

一种非凸核范数最小化一般模型及其在图像去噪中的应用

孙少超

(公安海警学院 宁波 315801)

摘 要 聚焦于非凸的低秩逼近模型,提出了一类定义在矩阵奇异值上的非凸函数 g ,实际上很多著名的非凸函数都满足 g 函数的条件。将 g 函数引入带权核范数最小化模型得到更一般的模型,可以很好地解决模型中的权重选择问题。将该模型应用于图像去噪领域,并针对该模型给出收敛的求解算法。仿真实验表明,相对其他先进的算法所提方法更具优势。

关键词 非凸函数,低秩,带权核范数最小化,图像去噪

中图分类号 TP391 文献标识码 A

Nonconvex Nuclear Norm Minimization General Model with Its Application in Image Denoising

SUN Shao-chao

(China Maritime Police Academy, Ningbo 315801, China)

Abstract This paper focused on the nonconvex low rank approximation model. We proposed a class of nonconvex function g defined on the singular value of matrix. In fact, many famous nonconvex functions satisfy the condition of the function g . When the function g is introduced to the weighted nuclear norm minimization model, we can get a more general model, which can effectively solve the weight selection problem of former model. In this paper, the model was applied to the field of image denoising, and the convergence solver was given. Simulation results show that our proposed method is superior to other advanced algorithms.

Keywords Nonconvex function, Low rank, Weighted nuclear norm minimization, Image denoising

1 引言

低秩矩阵近似旨在从退化的观测中恢复潜在的低秩矩阵,并在计算机视觉和机器学习中得到广泛的应用。如由人的面部图像形成的矩阵具有低秩这一特性,我们能够重建闭塞或者损坏的面孔^[1-3]。由于客户的选择主要由几个因素共同影响,因此客户数据矩阵被认为是低秩的,可以被用来做客户推荐^[4]。考虑到静态相机捕获的视频片段的低秩性,可以做背景建模和前景提取^[5-6]。利用自然图像的非局部相似块组成的矩阵的低秩性实现高性能的图像恢复^[7]。由于凸与非凸优化技术的快速发展,近年来已有大量低秩近似的研究,提出了许多重要的模型和算法^[8-10]。

低秩近似可以看作矩阵奇异值稀疏的推广。为了实现稀疏性,一般的方法采用凸的 l_1 范数最小化。然而由于 l_1 范数是 l_0 范数的宽松近似,因此 l_1 范数最小化可能导致局部解,并且存在过惩罚的问题。而为了实现矩阵的低秩,通常是转换成求核范数最小化的问题,该问题是一个凸优化问题,但是也会出现与 l_1 范数最小化相同的问题。近年来,一些非凸的低秩模型^[11-12]被提出,并且实验证明其相对于凸模型有更好的性能。尽管如此,非凸优化的求解十分困难,而且非凸低秩最小化问题的求解比非凸稀疏最小化更具挑战。

在图像恢复领域,带权的核范数最小化模型(WN-NM)^[13]相对于标准的核范数最小化模型具有更好的图像恢

复效果,但 WNNM 模型的权重选择仍然值得深入研究。本文设计了一类非凸的函数,并将其应用在观测矩阵的奇异值来实现加权,同时与图像去噪模型相结合得到了新的带权去噪模型,并证明采用点迭代算法求解具有收敛性。

2 带权的核范数最小化图像去噪算法

对于一幅图像 y 的局部分块 y_j ,可以通过像块匹配的方法在图像中找到它的非局部分块(在实践中是一个足够大的局部窗口)。假设 X_j 和 N_j 分别是原始图像分块矩阵和噪声图像分块矩阵时,通过将这些非局部相似分块组成矩阵 Y_j ,可以得到 $Y_j = X_j + N_j$ 。根据图像的先验, X_j 应当是一个低秩矩阵,低秩矩阵逼近方式可以用于从 Y_j 估计 X_j 。聚集所有经过降噪的分块,可以估计整个图像。事实上,NNM 已在计算机视觉领域中被应用于视频降噪。文献[13]在图像降噪中将 WNNM 模型应用于 Y_j 来估计 X_j 。通过使用噪声方差 σ_n^2 来归一化 F 范数的保真项 $\|Y_j - X_j\|_F^2$,可以得到如下去噪模型:

