

基于插值小波塔式分解算法的图像边缘检测

张治国 郑 茜 兰京川
(电子科技大学 成都 611730)

摘 要 在应用经典小波检测图像边缘时,通常利用离散积分替代连续积分获取小波系数。由于离散积分仅仅是连续积分的近似表达,因此这种方法在获取图像边缘时很难避免数值计算误差,这使得在检测图像细节部分时容易出现定位不准和边缘不清晰等问题。为了避免上述问题,利用插值小波采样理论中像素值即为插值小波系数的特殊性质,将插值共轭滤波器与 Mallat 塔式分解算法相结合,给出一种新的图像边缘检测算法。将该算法与经典小波算法进行对比实验,结果表明,该方法能够检测出经典小波算法无法检测到的边缘细节,且最终得到的图像边缘清晰完整,从而验证了该算法的有效性。

关键词 插值小波,插值共轭滤波器,塔式分解,图像边缘检测

中图分类号 TP391 文献标识码 A

Image Edge Detection Based on Pyramidal Algorithm of Interpolation Wavelet

ZHANG Zhi-guo ZHENG Xi LAN Jing-chuan

(University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611730, China)

Abstract When classic wavelet theory is applied to detect edge of images, discrete integral formula is often used to replace continuous integral to obtain wavelet coefficients. Since discrete integral is approximate expression of continuous integral, great numerical errors often cannot be avoided in calculations. This has lead to the fact that some details of images cannot be described clearly in edge detection. To solve this problem, by applying Mallat pyramidal algorithm to interpolation conjugate filter, a new algorithm was proposed for edge detection based on the fact that image pixel values can be considered as coefficients of interpolation wavelets. In the experiment, our algorithm is compared with the classic one. It is shown that the new algorithm can obtain clearer and more intact edges. This implies that our algorithm is more effective and accurate than the classic one.

Keywords Interpolation wavelet, Interpolation conjugate filter, Mallat pyramidal, Image edge detection

1 引言

边缘通常是指灰度有阶跃或屋顶变化的像素点集合,是图像处理中重要的研究对象。微分算子由于对高频信号极其敏感,可以有效反映出像素的跃变,因此被广泛应用于传统的边缘检测算法。但是,当图像含有大量噪声时,这些算法很难对含有大量高频成分的边缘和噪声都进行准确的区分。

为了解决上述问题, Mallat^[1-2]提出了基于小波系数模极大值的边缘检测方法。由于小波变换具有良好的时频分析能力,能够检测出图像局部区域的高频突变,因此将小波变换应用于边缘检测^[3-5]不但可以获得较高的检测精度,而且可以有效抑制噪声的影响,这使得小波变换成为图像边缘检测的有力工具而迅速得到广泛应用,并且出现了许多在小波变换基础上的改进算法。例如,文献^[6]提出了基于全向小波的图像

边缘检测方法,文献^[7]采用基于三次 B 样条小波变换自适应阈值多尺度边缘检测算法,文献^[8]将小波变换与数学形态学结合起来实现边缘检测,文献^[9]提出了 Canny 准则结合小波变换的算法。

虽然上述算法取得了许多重要成果,但是这些基于求取小波系数模极大值的方法都存在一些缺陷,不仅计算量较大,而且对阈值和梯度矢量方向的选取敏感,因而实现起来较为复杂。由于在小波采样理论中,采样值本身可以看作小波系数^[10-11],因此应用插值小波能够有效地提高小波变换的效率,从而提高边缘检测效率。文献^[11]提出的构造插值滤波器(插值小波对应的滤波器组)的方法则为将插值小波理论应用于图像处理提供了有力条件。本文基于上述思想,结合文献^[11]中关于插值小波稀疏表达的推论,提出将插值滤波器和 Mallat 塔式分解算法相结合的方法,由此可以快速获取小波系数,进而实现图像边缘的有效检测。

本文受国家自然科学基金项目(60904072, 71301018),教育部留学回国人员科研启动基金(M16010701LXH5008),中央高校基本科研业务费专项资金(ZYGX2015J078)资助。

张治国(1977—),男,博士,高级工程师,主要研究方向为计算机视觉与模式识别, E-mail: zhiguo Zhang@uestc.edu.cn; 郑茜(1994—),女,硕士生,主要研究方向为计算机视觉与模式识别; 兰京川(1977—),男,博士,副教授,主要研究方向为电子系统综合测试诊断与预测。

