，有：

$\underline{R}(X,Y)=\underline{R}(X\cap Y)=\underline{R}(X)$

$\overline{R}(X,Y)=\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)=\overline{R}(X)$

$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)=\overline{R}(U)=U$

$a_R^H=|\underline{R}(X\cap Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|=|\underline{R}(X)|/|U|=a_R$

$$\begin{aligned}b_R^H&=|\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)-\underline{R}(X\cap Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|\\&=|\overline{R}(X)-\underline{R}(X)|/|U|=b_R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_R^H&=|\overline{R}(X\cup Y)-\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|\\&=|U-\overline{R}(X)|/|U|=c_R\end{aligned}$$

得 $\mu_R(X,Y)=\mu_R(X)$。

性质 5 集对关联函数 $\mu_R(X,Y)=i$ 的充分必要条件是 $U/R=U$。

证明：(充分性)当 $U/R=U$ 时，$\underline{R}(X,Y)=\emptyset,\overline{R}(X,Y)=\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)=\overline{R}(X\cup Y)$，则：

$a_R^H=|\underline{R}(X,Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|=0$

$b_R^H=|\overline{R}(X,Y)-\underline{R}(X,Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|=1$

$c_R^H=|\overline{R}(X\cup Y)-\overline{R}(X,Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|=0$

得 $\mu_R(X,Y)=i$。

(必要性)$\mu_R(X,Y)=i$ 即 $a_R^H=0,b_R^H=1,c_R^H=0$，有 $\underline{R}(X,Y)=\emptyset,\overline{R}(X,Y)=\overline{R}(X\cup Y)$，得 $U/R=U$。

性质 6 集对关联函数 $\mu_R(X,Y)=a_R^H+c_R^Hj$ 的充分必要条件是 $U/R=\omega$。

证明：(充分性)当 $U/R=\omega$ 时，有：

$\overline{R}(X,Y)=\underline{R}(X,Y)=X\cap Y$

$b_R^H=|\overline{R}(X,Y)-\underline{R}(X,Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|=0$

得 $\mu_R(X,Y)=a_R^H+c_R^Hj$。

(必要性)当 $\mu_R(X,Y)=a_R^H+c_R^Hj$ 时，$b_R^H=0,\underline{R}(X,Y)=\overline{R}(X,Y),\underline{R}(X)\cap\underline{R}(Y)=X\cap Y$，得 $U/R=\omega$。

性质 7 令 $T=R\cup S$，$H(X,Y)$ 关于属性集 T 的集对关联函数 $\mu_T(X,Y)=a_T^H+b_T^Hi+c_T^Hj$，有：$a_T^H\geqslant a_R^H,a_T^H\geqslant a_S^H,c_T^H\geqslant c_R^H,c_T^H\geqslant c_S^H,b_T^H\leqslant b_R^H,b_T^H\leqslant b_S^H$。

证明：设属性集 R,S,T 在 U 上的划分分别为：

$U/R=\{X_1^R, X_2^R, \cdots, X_k^R\}$

$U/S=\{X_1^S, X_2^S, \cdots, X_l^S\}$

$U/T=\{X_1^T, X_2^T, \cdots, X_m^T\}$

由 $T=R\cup S$ 有：

$\underline{T}(X,Y)\supseteq\underline{R}(X,Y)$，$\underline{T}(X,Y)\supseteq\underline{S}(X,Y)$，$\overline{T}(X,Y)\subseteq\overline{R}(X,Y)$，$\overline{T}(X,Y)\subseteq\overline{S}(X,Y)$，$\overline{T}(X\cup Y)\subseteq\overline{R}(X\cup Y)$，$\overline{T}(X\cup Y)\subseteq\overline{S}(X\cup Y)$