$$\begin{aligned}\hat{X}_j &= \arg \min_{X_j} \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y_j - X_j\|_F^2 + \|X_j\|_{w,*} \\ &= \arg \min_{X_j} \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y_j - X_j\|_F^2 + w_i \sigma_i(X_j)\end{aligned}\quad (1)$$

显然,该模型的主要问题是权重向量 w 的确定。权重向量与对应的奇异值成反比,于是得到权重公式如下:

$$w_i = c \sqrt{n} / (\sigma_i(X_j) + \epsilon) \quad (2)$$

本文受公安部技术研究计划项目(2015JSYJC029),公安海警学院研究中心、科研团队研究计划项目资助。

孙少超(1984—),男,博士,讲师,主要研究方向为机器学习、计算机视觉, E-mail: shaochao0631@sina.com。

其中, $\sigma_i(X_j)$ 是图像块 X_j 对应的第 i 个奇异值, c 是一个常数, n 是 Y_j 中相似的分块的数量, $\epsilon = 10^{-16}$ 是为了避免分母为 0。由于算法不能直接获得 $\sigma_i(X_j)$ 的奇异值, 因此 $\sigma_i(X_j)$ 可以近似估计为:

$$\hat{\sigma}_i(X_j) = \sqrt{\max(\sigma_i^2(Y_j) - n\sigma_n^2, 0)} \quad (3)$$

其中, $\sigma_i(Y_j)$ 是 Y_j 的第 i 个奇异值, 注意, 当 $\sigma_i(X_j)$ 按非递增顺序排列时, 获得的权重 $\omega_{i=1, \dots, n}$ 被确保为非递增序列。通过上述步骤应用到每个分块并将所有分块组合, 图像 X 即被复原, 具体细节如算法 1 所示。

算法 1

1. 对于噪声图像 y , 初始化 $\hat{x}^{(0)} = y, y^{(0)} = y$, 给定常量 $L, 0 < \delta < 1$;

2. $k=1; L$, 执行

3. $y^{(k)} = \hat{x}^{(k-1)} + \delta(y - \hat{x}^{(k-1)})$

4. 对 $y^{(k)}$ 每一小块 y_j 执行

{ 寻找相似分块集合 Y_j

奇异值分解 $[U, \Sigma, V] = \text{SVD}(Y_j)$

根据式(2)计算估计权重向量 ω

获得估计: $\hat{X}_j = U S_w(\Sigma) V^T$

5. 聚集 $\hat{X}_j$ 组成去噪图像 $\hat{x}^{(k)}$, 跳转到步骤 2

算法 1 中, $S_w(\Sigma)_{ii}$ 被定义为:

$$S_w(\Sigma)_{ii} = \max(\Sigma_{ii} - \omega_i, 0) \quad (4)$$

3 非凸核范数最小化去噪模型

3.1 一类特殊的非凸函数

在第 2 节介绍的 WNNM 算法中, 不同的奇异值分配不同的权重, 权重向量与对应的奇异值成反比, 即奇异值越大对应的权重越小。相对于等权重的 NNM 算法, WNNM 算法具有更好的去噪效果, 这点也通过后面的仿真实验得以验证。然而在 WNNM 算法中, 权重的计算采用的是 $\sigma_i(X_j)$ 的近似值。本文对此进行改进, 首先定义了一类特殊的非凸函数 $g(x)$, 其满足条件 1。