2 插值小波与分解算法

2.1 经典小波算法的不足

设 $\phi(x)$ 为尺度函数, $\psi(x)$ 为其对应的小波函数, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 上的多分辨率分析, W_j 为小波空间, 且满足条件 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 其中 $\oplus$ 表示正交直和, 则对任意函数 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ 都有级数:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_k^j \psi(2^j x - k) \quad (1)$$

其中, $\{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为小波系数, 且

$$c_k^j = \langle f(x), \psi(2^j x - k) \rangle = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^*(2^j x - k) dx \quad (2)$$

另一方面, 因为多维小波可以由单维小波通过张量积生成, 即二维小波 $\psi(x, y) = \psi_1(x) \psi_2(y)$, 所以式(1)和式(2)在二维的情况下分别可表示为:

$$f(x) = \sum_{k, m \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_{k, m}^j \psi(2^j x - k) \psi(2^j y - m) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} c_{k, m}^j &= \langle f(x, y), \psi(2^j x - k, 2^j y - m) \rangle \\ &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi^*(2^j x - k, 2^j y - m) dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

由边缘检测理论可知, 图像边缘检测的关键在于获得小波系数。然而在经典小波理论中, 小波系数的求取依赖于式(2)和式(4)所示的积分运算。由于数字图像通常表述为二维数值矩阵的形式, 因此将式(4)应用于图像处理时需要利用离散积分代替连续积分, 即式(4)可近似表示为:

$$c_{k, m}^j \approx \sum_l \sum_n f(x_l, y_n) \psi^*(2^j x_l - k, 2^j y_n - m) \Delta x \Delta y \quad (5)$$

根据黎曼积分公式, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum_l \sum_n f(x_l, y_n) \psi^*(2^j x_l - k, 2^j y_n - m) \Delta x \Delta y \\ = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi^*(2^j x - k, 2^j y - m) dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

式(6)意味着当采样数据足够稠密时, 式(5)能够较好地逼近式(4), 从而获得良好的边缘检测效果。

然而随着图像边缘检测分辨率要求的提高, 应用式(5)近似替代式(4)获取小波系数的方法已经难以满足实际应用的需要。设 Δx 和 Δy 分别表示图像采集设备水平和竖直方向的像素物理间隔, 那么在分辨率为 2^j 的情况下, 应用式(5)获取的小波系数可表述为:

$$\begin{aligned} c_{k, m}^j &\approx \sum_{k_1} \sum_{k_2} f(k_1 \Delta x, k_2 \Delta y) \times \psi^*(2^j k_1 \Delta x - k, \\ &2^j k_2 \Delta y - m) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (7)$$

然而当尺度增加为 2^{j+1} 时, 则应用式(5)得到的相应小波系数:

$$\begin{aligned} c_{k, m}^{j+1} &\approx \sum_{k_1} \sum_{k_2} f(k_1 \Delta x, k_2 \Delta y) \times \psi^*(2^{j+1} k_1 \Delta x - k, \\ &2^{j+1} k_2 \Delta y - m) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (8)$$

令 $\Delta x' = 2\Delta x, \Delta y' = 2\Delta y$, 则式(8)可表示为:

$$\begin{aligned} c_{k, m}^{j+1} &\approx \frac{1}{4} \sum_{k_1} \sum_{k_2} f\left(\frac{1}{2} k_1 \Delta x', \frac{1}{2} k_2 \Delta y'\right) \times \psi^*(2^j k_1 \Delta x' - k, \\ &2^j k_2 \Delta y' - m) \Delta x' \Delta y' \end{aligned} \quad (9)$$

另一方面, 由式(4)可知基于连续积分的 $c_{k, m}^{j+1}$ 表达式:

$$c_{k, m}^{j+1} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x, y) \psi^*(2^{j+1} x - k, 2^{j+1} y - m) dx dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{1}{2} x, \frac{1}{2} y\right) \psi^*(2^j x - k, 2^j y - m) dx dy \quad (10)$$

因此式(9)是式(10)在 $\Delta x' = 2\Delta x, \Delta y' = 2\Delta y$ 条件下的离散积分近似。比较式(9)与式(7), 可以发现当提高图像处理的分辨率 2^j , 即使图像采集设备的物理像素间隔 Δx 和 Δy 不变, 应用式(5)获取小波系数时, 其在数学意义上的像素间隔 $\Delta x'$ 和 $\Delta y'$ 也会不断增加。因此当人们提高图像边缘检测的分辨率时, 应用离散积分代替连续积分时会产生较大误差, 导致不能得到准确的小波系数, 进而影响最后的检测效果。反之, 若要获得更精确的小波系数, 则会牺牲图像分辨率。由此可知, 经典小波算法中存在图像分辨率与小波系数求解精度之间的矛盾。