得

$$a_T^H=|\underline{T}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|\geqslant|\underline{R}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|=a_R^H$$

$$a_T^H=|\underline{T}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|\geqslant|\underline{S}(X,Y)|/|\overline{S}(X\cup Y)|=a_S^H$$

$$c_T^H=|\overline{T}(X\cup Y)-\overline{T}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|\geqslant|\overline{R}(X\cup Y)-\overline{R}(X,Y)|/|\overline{R}(X\cup Y)|=c_R^H$$

$$c_T^H=|\overline{T}(X\cup Y)-\overline{T}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|\geqslant|\overline{S}(X\cup Y)-\overline{S}(X,Y)|/|\overline{S}(X\cup Y)|=c_S^H$$

$$b_T^H=|\overline{T}(X,Y)-\underline{T}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|\leqslant|\overline{R}(X,Y)-\underline{R}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|=b_R^H$$

$$b_T^H=|\overline{T}(X,Y)-\underline{T}(X,Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|\leqslant|\overline{S}(X,Y)-\underline{S}(X,Y)|/|\overline{S}(X\cup Y)|=b_R^H$$

证毕。

3 集对关联函数的合成运算

集对关联函数中包含有属性集和集对两个动态因子：属性集的不同表示对事物确定和不确定性认知的不同，集对代表讨论的事物集。属性集和集对的增大或减小可以用集合的交、并运算表达，因此本文提出集对关联函数基于属性集和元素集的两种合成运算。

3.1 集对关联函数关于属性集的合成运算

给定知识库 $K=(U,A)$ 和属性集 R,S，对于集合 $X,Y\subseteq U$ 构成的集对 $H(X,Y)$，关于属性集 R,S 的集对关联函数分别为：$\mu_R(X,Y)$、$\mu_S(X,Y)$。

定义 3（$\cup^{\mathscr{R}}$合成运算） 设有集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_S(X,Y)$，令属性集 $T=R\cup S$，称

$$\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_{R\cup S}(X,Y)=\mu_T(X,Y)=a_T^H+b_T^Hi+c_T^Hj$$

为集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_S(X,Y)$ 关于属性集 $R\cup S$ 的合成运算，其中：

$$a_T^H=|\underline{T}(X\cap Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|$$

$$b_T^H=|\overline{T}(X)\cap\overline{T}(Y)-\underline{T}(X\cap Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|$$

$$c_T^H=|\overline{T}(X\cup Y)-\overline{T}(X)\cap\overline{T}(Y)|/|\overline{T}(X\cup Y)|$$

“$\cup^{\mathscr{R}}$”为集对关联函数关于属性集的并运算符号。

由于等价划分 U/T 可以通过 U/R 和 U/S 的交运算得到，即 U/T 的等价类可以通过 U/R 和 U/S 的等价类进行分割、细化得到，此时边界域的等价类由于进行了分割，某些等价类会转变为下近似集，某些却转变到上近似集之外，边界域减小。故集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_S(X,Y)$ 关于属性集 $R\cup S$的合成运算就是要在 U/R 和 U/S 的基础上寻找发生变动的等价类，计算$(\underline{T}(X,Y),\overline{T}(X,Y))$，具体计算方法如下：

步骤 1 给定知识库 $K=(U,A)$ 和属性集 R,S，集对 $H(X,Y)$，有：

$\underline{R}(X,Y)=\underline{R}(X\cap Y)$，$\overline{R}(X,Y)=\overline{R}(X)\cap\overline{R}(Y)$

$\overline{R}(X\cup Y)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)$，$\underline{S}(X,Y)=\underline{S}(X\cap Y)$

$\overline{S}(X,Y)=\overline{S}(X)\cap\overline{S}(Y)$，$\overline{S}(X\cup Y)=\overline{S}(X)\cup\overline{S}(Y)$

步骤 2 计算$\overline{R}(X,Y)\cap\overline{S}(X,Y)$，$\underline{R}(X,Y)\cup\underline{S}(X,Y)$和$\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{S}(X\cup Y)$。

步骤 3 令 $BN_u^*=\overline{R}(X,Y)\cap\overline{S}(X,Y)-(X\cap Y)$，$BN_l^*=(X\cap Y)-\underline{R}(X,Y)\cup\underline{S}(X,Y)$，分别计算 BN_u^*，BN_l^*。