条件 1 $g(x): R^+ \rightarrow R^+, g(0)=0, g$ 是凹函数, 非单调递减, 且可微, g 是凸函数。

而幸运的是, 已知的很多函数满足上述的 $g(x)$ 条件, 如表 1 所列。

表 1 满足条件 1 的非凸函数

非凸函数	$g(x)$
l_p -norm	$\lambda x^p, 0 < p < 1$
SCAD	$\begin{cases} \lambda x, & \text{if } x \leq \lambda \\ \frac{-x^2 + 2\gamma\lambda x}{2(\gamma-1)}, & \text{if } \lambda < x \leq \gamma\lambda \\ \frac{\lambda^2(\gamma+1)}{2}, & \text{if } x > \gamma\lambda \end{cases}$
Logarithm	$\frac{\lambda}{\log(\gamma+1)} \log(\gamma x + 1)$
MCP	$\begin{cases} \lambda x - \frac{x^2}{2(\gamma-1)} & \text{if } x < \gamma\lambda \\ \frac{1}{2}\gamma\lambda^2 & \text{if } x \geq \gamma\lambda \end{cases}$
Geman	$\frac{\lambda x}{x + \gamma}$
Laplace	$\lambda(1 - \exp(-\frac{x}{\gamma}))$

从图 1 和图 2 中可以看出, 这些非凸函数都可导且其梯度单调递减, 可以用来实现自适应的更新权重, 同时方便模型求解。

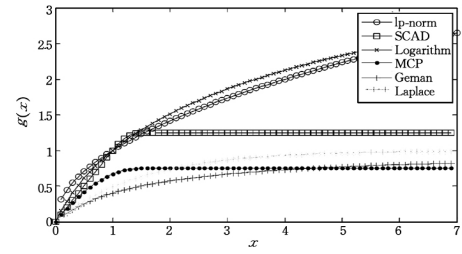


图 1 不同的函数 g 曲线 (其中 $p=0.5, \lambda=1, \gamma=1.5$)

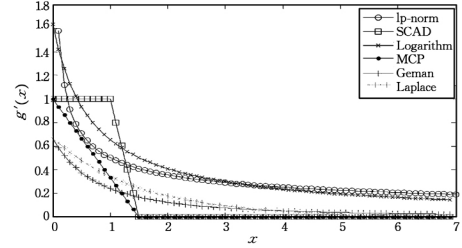


图 2 不同的函数 g 曲线 (其中 $p=0.5, \lambda=1, \gamma=1.5$)

3.2 非凸核范数最小化去噪模型

用函数 $g(\sigma_i(X_j))$ 代替式(1)中的 $w_i \sigma_i(X_j)$ 可以得到更加一般的模型:

$$\min_{X_j} \sum_{i=1}^m \lambda g(\sigma_i(X_j)) + \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y_j - X_j\|_F^2 \quad (5)$$

为了分析该模型的解, 首先介绍引理 1。

引理 1 (von Neumann 迹不等式)^[14] 对于任意 $A, B \in$

$R^{m \times n} (m \leq n)$, $\text{Tr}(A^T B) \leq \sum_{i=1}^m \sigma_i(A) \sigma_i(B)$, 其中 $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq 0$ 且 $\sigma_1(B) \geq \sigma_2(B) \geq \dots \geq 0$ 是矩阵 A 和 B 的奇异值。这个等式当且仅当存在酉矩阵 U 和 V 使得 $A = U \text{Diag}(\sigma(A)) V^T$, $B = U \text{Diag}(\sigma(B)) V^T$ 同时是 A 和 B 的奇异值分解。

根据引理 1 可得:

$$\begin{aligned} \|X - B\|_F^2 &= \text{Tr}(X^T X) - 2\text{Tr}(X^T B) + \text{Tr}(B^T B) \\ &= \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(X) - 2\text{Tr}(X^T B) + \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(B) \\ &\geq \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(X) - 2 \sum_{i=1}^m \sigma_i(X) \sigma_i(B) + \sum_{i=1}^m \sigma_i^2(B) \\ &= \sum_{i=1}^m (\sigma_i(X) - \sigma_i(B))^2 \end{aligned} \quad (6)$$