基于插值小波特性来进行 Mallat 塔式分解的优势在于, 其可以避免应用传统积分的方式来求取小波系数, 克服上述经典小波算法中的矛盾, 在保证图像分辨率的同时获得精准的小波系数, 进而得到良好的边缘检测效果。

2.2 插值小波的相关性质

根据文献[11]中的相关理论, 若 $S^{\phi}(x)$ 为插值尺度函数, $S^{\psi}(x)$ 为插值小波函数, 则满足对任意 $f_s(x) \in V_j, r_s(x) \in W_j, j \in \mathbb{Z}$, 总有唯一的级数表达:

$$f_s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_s(k/2^j) S^{\phi}(2^j x - k) \quad (11)$$

及

$$r_s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_s(k/2^j + 1/2^{j+1}) S^{\psi}(2^j x - k) \quad (12)$$

与经典小波级数相比, 式(11)和式(12)表明 $S^{\phi}(x)$ 和 $S^{\psi}(x)$ 事实上分别是以 $\{f_s(k/2^j)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{r_s(k/2^j + 1/2^{j+1})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (即位于 $x=k/2^j$ 和 $x=(2k+1)/2^j$ 的 $f_s(x)$ 和 $r_s(x)$ 采样值)作为尺度函数系数和小波系数的特殊尺度函数和小波函数。

式(11)和式(12)提示我们可以利用像素值为插值小波系数的特殊性质, 对图像进行 Mallat 塔式分解。这意味着如果知道插值小波对应的低、高通滤波器:

$$\begin{cases} P_s(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k^s e^{-i w k/2} \\ Q_s(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k^s e^{-i w k/2} \end{cases} \quad (13)$$

及其相应的对偶滤波器:

$$\begin{cases} G_s(w) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n^s e^{-i w n/2} \\ H_s(w) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n^s e^{-i w n/2} \end{cases} \quad (14)$$

那么即使不依靠式(3)和式(6)的离散积分, 也可以获得分解后的小波系数。这里 $\{q_k^s\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{p_k^s\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{g_n^s\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{h_n^s\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2$, 且 $P_s(w)$ 和 $Q_s(w)$ 满足条件:

$$\begin{cases} \hat{S}^{\phi}(w) = P_s(w) \hat{S}^{\phi}(w/2) \\ \hat{S}^{\psi}(w) = Q_s(w) \hat{S}^{\psi}(w/2) \end{cases} \quad (15)$$

其中, $\hat{S}^{\phi}(w)$ 和 $\hat{S}^{\psi}(w)$ 分别为 $S^{\phi}(x)$ 和 $S^{\psi}(x)$ 的傅里叶变换。

由式(15)可知, 低通插值滤波器可表示为:

$$P_s(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{S}^{\phi}(w + 4k\pi) \quad (16)$$

因此低通插值滤波器的频域表达是插值尺度函数傅里叶

变换以 4π 为周期的延拓。由文献[10]可知,插值小波尺度函数 $S^\wedge(w)$ 可由小波尺度函数 $\phi^\wedge(w)$ 通过式(17)来获得。

$$S^\wedge(w) = \frac{\phi^\wedge(w)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi^\wedge(w+2k\pi)} \quad (17)$$

另一方面,文献[11]提出了一种基于低通插值滤波器 $P_s(w)$ 来构建高通插值滤波器 $Q_s(w)$ 的通用算法,即

$$Q_s(w) = \frac{e^{-i w/2} E_s(w+2\pi) P_s(w+2\pi)}{P_s(w+2\pi) E_s(w+2\pi) + P_s(w) E_s(w)} \quad (18)$$

其中, $E_s(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S^\wedge(w/2+2k\pi)|^2$ 。因此只要已知小波尺度函数 $\phi^\wedge(w)$, 就可以由式(16)一式(18)来获得其对应的插值滤波器组 $(P_s(w), Q_s(w))$ 。与此同时,由经典小波理论可得:

$$\begin{cases} G_s(w) = \frac{Q_s(-w)}{Q_s(-w)P_s(w) - Q_s(w)P_s(-w)} \\ H_s(w) = \frac{P_s(-w)}{Q_s(w)P_s(-w) - P_s(w)Q_s(-w)} \end{cases} \quad (19)$$