步骤 4 比较 BN_u^* 与$\overline{R}(X,Y)\cap\overline{S}(X,Y)$以及 BN_l^* 与$\underline{R}(X,Y)\cup\underline{S}(X,Y)$，若$\underline{R}(X,Y)\cup\underline{S}(X,Y)$中存在等价类 $X_i\subseteq BN_l^*$，则将 X_i 并入到$\underline{R}(X,Y)\cup\underline{S}(X,Y)$中，添加所有 X_i 后的$\underline{R}(X,Y)\cup\underline{S}(X,Y)$即为$\underline{T}(X,Y)$；若$\overline{R}(X,Y)\cap\overline{S}(X,Y)$中存在等价类 $X_j\subseteq BN_u^*$，则将所有 X_j 从$\overline{R}(X,Y)\cap\overline{S}(X,Y)$中移出，除去所有 X_j 后的$\overline{R}(X,Y)\cap\overline{S}(X,Y)$即为$\overline{T}(X,Y)$。

步骤 5 令 $BN_u{}'=\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{S}(X\cup Y)-(X\cup Y)$，比较 $BN_u{}'$与$\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{S}(X\cup Y)$，若$\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{S}(X\cup Y)$中存在等价类 $X_K\subseteq BN_u{}'$，则将所有的 X_k 从$\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{S}(X\cup Y)$中移出，除去所有 X_k 后的$\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{S}(X\cup Y)$即为$\overline{T}(X\cup Y)$。

步骤 6 依据$\underline{T}(X,Y)$，$\overline{T}(X,Y)$和$\overline{T}(X\cup Y)$计算集对关联函数 $\mu_T(X,Y)$。

定义 4（$\cap^{\mathscr{R}}$合成运算） 设有集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_S(X,Y)$，令属性集 $V=R\cap S$，称

$$\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_{R\cap S}(X,Y)=\mu_V(X,Y)=a_V^H+b_V^Hi+c_V^Hj$$

为集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_S(X,Y)$ 关于属性集 $R\cap S$ 的合成运算，其中：

$$a_V^H=|\underline{V}(X\cap Y)|/|\overline{V}(X\cup Y)|$$

$$b_V^H=|\overline{V}(X)\cap\overline{V}(Y)-\underline{V}(X\cap Y)|/|\overline{V}(X\cup Y)|$$

$$c_V^H=|\overline{V}(X\cup Y)-\overline{V}(X)\cap\overline{V}(Y)|/|\overline{V}(X\cup Y)|$$

“$\cap^{\mathscr{R}}$”为集对关联函数关于属性集的交运算符号。

由于 U/V 可以从 U/R 或 U/S 中查得，因此容易求得 $\overline{V}(X,Y)$，$\underline{V}(X,Y)$，则

$$\mu_V(X,Y)=a_V^H+b_V^Hi+c_V^Hj$$

特别地，当 $R\cap S=V=\varnothing$ 时，$\underline{V}(X,Y)=\varnothing$，$\overline{V}(X,Y)=X\cup Y$，得 $\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=i$。

性质 8 集对关联函数关于属性集的合成运算满足交换律和结合律：

$$\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_S(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_R(X,Y)$$

$$\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_S(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_R(X,Y)$$

$$(\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y))\cup^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y)=\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}(\mu_S(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y))$$

$$(\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y))\cap^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y)=\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}(\mu_S(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y))$$

证明：（交换律）由 $R\cup S=S\cup R$，$R\cap S=S\cap R$，依据定义 3、定义 4 得：

$$\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_{R\cup S}(X,Y)=\mu_{S\cup R}(X,Y)=\mu_S(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_R(X,Y)$$

$$\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_{R\cap S}(X,Y)=\mu_{S\cap R}(X,Y)=\mu_S(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_R(X,Y)$$