为了方便分析, 定义 $f_{g, Y_j}(X_j)$ 为:

$$\begin{aligned} f_{g, Y_j}(X_j) &= \sum_{i=1}^m \lambda g(\sigma_i(X_j)) + \frac{1}{\sigma_n^2} \|Y_j - X_j\|_F^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^m \lambda g(\sigma_i(X_j)) + \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^m (\sigma_i(X_j) - \sigma_i(Y_j))^2 \end{aligned} \quad (7)$$

式(5)所示的去噪模型可以通过最小化其目标函数的下界来进行逼近, 即转化成如下优化模型:

$$\hat{X}_j = \arg \min_{X_j} \sum_{i=1}^m \lambda g(\sigma_i(X_j)) + \frac{1}{\sigma_n^2} (\sigma_i(X_j) - \sigma_i(Y_j))^2 \quad (8)$$

从式(8)可以看出, 对于 $i=1, \dots, m$, $\sigma_i(X_j)$ 之间是相互独立的, 因此可以对每个 $\sigma_i(X_j)$ 分别求最优解。即:

$$\hat{\sigma}_i(X_j) = \arg \min_{\sigma_i(X_j)} \lambda g(\sigma_i(X_j)) + \frac{1}{\sigma_n^2} (\sigma_i(X_j) - \sigma_i(Y_j))^2 \quad (9)$$

具体过程详见算法 2。

算法 2

输入: Y_j

输出: 最优解 $\hat{X}_j = U \text{Diag}(\hat{\sigma}_i) V^T$

对 Y_j 进行奇异值分解, 即 $Y_j = U \text{Diag}(\sigma_i(Y_j)) V^T$

For $i = 1 : m$

$k = 1$;

$x_k = \sigma_i(Y_j)$

if $g(\sigma_i(Y_j)) = 0, \hat{x}_i = x_k$

else

当不满足收敛条件

$x_{k+1} = x_k - \lambda \sigma_n^2 g(x_k)$

if $x_{k+1} < 0$ then $\hat{x}_i = x_k$ break;

$\hat{x}_i = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(0) \leq f(\hat{x}_i) \\ \hat{x}_i, & \text{当 } f(\hat{x}_i) < f(0) \end{cases}$

结合算法 2, 可以得到新的图像去噪模型的新算法, 如算法 3 所示。

算法 3

1. 对于噪声图像 y , 初始化 $\hat{x}^{(0)} = y, y^{(0)} = y$, 给定常量 $L, 0 < \delta < 1$;

2. $k = 1 : L$, 执行

3. $y^{(k)} = \hat{x}^{(k-1)} + \delta(y - \hat{x}^{(k-1)})$

4. 对 $y^{(k)}$ 每一小块 y_j 作为输入调用算法 2, 输出 $\hat{x}$

5. 聚集 $\hat{x}_j$ 组成去噪图像 $\hat{x}^{(k)}$, 跳转至步骤 2

3.3 收敛性分析

为了便于分析上述算法的收敛性, 将式(9)描述成更简单的形式:

$$\hat{x}_b = \arg \min_{x \geq 0} g(x) + \frac{1}{2}(x - b)^2 \quad (10)$$

要证明收敛性, 只需证明采用固定点迭代的算法能找到

$\hat{x}_b$ 。

证明: 假定存在 $\hat{x}_b = \max\{x \mid f_b(x) = g(x) + x - b = 0, 0 \leq x \leq b\}$, 否则 0 是式(10)的解。

首先, 如果 $g(b) = 0$, 那么有 $\hat{x}_b = b$ 。

对于 $\hat{x}_b < b$, 证明从 $x_0 = b$ 开始用固定点迭代算法收敛于 $\hat{x}_b$ 。实际上, 有: 对任意 $x > \hat{x}_b$, 都有 $b - g(x) < x$ 。