求得 $(P_s(w), Q_s(w))$ 后,再利用式(19)即可得到插值小波对偶滤波器组 $(G_s(w), H_s(w))$ 。这为应用 Mallat 塔式分解算法基于像素值来直接获取图像边缘提供了基础条件。

2.3 在插值小波条件下的 Mallat 塔式分解算法

假设 $f_j(x) \in V_j$, 由 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ 可知,存在 $f_j(x)$ 在 V_{j-1} 空间和 W_{j-1} 空间上的正交投影 $f_{j-1}(x)$ 与 $r_{j-1}(x)$, 使得 $f_j(x) = f_{j-1}(x) + r_{j-1}(x)$, 且满足条件

$$\begin{cases} f_{j-1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x-k) \\ r_{j-1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x-k) \end{cases} \quad (20)$$

其中, $\{c_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{d_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 分别表示 $f_{j-1}(x)$ 和 $r_{j-1}(x)$ 在 V_{j-1} 和 W_{j-1} 空间对应的尺度函数 $\{\phi(2^{j-1}x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和小波 $\{\psi(2^{j-1}x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 的系数。由式(20)可得:

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^j \phi(2^j x - k) = f_{j-1}(x) + r_{j-1}(x) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{j-1} \phi(2^{j-1} x - k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k) \end{aligned} \quad (21)$$

另一方面,令

$$P(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k e^{-i w k/2} \quad (22)$$

$$Q(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{-i w k/2} \quad (23)$$

分别为 $\phi(x)$ 与 $\psi(x)$ 对应的二尺度低通及高通滤波器,即满足条件

$$\begin{cases} \hat{\phi}(w) = P(w) \hat{\phi}(w/2) \\ \hat{\psi}(w) = Q(w) \hat{\phi}(w/2) \end{cases} \quad (24)$$

其相应的对偶低、高通滤波器分别表示为:

$$G(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{-i w k/2} \quad (25)$$

$$H(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-i w k/2} \quad (26)$$

其中, $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2$ 。那么由经典小波理论可知,只要已知 V_j 空间中的小波系数 $\{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 即可通过 Mallat 塔式分解算法求得 V_{j-1} 空间和 W_{j-1} 空间中的小

波系数 $\{c_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 与 $\{d_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 即

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_l g_{l-2k} c_l^j \\ d_k^{j-1} = \sum_l h_{l-2k} c_l^j \end{cases} \quad (27)$$

对于插值小波和插值尺度函数来说, $\{S^\wedge(2^{j-1}x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 与 $\{S^\psi(2^{j-1}x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 分别为 V_{j-1} 空间和 W_{j-1} 空间中的 Riesz 基,根据式(11)和式(12),式(21)和式(21)的分解关系又可以表述为:

$$\begin{cases} f_{j-1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j-1}(k/2^{j-1}) S^\wedge(2^{j-1}x-k) \\ r_{j-1}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{j-1}(k/2^{j-1}+1/2^j) S^\psi(2^{j-1}x-k) \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_j(k/2^j) S^\wedge(2^j x - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{j-1}(k/2^{j-1}) S^\wedge(2^{j-1} x - k) + \\ &\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_{j-1}(k/2^{j-1}+1/2^j) S^\psi(2^{j-1} x - k) \end{aligned} \quad (29)$$

因此式(28)中的 $\{f_{j-1}(k/2^{j-1})\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{r_{j-1}(k/2^{j-1}+1/2^j)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 等价于式(20)中的 $\{c_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{d_k^{j-1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 。由上述分析可知,在插值小波条件下,式(27)的 Mallat 塔式分解算法可以表述为:

$$\begin{cases} f_{j-1}(k/2^{j-1}) = \sum_l g_{l-2k}^s f_j(l/2^j) \\ r_{j-1}(k/2^{j-1}+1/2^j) = \sum_l h_{l-2k}^s f_j(l/2^j) \end{cases} \quad (30)$$

其中, $\{g_n^s\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{h_n^s\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 分别为式(14)中定义的低、高通插值对偶滤波器序列。令 $f_j^s = \{f_j(k/2^j)\}_{k \in \mathbb{Z}}, r_{j-1}^s = \{r_{j-1}(k/2^{j-1}+1/2^j)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 则 f_j^s 和 r_{j-1}^s 可分别看成采样值 f_j^s 的低频信号和细节信号。对低频信号递归应用小波分解算法,则可得到在不同分辨率下的细节信号。插值小波条件下的一级分解流程图如图 1 所示。