（结合律）由于属性集 R,S,T 满足

$(R\cup S)\cup T=R\cup(S\cup T)$

$(R\cap S)\cap T=R\cap(S\cap T)$

依据定义 3、定义 4 得：

$(\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y))\cup^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y)$

$=\mu_{(R\cup S)\cup T}(X,Y)$

$=\mu_{R\cup(S\cup T)}(X,Y)$

$=\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}(\mu_S(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y))$

$(\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y))\cap^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y)$

$=\mu_{(R\cap S)\cap T}(X,Y)$

$=\mu_{R\cap(S\cap T)}(X,Y)$

$=\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}(\mu_S(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_T(X,Y))$

证毕。

3.2 集对关联函数关于元素集的合成运算

给定知识库 $K=(U,A)$ 和 R，集合 $X,Y,Z\subseteq U$ 组成的集对 $H(X,Y)$，$H(X,Z)$ 关于属性集 R 的集对关联函数分别为：$\mu_R(X,Y)$，$\mu_R(X,Z)$。

定义 5（$\cup^{u}$ 合成运算） 设有集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_R(X,Z)$，称

$$\mu_R(X,Y)\cup^{u}\mu_R(X,Z)=\mu_R(X,Y\cup Z)=a_R^H+b_R^H i+c_R^H j$$

为集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_R(X,Z)$ 关于元素集 $Y\cup Z$ 的合成运算，其中：

$a_R^H=|\underline{R}(X,Y\cup Z)|/|\overline{R}(X\cup Y\cup Z)|$

$b_R^H=|\overline{R}(X,Y\cup Z)-\underline{R}(X,Y\cup Z)|/|\overline{R}(X\cup Y\cup Z)|$

$c_R^H=|\overline{R}(X\cup Y\cup Z)-\overline{R}(X,Y\cup Z)|/|\overline{R}(X\cup Y\cup Z)|$

$\overline{R}(X\cup Y\cup Z)=\overline{R}(X)\cup\overline{R}(Y)\cup\overline{R}(Z)$

$\overline{R}(X,Y\cup Z)=\overline{R}(X\cap Y)\cap\overline{R}(X\cap Z)$

$\overline{R}(X,Y\cup Z)=\overline{R}(X\cap Y)\cup\overline{R}(X\cap Z)$

“$\cup^{u}$”为两个联系函数关于元素集的并运算符号。

定义 6（$\cap^{u}$ 合成运算） 设有集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_R(X,Z)$，称

$$\mu_R(X,Y)\cap^{u}\mu_R(X,Z)=\mu_R(X,Y\cap Z)=a_R^H+b_R^H i+c_R^H j$$

为集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_R(X,Z)$ 关于元素集 $Y\cap Z$ 的合成运算，其中：

$a_R^H=|\underline{R}(X,Y\cap Z)|/|\overline{R}(X\cup Y\cap Z)|$

$b_R^H=|\overline{R}(X,Y\cap Z)-\underline{R}(X,Y\cap Z)|/|\overline{R}(X\cup Y\cap Z)|$

$c_R^H=|\overline{R}(X\cup Y\cap Z)-\overline{R}(X,Y\cap Z)|/|\overline{R}(X\cup Y\cap Z)|$

$\underline{R}(X,Y\cap Z)=\underline{R}(X\cap Y)\cap\underline{R}(X\cap Z)$

$\overline{R}(X\cup Y\cap Z)=\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{R}(X\cup Z)$