这点可以通过反证法来证明。假定存在 $\tilde{x} > \hat{x}_b$, 那么 $b - g(\tilde{x}) > \tilde{x}$ 。注意 $g(x)$ 满足条件 1, 所以 $g(x)$ 是连续下降和非负的, 则有 $b - g(b) < b$ 。因此必定存在 $\hat{x} \in (\min(b, \tilde{x}), \max(b, \tilde{x})) > \hat{x}_b$ 使得 $b - g(\hat{x}) = \hat{x}$ 。这与 $\hat{x}_b$ 的定义矛盾。所以当 $x_k > \hat{x}_b, x_{k+1} = b - g(x_k) < x_k$ 。另外, 序列 $\{x_k\}$ 的下界是 $\hat{x}_b$, 所以必定存在 $\{x_k\}$ 的极限, 该极限定义为 $\bar{x}$, 其不小于 $\hat{x}_b$ 。

在 $x_{k+1} = b - g(x_k)$ 等式两边令 $k \rightarrow +\infty$ 得 $\bar{x} = b - g(\bar{x})$ 。所以, $\bar{x} = \hat{x}_b$, 即 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \hat{x}_b$ 得证。

4 仿真实验

为了验证上述所提算法的有效性, 本文将算法应用到实际的例子中, 并将所提算法与其他经典算法(包括 BM3D^[15], LSSC^[16], WNNM^[13], NNM)进行比较。本实验的计算机为

普通 PC 机, 计算机的配置为 CPU i7-4770k, 内存为 12GB。为了使本文的仿真实验更加逼近真实情况, 文中添加的噪声为不同噪声类型的叠加。本文测试的图像来自 Berkeley 数据集, 对于大的噪声水平, 通常选择尺寸大的图像块。根据经验选择的图像块尺寸为 $7 \times 7, 8 \times 8, 9 \times 9$ 和 10×10 , 分别对应于 $\sigma \leq 20, 20 \leq \sigma \leq 40, 40 \leq \sigma \leq 60$ 和 $\sigma \geq 60$ 。所提算法采用的 g 函数为 SCAD 函数。

限于篇幅, 本文仅对于 Peppers 和 Monarch 这两张图片给出了部分算法在不同的噪声下的去噪效果, 如图 3 和图 4 所示。表 1~表 3 分别列出了在噪声水平为 30, 50, 100 的情况下 PSNR 性能的比较。从实验结果可以看出, 所提算法相对于 BM3D 性能平均提高了 0.53dB, 相对于 LSSC 算法提高了 0.26dB, 相对于 WNNM 算法平均提高了 0.12dB, 即所提算法相对于 BM3D 算法和 LSSC 算法均有显著的提高, 同时相对于 WNNM 算法也有明显的提升。这些提升也验证了所提算法的先进性。