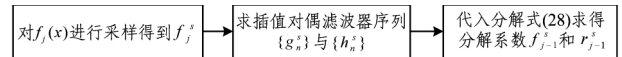


图 1 一维插值小波分解算法流程图

上述分析表明,与经典小波分解算法相比,利用插值对偶滤波器可以通过采样值 f_j^s 直接获得小波系数,避免了函数与小波作内积,从而简化了小波系数的计算过程,提高了小波系数的精度。

3 基于二维插值小波的边缘检测算法

3.1 二维 Mallat 塔式分解算法

为了应用插值小波进行图像处理,这里先讨论二维的 Mallat 塔式分解算法。

设 $\{V_j^2\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 构成尺度函数 $\varphi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$ 生成的多分辨分析,则

$$\{\varphi_{j,k,m}(x, y) = 2^j \varphi(2^j x - k, 2^j y - m)\}_{k,m \in \mathbb{Z}} \quad (31)$$

构成 V_j^2 的一组 Riesz 基,且有 $V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2$, 其中

$$W_{j-1}^2 = (V_{j-1} \otimes W_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes V_{j-1}) \oplus (W_{j-1} \otimes W_{j-1}) \quad (32)$$

令

$$\begin{cases} \phi^1(x, y) = \phi(x)\phi(y) \\ \phi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y) \\ \phi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y) \end{cases} \quad (33)$$

则 $\{\psi_{j,k,m}^1(x,y), \psi_{j,k,m}^2(x,y), \psi_{j,k,m}^3(x,y)\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ 构成 W_j^2 的一组 Riesz 基。

设 $f_j(x,y) \in V_j^2$, 由 $V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2$ 知, 存在 $f_j(x,y)$ 在 V_{j-1}^2 空间和 W_{j-1}^2 空间上的正交投影 $f_{j-1}(x,y), r_{j-1}(x,y)$ 和序列 $\{c_{k,m}^j\}_{k,m \in \mathbb{Z}}, \{d_{k,m}^{j-1,1}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}, \{d_{k,m}^{j-1,2}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}, \{d_{k,m}^{j-1,3}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$, 使得

$$\begin{aligned} f_j(x,y) &= \sum_{k,m} c_{k,m}^j \varphi_{j,k,m} = f_{j-1}(x,y) + r_{j-1}(x,y) \\ &= \sum_{k,m} c_{k,m}^{j-1} \varphi_{j-1,k,m} + \sum_{k,m} d_{k,m}^{j-1,1} \psi_{j-1,k,m}^1 + \\ &\quad \sum_{k,m} d_{k,m}^{j-1,2} \psi_{j-1,k,m}^2 + \sum_{k,m} d_{k,m}^{j-1,3} \psi_{j-1,k,m}^3 \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{j-1}(x,y) &= \sum_{k,m} d_{k,m}^{j-1,1} \psi_{j-1,k,m}^1 + \sum_{k,m} d_{k,m}^{j-1,2} \psi_{j-1,k,m}^2 + \\ &\quad \sum_{k,m} d_{k,m}^{j-1,3} \psi_{j-1,k,m}^3 \end{aligned} \quad (35)$$

令 $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 与 $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为式(25)与式(26)定义的滤波器序列, 则有二维 Mallat 塔式分解算法:

$$\begin{cases} c_{k,m}^{j-1} = \sum_l \sum_n g_{l-2k} g_{n-2m} c_{l,n}^j \\ d_{k,m}^{j-1,1} = \sum_l \sum_n g_{l-2k} h_{n-2m} c_{l,n}^j \\ d_{k,m}^{j-1,2} = \sum_l \sum_n h_{l-2k} g_{n-2m} c_{l,n}^j \\ d_{k,m}^{j-1,3} = \sum_l \sum_n h_{l-2k} h_{n-2m} c_{l,n}^j \end{cases} \quad (36)$$

若 $\{c_{l,n}^j\}$ 表示图像对应的小波系数, 则式(36)将该图像分解为 4 个子集 $\{c_{l,n}^{j-1}\}, \{d_{k,m}^{j-1,1}\}, \{d_{k,m}^{j-1,2}\}, \{d_{k,m}^{j-1,3}\}$, 其中每个子集的大小是 $\{c_{l,n}^j\}$ 的 1/4。由于 $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为低通滤波器, $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 为高通滤波器, 则由式(36)及小波理论可知, $\{d_{k,m}^{j-1,1}\}$ 主要包含该图像行方向低频和列方向高频的成分, 因此对应其垂直方向细节。依此类推, $\{d_{k,m}^{j-1,2}\}$ 对应该图像水平方向细节, $\{d_{k,m}^{j-1,3}\}$ 对应该图像对角线方向细节。上述分析说明, 只要获得图像对应的小波系数 $\{c_{l,n}^j\}$ 和滤波器序列, 就可以通过二维 Mallat 塔式分解算法来实现对该图像的边缘检测。