$\overline{R}(X,Y\cup Z)=\overline{R}(X\cup Y)\cap\overline{R}(X\cup Z)$

“$\cap^{u}$”为两个联系函数关于元素集的交运算符号。

性质 9 集对关联函数关于元素集的合成运算满足交换律和结合律：

$\mu_R(X,Y)\cup^{u}\mu_R(X,Z)=\mu_R(X,Z)\cup^{u}\mu_R(X,Y)$

$\mu_R(X,Y)\cap^{u}\mu_R(X,Z)=\mu_R(X,Z)\cap^{u}\mu_R(X,Y)$

$(\mu_R(X,Y)\cup^{u}\mu_R(X,Z))\cup^{u}\mu_R(X,W)$

$=\mu_R(X,Y)\cup^{u}(\mu_R(X,Z)\cup^{u}\mu_R(X,W))$

$(\mu_R(X,Y)\cap^{u}\mu_R(X,Z))\cap^{u}\mu_R(X,W)$

$=\mu_R(X,Y)\cap^{u}(\mu_R(X,Z)\cap^{u}\mu_R(X,W))$

证明：(交换律)由于集合 X,Y 分别满足 $X\cup Y=Y\cup X$，$X\cap Y=Y\cap X$，由定义 5、定义 6 得：

$\mu_R(X,Y)\cup^{u}\mu_R(X,Z)=\mu_R(X,Y\cup Z)=\mu_R(X,Z\cup Y)=\mu_R(X,Z)\cup^{u}\mu_R(X,Y)$

$\mu_R(X,Y)\cap^{u}\mu_R(X,Z)=\mu_R(X,Y\cap Z)=\mu_R(X,Z\cap Y)=\mu_R(X,Z)\cap^{u}\mu_R(X,Y)$

(结合律)集合满足 $(Y\cup Z)\cup W=Y\cup(Z\cup W)$，$(Y\cap Z)\cap W=Y\cap(Z\cap W)$，由定义 5、定义 6 得：

$(\mu_R(X,Y)\cup^{u}\mu_R(X,Z))\cup^{u}\mu_R(X,W)$

$=\mu_R(X,Y\cup Z\cup W)$

$=\mu_R(X,Y)\cup^{u}(\mu_R(X,Z)\cup^{u}\mu_R(X,W))$

$(\mu_R(X,Y)\cap^{u}\mu_R(X,Z))\cap^{u}\mu_R(X,W)$

$=\mu_R(X,Y\cap Z\cap W)$

$=\mu_R(X,Y)\cap^{u}(\mu_R(X,Z)\cap^{u}\mu_R(X,W))$

证毕。

4 实例分析

信息系统 $K=(U,A)$；$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$，$A=\{$身高，头发，眼睛，分类$\}$，如表 1 所列。

表 1 信息系统

对象	身高	头发	眼睛	分类
x_1	Short	Blond	Blue	+
x_2	Short	Blond	Brown	+
x_3	Tall	Red	Blue	−
x_4	Tall	Dark	Blue	*
x_5	Tall	Dark	Dark	−
x_6	Middle	Blond	Blond	*
x_7	Middle	Dark	Dark	+
x_8	Middle	Blond	Blond	+

设 $R=$(身高)，$S=$(头发)，由 $X=\{1,2,7,8\}$，$Y=\{1,2,5,6\}$，$Z=\{1,2,6,7\}$ 组成集对 $H(X,Y)$ 和 $H(X,Z)$：

(1)在信息系统 $K=(U,A)$ 中粗集 X 基于属性集 R 的属性关联函数 $\mu_R(X)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}i+\frac{3}{8}j$；基于属性集 S 的属性关联函数 $\mu_S(X)=\frac{7}{8}i+\frac{1}{8}j$；令 $T=R\cup S$，基于属性集 T 的属性关联函数 $\mu_T(X)=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}i+\frac{3}{8}j$。

(2)集对 $H(X,Y)$ 基于属性集 R 的集对关联函数 $\mu_R(X,Y)=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}i+\frac{3}{8}j$；基于 S 的集对关联函数 $\mu_S(X,Y)=i$；集对 $H(X,Z)$ 基于属性集 R 的集对关联函数 $\mu_R(X,Z)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i$。