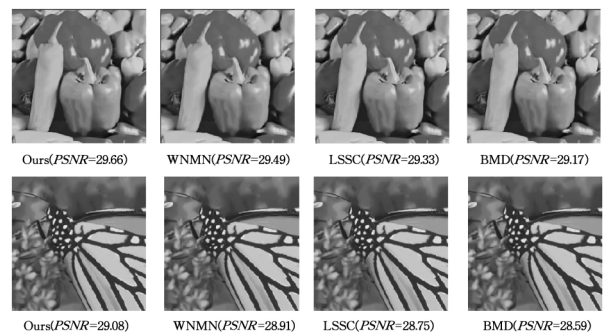


图 3 噪声水平为 30 时不同算法的去噪效果比较

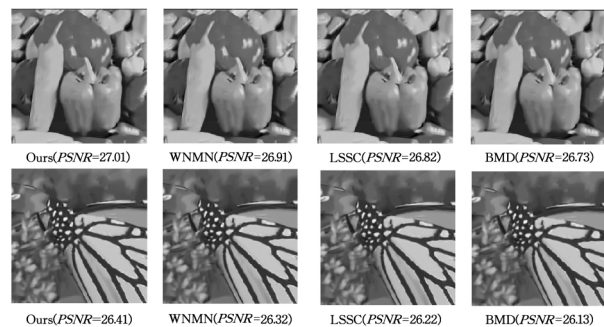


图 4 噪声水平为 50 时不同算法的去噪效果

表 2 不同算法的 PSNR(噪声水平为 30)比较/db

图像名	$\sigma = 30$				
	NNM	BM3D	LSSC	WNNM	Ours
C. man	27.43	28.48	28.63	28.78	28.94
house	30.99	32.03	32.41	32.45	32.51
Parrot	27.26	28.04	27.91	28.33	28.39
Peppers	28.11	29.19	29.33	29.49	29.66
Monarch	27.44	28.59	28.75	28.91	29.08
Leaves	26.81	27.81	27.65	28.60	28.76
StarFish	26.62	27.65	27.70	28.08	28.14
Montage	29.28	31.38	31.10	31.65	31.78
Airplane	26.53	27.56	27.53	27.83	27.92
Paint	27.02	28.29	28.29	28.58	28.67
J. Bean	31.03	31.97	32.39	32.46	32.54
Fence	28.19	28.19	28.16	28.56	28.68
Lena	30.15	31.26	31.18	31.43	31.51
Barbara	28.59	29.81	29.60	30.31	30.42
Boat	28.82	29.12	29.06	29.24	29.34

表 3 不同算法的 PSNR(噪声水平为 50)/db

图像名	$\sigma=50$				
	NNM	BM3D	LSSC	WNNM	Ours
C. man	24.88	26.25	26.33	26.41	26.50
house	27.84	29.69	30.01	30.31	30.21
Parrot	24.87	25.61	25.81	26.07	26.22
Peppers	25.29	26.73	26.82	26.91	27.01
Monarch	24.46	26.13	26.22	26.32	26.41
Leaves	23.36	24.68	24.81	25.47	25.59
StarFish	23.83	25.04	25.12	25.44	25.52
Montage	26.04	27.90	28.10	28.27	28.34
Airplane	23.97	25.10	25.25	25.43	25.50
Paint	24.19	25.67	25.59	25.98	26.11
J. Bean	27.96	29.26	29.42	29.62	29.73
Fence	24.59	25.92	25.87	26.43	26.54
Lena	27.74	29.05	28.95	29.24	29.29
Barbara	25.75	27.23	27.03	27.79	28.81
Boat	25.39	26.78	26.77	26.97	27.04

表 4 不同算法的 PSNR(噪声水平为 100)/db

图像名	$\sigma=100$				
	NNM	BM3D	LSSC	WNNM	Ours
C. man	21.49	23.07	23.15	23.35	23.56
house	23.65	25.51	25.71	26.79	26.82
Parrot	21.38	22.61	22.74	23.19	23.26
Peppers	21.24	23.31	23.02	23.44	23.76
Monarch	20.22	22.59	22.79	22.81	22.96
Leaves	18.73	20.91	20.58	21.57	21.71
StarFish	20.58	22.10	21.77	22.10	22.32
Montage	21.70	23.89	23.77	24.16	24.24
Airplane	20.73	22.11	21.69	22.55	22.61
Paint	21.02	22.51	22.14	22.74	22.81
J. Bean	23.79	25.80	25.64	26.04	26.13
Fence	21.23	22.92	22.71	23.37	23.51
Lena	24.41	25.95	25.96	26.20	26.41
Barbara	22.14	23.62	23.54	24.37	24.48
Boat	22.48	23.97	23.87	24.10	24.22

此外,所提算法在大噪声的情况下相对与其他算法优势更明显,在噪声水平为 100 时,所提算法相对于 BM3D 算法性能平均提高了 0.92dB,相对于 LSSC 算法提高了 0.61dB,相对于 WNNM 算法平均提高了 0.16dB。随着噪声水平的增加,所提方法的去噪优势更加明显。

结束语 本文提出了一种一般性的非凸核范数最小化框架,在该框架下可以通过设计满足条件 1 的非凸函数来实现矩阵奇异值权重的调节,并证明了在框架下使用固定点迭代算法求解的收敛性。该框架有助于后面的研究者设计出更有效的低秩近似模型。此外,本文还将算法应用到图像去噪中,实验结果表明相对其他先进的算法,所提方法更具优势。