3.2 插值小波边缘检测算法

3.2.1 二维插值小波分解

令图像描述对象为 $f_j(x,y)$, 显然 $f_j(x,y)$ 为能量有限的函数。因此根据多分辨率理论, 存在逼近空间 $V_j \subset \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, 使得 $f_j(x,y) \in V_j$, 这里 J 为一个固定尺度。由采样理论可知, 大小为 $N_1 \times N_2$ 的图像可表示为矩阵 $A_{map} = [a_{n,m}]_{N_1 \times N_2}$, 其中, $a_{n,m} = f(n/2^J, m/2^J) \in l^2$ 为图像在点 (n, m) 处的灰度值, (n, m) 表示像素点(采样点)在图像矩阵中的坐标。设 $S^s(x,y) = S^s(x)S^s(y)$ 为插值尺度函数, 则根据插值小波理论, 在 V_0 空间中存在以下插值小波:

$$\begin{cases} S^{\phi^1}(x,y) = S^s(x)S^s(y) \\ S^{\phi^2}(x,y) = S^s(x)S^h(y) \\ S^{\phi^3}(x,y) = S^h(x)S^s(y) \end{cases} \quad (37)$$

其与 $\{S_{j,k,m}^s(x,y)\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ 分别构成 W_j^2 空间和 V_j^2 空间的 Riesz 基。因此根据插值小波的性质可得:

$$\begin{cases} c_{k,m}^{j-1} = f_{j-1}(k/2^{J-1}, m/2^{J-1}) \\ d_{k,m}^{j-1,1} = r_{j-1}(k/2^{J-1}, m/2^{J-1} + 1/2^J) \\ d_{k,m}^{j-1,2} = r_{j-1}(k/2^{J-1} + 1/2^J, m/2^{J-1}) \\ d_{k,m}^{j-1,3} = r_{j-1}(k/2^{J-1} + 1/2^J, m/2^{J-1} + 1/2^J) \end{cases} \quad (38)$$

式(38)表明, $f_{j-1}(x,y)$ 和 $r_{j-1}(x,y)$ 分别在其行、列方

向进行采样后得到的采样值即为小波系数 $\{c_{k,m}^{j-1}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}, \{d_{k,m}^{j-1,1}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}, \{d_{k,m}^{j-1,2}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}, \{d_{k,m}^{j-1,3}\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$, 因此式(36)中的系数矩阵 $\{c_{l,n}^j\}$ 可直接用 $f_j(l/2^J, n/2^J)$ (图像 A_{map} 的像素矩阵)来表示。与经典小波相比, 利用插值小波分解算法来进行图像处理能够快速获得所需要的小波系数。

考虑到实际图像像素点的有限性, 将图像左下角的像素点的位置定义为 $(0,0)$ 点, 即图像 4 个顶点的坐标分别为 $(0,0), (N_1-1,0), (N_1-1, N_2-1), (0, N_2-1)$ 。则在插值小波和插值滤波器条件下式(36)表述为:

$$\begin{cases} f_{j-1}(k/2^{J-1}, m/2^{J-1}) = \\ \sum_{l=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} g_{l-2k}^s g_{n-2m}^s f_j(l/2^J, n/2^J) \\ r_{j-1}(k/2^{J-1}, m/2^{J-1} + 1/2^J) = \\ \sum_{l=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} g_{l-2k}^s h_{n-2m}^s f_j(l/2^J, n/2^J) \\ r_{j-1}(k/2^{J-1} + 1/2^J, m/2^{J-1}) = \\ \sum_{l=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} h_{l-2k}^s g_{n-2m}^s f_j(l/2^J, n/2^J) \\ r_{j-1}(k/2^{J-1} + 1/2^J, m/2^{J-1} + 1/2^J) = \\ \sum_{l=0}^{N_1-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} h_{l-2k}^s h_{n-2m}^s f_j(l/2^J, n/2^J) \end{cases} \quad (39)$$