令 $T=R\cup S$，$V=R\cap T$ 集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_S(X,Y)$ 基于 $R\cup S$ 和 $R\cap T$ 的合成分别为：

$$\mu_R(X,Y)\cup^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_T(X,Y)=\frac{2}{7}+\frac{5}{7}j$$

$$\mu_R(X,Y)\cap^{\mathscr{R}}\mu_S(X,Y)=\mu_V(X,Y)=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}i+\frac{3}{8}j$$

集对关联函数 $\mu_R(X,Y)$ 和 $\mu_R(X,Z)$ 基于 $Y\cup Z$ 和 $Y\cap Z$ 的合成分别为：

$$\mu_R(X,Y)\cup^{u}\mu_R(X,Z)=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}i+\frac{3}{8}j$$

$$\mu_R(X,Y)\cap^{u}\mu_R(X,Z)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i$$

实例分析表明，集对关联函数可以清晰地展示不同等价划分背景下关联函数中同一、差异和对立三者之间的相互转化关系和变化规律；通过近似集的交、并和差运算可以高效地进行集对关联函数的合成运算。

结束语 在信息系统意义下，将粗糙集中的近似算子理论应用于集对关联函数的构建中，提出基于粗糙集理论近似

(下转第 76 页)

[18] Li Shao-yong, Li Tian-rui. Incremental update of approximations in dominance-based rough sets approach under the variation of attribute values [J]. Information Sciences, 2015, 294: 348-361

[19] Liu Dun, Li Tian-rui, Zhang Jun-bo. Incremental updating approximations in probabilistic rough sets under the variation of attributes [J]. Knowledge-Based Systems, 2015, 73: 81-96

[20] Liu Yong-wen, Li Tian-rui, Chen Hong-mei, et al. Research on approximate set incremental updating method in covering generalized rough set [J]. Computer Engineering, 2012, 38(2): 156-158 (in Chinese)
刘永文,李天瑞,陈红梅,等. 覆盖广义粗糙集中近似集增量更新方法研究[J]. 计算机工程, 2012, 38(2): 156-158

[21] Wang Jian-peng, Dai Dai, Zhou Zheng-chun. Fuzzy covering generalized rough sets [J]. Journal of Zhoukou Teachers College, 2004, 21(2): 20-22(in Chinese)
王健鹏,戴岱,周正春. 基于覆盖的模糊粗糙集模型[J]. 周口师范学院学报, 2004, 21(2): 20-22

[22] Xu Zhong-yin, Wang Qin. On the properties of covering rough sets model [J]. Journal of Henan Normal University (Natural Sciences), 2005, 33(1): 130-132(in Chinese)
徐忠印,王勤. 覆盖粗糙集模型的性质 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2005, 33(1): 130-132

[23] Ciucci D. Temporal dynamics in rough sets based on coverings [C]// RSKD 2010. LNAI 6401, 2010: 126-133

[24] Zhang Wen-xiu, Qiu Guo-fang. Uncertain decision making based on rough sets [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005(in Chinese)
张文修,仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京:清华大学出版社, 2005

(上接第 72 页)

集的集对属性软计算方法;探讨集对属性关联函数基于不同属性集的动态特征,通过原近似集之间的交、并和差运算确定粗集 X 基于新属性集划分下的集对关联函数,并给出集对关联函数的合成运算及运算律。这些研究为集对关联函数的计算提供了一种新方法,把集对关联函数推广并应用到决策、预测及综合评价等领域还需进一步研究。

参 考 文 献

[1] Tang J G, Zhu F, She K, et al. Survey on combination of rough sets and other soft computing theories[J]. Application Research of Computers, 2010, 27(7): 2404-2410(in Chinese)
汤建国,祝峰,佘堃,等. 粗糙集与其他软计算理论结合情况研究综述 [J]. 计算机应用研究, 2010, 27(7): 2404-2410

[2] Wang D J, Wang M. Research on Fusion Technology of Soft Computing[J]. Computer Technology and Development, 2012, 22(4): 97-100(in Chinese)
王大将,王敏. 软计算融合技术研究[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(4): 97-100