(上接第 235 页)

- [9] OSWALD A, SMITH W A P. Inverse Rendering of Faces with a 3D Morphable Model[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2013, 35(5): 1080-1093.
- [10] 吕杰. 基于多张照片的三维人脸建模[D]. 北京: 北京理工大学, 2015.
- [11] 周凯汀, 郑力新. 基于改进 ORB 特征的多姿态人脸识别[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2015, 42(2): 287-295.
- [12] CHU B, ROMDHANI S, CHEN L. 3D-Aided Face Recognition Robust to Expression and Pose Variations[C] // 2014 IEEE

参考文献

- [1] DE LA TORRE F, BLACK M J. A framework for robust subspace learning[J]. IJCV, 2003, 54(1-3): 117-142.
- [2] LIU G, LIN Z, YAN S, et al. Robust subspace segmentation by low-rank representation[C] // International Conference on Machine Learning, 2010: 663-670.
- [3] ZHENG Y, LIU G, SUGIMOTOS, et al. Practical low-rank matrix approximation under robust l1 norm[C] // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2012: 1410.
- [4] SALAKHUTDINOV R, SREBRO N. Collaborative filtering in a non-uniform world: Learning with the weighted trace norm[C] // NIPS, 2010: 2056-2064.
- [5] MU Y, DONG J, YUAN X, et al. Accelerated low-rank visual recovery by random projection[C] // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society, 2011: 2609-2616.
- [6] WRIGHT J, PENG Y, MA Y, et al. Robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank matrices via convex optimization[C] // NIPS, 2009.
- [7] WANG S, ZHANG L, LIANG Y. Nonlocal spectral prior model for low-level vision[C] // ACCV, 2012.
- [8] LIU R, LIN Z, DE LA TORRE F, et al. Fixed-rank representation for unsupervised visual learning[C] // CVPR, 2012.
- [9] DONG W, SHI G, LI X. Nonlocal image restoration with bilateral variance estimation: a low-rank approach[J]. IEEE Transactions on Image Processing A Publication of the IEEE Signal Processing Society, 2013, 22(2): 700-711.
- [10] DONOHO D L, GAVISH M, MONTANARI A. The phase transition of matrix recovery from gaussian measurements matches the minimax mse of matrix denoising[C] // PNAS, 2013.
- [11] LU C, TANG J, YAN S Y, et al. Generalized nonconvex nonsmooth low-rank minimization[C] // CVPR, 2014.
- [12] GONG P, ZHANG C, LU Z, et al. A general iterative shrinkage and thresholding algorithm for non-convex regularized optimization problems[C] // ICML, 2013.
- [13] GU S, ZHANG L, ZUO W, et al. Weighted Nuclear Norm Minimization with Application to Image Denoising [C] // CVPR, 2014.
- [14] RHEA D. The case of equality in the von Neumann trace inequality[M]. Preprint, 2011.
- [15] DABOV K, FOI A, KATKOVNIK V, et al. Image denoising by sparse 3-D transform domain collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(8): 2080-2095.
- [16] MAIRAL J, BACH F, PONCE J, et al. Nonlocal sparse models for image restoration[C] // ICCV, 2009: 2272-2279.
- [17] Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), IEEE Computer Society, 2014: 1907-1914.
- [13] 霍芋霖, 符意德. 基于 Zynq 的人脸检测设计[J]. 计算机科学, 2016, 43(10): 322-324.
- [14] CHU B, ROMDHANI S, CHEN L. 3D-Aided Face Recognition Robust to Expression and Pose Variations [C] // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2014: 1907-1914.
- [15] 王向前, 张月芬. 四维时空兴趣点提取结合多流形判别分析的人体动作识别[J]. 湘潭大学自然科学报, 2016, 38(1): 111-114.