由于已知图像像素矩阵, 即已知 $f_j^s = \{f_j(l/2^J, n/2^J)\}$, 根据式(39), 只需要求出插值滤波器序列 $\{g_n^s\}$ 与 $\{h_n^s\}$, 就可以对 f_j^s 进行分解得到系数 $r_{j-1,1}^s = \{r_{j-1}(k/2^{J-1}, m/2^{J-1} + 1/2^J)\}$, $r_{j-1,2}^s = \{r_{j-1}(k/2^{J-1} + 1/2^J, m/2^{J-1})\}$, $r_{j-1,3}^s = \{r_{j-1}(k/2^{J-1} + 1/2^J, m/2^{J-1} + 1/2^J)\}$ 。由于 $f_{j-1}^s, r_{j-1,1}^s, r_{j-1,2}^s, r_{j-1,3}^s$ 分别对应小波系数 $\{c_{k,m}^{j-1}\}, \{d_{k,m}^{j-1,1}\}, \{d_{k,m}^{j-1,2}\}, \{d_{k,m}^{j-1,3}\}$, 因此 f_{j-1}^s 为低频系数, 表示原图像的近似图像, $r_{j-1,1}^s$ 表示图像的垂直边缘, $r_{j-1,2}^s$ 表示图像的水平边缘, $r_{j-1,3}^s$ 表示图像的对角线边缘。

若对分解后得到的低频系数 f_{j-1}^s 递归进行二维插值小波分解, 则可以得到一系列不同分辨率的边缘图像。

3.2.2 算法流程

由上述分析可知, 本文的边缘检测算法的具体实现步骤如下:

- (1) 选取一个小波尺度函数 $\hat{\phi}(w)$, 代入式(17)得到插值小波尺度函数 $\hat{S}^s(w)$ 。通过式(16)和式(18)即可获得对应的低、高通插值滤波器 $P_s(w)$ 和 $Q_s(w)$, 再由式(19)求其对偶滤波器 $G_s(w)$ 与 $H_s(w)$, 进而得到所需的滤波器序列 g^s 与 h^s 。
- (2) 设置一个尺度 J , 将图像的像素矩阵 A_{map} 作为系数 f_j^s , 与插值滤波器序列 g^s 和 h^s 一同代入式(39)进行插值小波分解, 得到分解系数 f_{j-1}^s 和 $r_{j-1,1}^s, r_{j-1,2}^s, r_{j-1,3}^s$ 。
- (3) 判断分解系数的分辨率是否满足需求。若不满足, 则将得到的低频系数 f_{j-1}^s 继续进行二维分解。重复上述步骤, 直到获得理想分辨率的分解系数 $r_{j-M,1}^s, r_{j-M,2}^s, r_{j-M,3}^s$ 。

(4) 将 3 个分解系数代入

$$d_{j-M}^s = \sqrt{r_{j-M,1}^s{}^2 + r_{j-M,2}^s{}^2 + r_{j-M,3}^s{}^2} \quad (40)$$

即可得到一个反映图像边缘整体分布的系数矩阵 d_{j-M}^s 。将其插值恢复到原图像大小, 进行归一化后选取一个合适的阈

值 T , 则大于该阈值的系数集合即为所求边缘。

上述过程可以表示为图 2 所示的流程图。

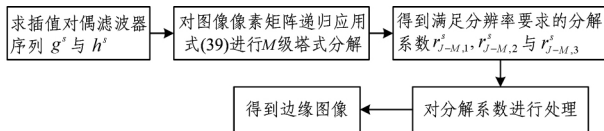


图 2 插值小波边缘检测算法流程图

综上所述, 本文算法只要求出插值滤波器序列, 即可由图像像素矩阵通过插值小波分解算法获得所求边缘。与经典小波相比, 该算法不仅较为简便, 而且可以充分保留原图像的边缘细节, 且定位准确。

4 实验结果与分析

为了验证本文算法的有效性, 选取图 3 中的 pears 图像和较复杂的 lena 图像作为原始待检测图像, 将传统 canny 算子、经典小波算法及文献[4]算法的边缘检测结果与本文算法的检测结果进行比较。实验环境是 MATLAB R2010a。



图 3 待检测图像

本实验采用六阶样条小波来实现经典小波算法, 同时利用六阶样条小波对应的插值对偶滤波器序列 g^s 与 h^s 来实现本文算法。在尺度 $J=-2$ 下的边缘检测实验结果如图 4、图 5 所示。