[3] Huang Q H. Research on Processing Complicated data Based on Fusion Technology of Soft Computing[J]. Information & Communications, 2014(3): 164(in Chinese)
黄启辉. 软计算融合技术复杂数据处理研究[J]. 信息通信, 2014(3): 164

[4] Wang G Y, Zhang Q H. Uncertainty of Rough Sets in Different Knowledge Granularities [J]. Chinese Journal of Computers, 2008, 31(9): 1588-1598(in Chinese)
王国胤,张清华. 不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究[J]. 计算机学报, 2008, 31(9): 1588-1598

[5] Wang G Y, Miao D Q, Wu W Z. Uncertain Knowledge Representation and Processig Based on Rough Set [J]. Journal of Chong Qing University of Posts and Telecommunications, 2010, 22(5): 541-544(in Chinese)
王国胤,苗夺谦,吴伟志,等. 不确定信息的粗糙集表示和处理[J]. 重庆邮电大学学报, 2010, 22(5): 541-544

[6] Ding A Z, Chen D S, Pan C Z, et al. Study on Water Resources Carrying Capacity Based on RS-SPA in china [J]. South-to-North Water Transfers and Water Science&Technology, 2010, 8(3): 71-75(in Chinese)
丁爱中,陈德胜,潘成忠,等. 基于粗糙集和集对分析的中国水资源承载力现状评价[J]. 南水北调与水利科技, 2010, 8(3): 71-75

[7] Wang M W, Li J, Xu P. The Edge fracture evaluation model Based on rough set pair potential[J]. Geological Review, 2013, 59(4): 796-800(in Chinese)
汪明武,李健,徐鹏. 基于粗糙集对势的优势断裂评价模型[J]. 地质论评, 2013, 59(4): 796-800

[8] Liu F C. Variabe Precision Rough Set Model Based on Set Pair Analysis[J]. Computer Engineering and Applications, 2005, 41(10): 74-76(in Chinese)
刘富春. 基于集对分析的变精度粗糙集模型[J]. 计算机工程与应用, 2005, 41(10): 74-76

[9] Liu F C. Extension of Rough Set under Incomplete Information System Based on Set-Pair Analysis[J]. Computer Science, 2006, 33(2): 169-172(in Chinese)
刘富春. 基于集对分析方法的不完备信息系统的扩充粗糙集模型[J]. 计算机科学, 2006, 33(2): 169-172

[10] 王慧萍. 基于集对联系度的粗糙集模型研究[D]. 合肥:安徽大学, 2010
Wang H P. The Research on Rough Set Model Based on Set-Pair Connectivity[D]. Hefei: Anhui University, 2010

[11] Liu B X. The Theory of Rough Sets Pair Analysis and Decision Model[M]. Beijing: Science Press, 2010(in Chinese)
刘保相. 粗糙集对分析理论与决策模型[M]. 北京:科学出版社, 2010

[12] Yang Y F, Li L H, Zhang C Y. The Method of Rough Sets Pair Analysis and Application in Attribution Reduction [J]. Fuzzy System and Mathematics, 2013, 27(6): 176-181(in Chinese)
杨亚锋,李丽红,张春英. 粗糙集对分析方法及其在属性约简中的应用[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(6): 176-181

[13] Zhang W X, Qiu G F. Uncertain Decision Making Based on Rough Sets [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005 (in Chinese)
张文修,仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京:清华大学出版社, 2005

[14] Wang G Y, Yao Y Y, Yu H. A Survey on Rough Set Theory and Tts Application [J]. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(7): 1229-1246(in Chinese)
王国胤,姚一豫,于洪. 粗糙集理论与应用研究综述[J]. 计算机学报, 2009, 32(7): 1229-1246

[15] Liang J Y, Qian Y H. Information granule and Entropy theory in Information System [J]. Sciencein in China, 2008 (12): 2048-2065(in Chinese)
梁吉业,钱宇华. 信息系统中的信息粒与熵理论[J]. 中国科学, 2008(12): 2048-2065