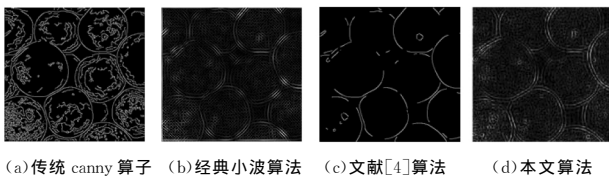


图 4 pears 图像实验结果对比

由图 4 的 pears 图像实验结果可以看出, 传统 canny 算子检测出来的边缘较为清晰完整, 但许多轮廓内部的纹理也被误当作了边缘。如图 4(a) 所示, 梨子的表面检测出了大量的伪边缘。而经典小波算法提取出的边缘图像 (见图 4(b)) 比较模糊, 有很多不连续的边缘, 且细节损失较多。文献[4]中的多尺度边缘检测算法得到的边缘 (见图 4(c)) 也存在断点, 造成了梨子轮廓边缘的不闭合。而由图 4(d) 可以看出, 本文算法得到的边缘图像轮廓连续完整, 且与 canny 算子相比没有过多的细节边缘, 检测效果均优于上述 3 种方法。

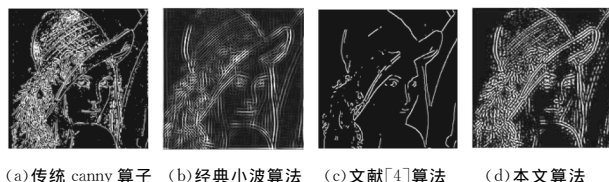


图 5 lena 图像实验结果对比

在检测较为复杂的 lena 图像时, 由图 5(a) — 图 5(d) 可

知, 传统 canny 算子在帽子、头发等部分也检测到许多由纹理引起的伪边缘。而经典小波方法和文献[4]算法均对纹理区域以及对比度较弱的边缘检测效果较差, 只能检测出大致的轮廓, 且得到的边缘点与原始图像的位置有小范围的误差。本文算法检测出的边缘图像定位准确, 而且对纹理丰富的头发和帽子上的装饰刻画得比较细致, 眼珠和鼻梁等细节部分也得以保留。

由前面的理论分析可知, 经典小波中存在图像分辨率与小波系数求解精度之间的矛盾, 导致丢失了大量的边缘细节, 获得的图像边缘分辨率也不够理想。而本文方法的小波系数是由图像与插值滤波器做离散卷积得到的, 与图像的像素矩阵有关, 因此该方法较好地克服了经典小波算法中分辨率对求取小波系数的影响, 具有更好的边缘检测效果。图 4 和图 5 的实验结果充分验证了本文算法的有效性。

结束语 本文针对经典小波边缘检测算法中利用内积求取小波系数的缺陷, 提出了一种基于插值小波塔式分解的图像边缘检测方法。与传统 canny 算子、经典小波等算法的对比实验结果表明, 本文算法改进了传统小波边缘检测中定位不准、边缘细节不够丰富等问题, 能够清楚地检测到纹理较丰富的地方和对比度较弱的边缘, 具有良好的边缘检测效果。

参 考 文 献

- [1] MALLAT S, ZHONG S. Characterization of signals from multi-scale edges[J]. IEEE Trans on Pattern and Machine Intelligence, 1992, 14(7): 710-732.
- [2] MALLAT S, HWANG W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38(2): 617-643.
- [3] KOBYLIN O, LYASHENKO V. Comparison of standard image edge detection techniques and of method based on wavelet transform[J]. International Journal of Advanced Research, 2014, 2(8): 572-580.
- [4] 邵婷婷, 白宗文, 周美丽. 基于小波变换的图像边缘检测[J]. 电子测试, 2014(19): 26-27.
- [5] CHO W, JEON J. Edge detection in wavelet transform domain [C]// 2015 21st Korea-Japan Joint Workshop on Frontiers of Computer Vision. 2015: 1-4.
- [6] 李哲涛, 李仁发, 谢井雄. 基于全向小波的图像边缘检测算法[J]. 电子学报, 2012, 40(12): 2451-2455.
- [7] 岳明明, 杨国为. 基于 B 样条小波模极大值的多尺度边缘检测算法[J]. 工业控制计算机, 2016, 29(9): 108-112.
- [8] 李智, 张根耀, 王蓓. 基于小波变换和形态学的医学图像边缘检测[J]. 信息技术, 2015(4): 84-86.
- [9] 孙康泰, 羿旭明, 方壮. 基于 Canny 算子边缘检测的小波阈值去噪方法[J]. 数学杂志, 2015, 35(6): 1389-1392.
- [10] WALTER G G. A sampling theorem for wavelet subspaces[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38(2): 881-884.
- [11] ZHANG Z G, KON M A. On relating interpolatory wavelets to interpolatory scaling functions in multiresolution analyses[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2015, 34(6): 1947-1976.