直觉模糊序决策信息系统的分配约简

桑彬彬 徐伟华
（重庆理工大学理学院 重庆 400054）

摘 要 在直觉模糊集概念的基础上，通过对直觉模糊数加权的方法建立一种新的序关系。利用传统的序关系和新的序关系分别建立直觉模糊序决策信息系统。然后在定义的分配函数和分配协调集的基础上，给出对应的分配约简的判定定理和辨识矩阵，进而建立直觉模糊序决策信息系统的分配约简的具体方法。最后通过实例验证该方法的有效性。

关键词 分配约简，直觉模糊集，序信息系统，粗糙集
中图法分类号 TP18 **文献标识码** A

Assignment Reduction of Intuitionistic Fuzzy Ordered Decision Information System

SANG Bin-bin XU Wei-hua
(School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract Based on intuitionistic fuzzy sets, a new order relation was established by weighting the intuitionistic fuzzy numbers. The intuitionistic fuzzy order decision information system was established by the traditional order relation and the new order relation respectively. Then, on the basis of the definition of assignment function and assignment of coordination sets, judgement theorem for the assignment reduction and discernibility matrixare was given in the system. Furthermore, the specific method of assignment reduction was established in an intuitionistic fuzzy ordered decision information system. Finally the effectiveness of the method is verified by an example.

Keywords Assignment reduction, Intuitionistic fuzzy set, Ordered information system, Rough set

1 引言

保加利亚学者 Atanassov 于 1983 年在模糊集[1]的基础上提出直觉模糊集[2]的概念。它同时兼容了隶属度和非隶属度以及犹豫度这 3 个方面的信息，因此直觉模糊集比传统的模糊集在处理模糊性和不确定性等方面时包含的信息更全面、更实用。自直觉模糊集被提出以来，有关直觉模糊集理论的研究已受到国内外相关领域学者的高度关注。例如，Coker 首先讨论了直觉模糊集理论和粗糙集理论之间的关系[3]；在 Nanda 给出的模糊粗糙集的基础上，Jena 以及 Chakrabarty 等提出了不同的直觉模糊粗糙集的概念[4]。之后，徐伟华等将直觉模糊集理论与序信息系统[8]相结合，进一步拓展了直觉模糊集理论。

知识约简是粗糙集理论中非常重要的内容。所谓知识约简[12-16]，就是在不削弱知识库分类能力的前提下，删除其中冗余的属性。现阶段对属性约简算法的研究中比较典型的有 Jensen 等基于 Dubois 模型的启发式约简算法[5-6]；袁修久和张文修等[9]讨论了模糊目标信息系统的属性约简算法；王熙照等讨论了在模糊区分矩阵的知识约简，但是在直觉模糊集环境下的决策序信息系统的约简算法[11]的研究还很少。在实际生产中许多信息系统由于各种原因是基于直觉模糊序关系的，而且是不协调的。因此通过定义直觉模糊序关系并将其应用于决策信息系统中，从而建立直觉模糊序决策信息系统。需要特别指出的是本文建立了两种直觉模糊序关系，其中一种借鉴了文献[7]中对直觉模糊数之间判定大小的定义，本文在其基础上采用了加权的方法，从而给出了模糊数之间比较大小的新的定义，能够更好地对事件作出正确的决策。

若从复杂的基于直觉模糊序关系的不协调信息系统中获取简洁的不确定性命题，就必须对系统进行知识约简。因而，对直觉模糊序关系的不协调决策信息系统知识约简的研究是非常有意义的。本文对这一问题进行了探讨研究，在基于直觉模糊序关系的不协调目标信息系统中引入了分配约简概念，得到了分配约简的判定定理以及分配可辨识矩阵，建立了直觉模糊序关系下的不协调决策信息系统的分配约简的具体方法，同时通过实例验证了该方法的有效性，从而进一步丰富了粗糙集理论。

2 基于直觉模糊序关系的决策信息系统

决策信息系统是不仅有条件属性而且有决策属性的一种特殊信息系统，决策信息系统研究的主要问题是条件属性和决策属性之间的关系。下面先给出一些相关的基本概念。

定义 1[8] 设 $I=(U,AT\cup DT,F,G)$ 是一个五元组，称为决策信息系统；(U,AT,F) 是一个三元组，称为信息系统。其中 AT 称为条件属性集，D 称为目标属性集，即：U 是有限对象集 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$；AT 是有限条件属性集 $AT=\{a_1,a_2,\cdots,a_p\}$；$DT$ 是有限目标属性 $DT=\{d_1,d_2,\cdots,d_q\}$；

本文受国家自然科学基金（61105041，61472463，61402064），重庆理工大学研究生创新基金（YCX2015227，YCX2016227），重庆市研究生科研创新基金（CYS16217）资助。
桑彬彬（1992－），男，硕士生，主要研究方向为人工智能的数学基础；徐伟华（1979－），男，博士，教授，主要研究方向为粗糙集理论与应用、不确定性推理，E-mail：chxuwh@gmail.com。

F 是U 与 AT 的关系集，$F=\{f_k:U\rightarrow V_k,k\leqslant p\}$；$V_k$ 是 a_k 的有限值域；G 是 U 与 DT 的关集，$G=\{g_{k'}:U\rightarrow V_k{}',k'\leqslant q\}$；$V_k{}'$ 是 $d_{k'}$ 的有限值域。

定义 2[7] 设 $I_*=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为决策信息系统。对任意 $f\in F,g\in G,a\in AT$ 和 $x\in U$，都有 $f(x,a)=(\mu_a(x),\nu_a(x)),g(x,d)\in R$($R$ 为实数集)。其中，$\mu_a:U\rightarrow[0,1]$，$\nu_a:U\rightarrow[0,1]$并且满足 $0\leqslant\mu_a(x)+\nu_a(x)\leqslant 1$。$\mu_a(x)$和 $\nu_a(x)$分别称为 $x\in U$ 在条件属性 a 下的隶属度和非隶属度，记 $f(a)=\{f(x,a)\mid a\in AT\}$，称 $f(a)$为 U 上的直觉模糊集，$I_*=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊决策信息系统。

下面定义在直觉模糊决策信息系统中条件属性值的序关系和决策属性值的序关系。

定义 3 设 $I_*=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊决策信息系统，对任意 $a\in AT,f\in F,g\in G,x_i,x_j\in U$，有：

$$f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a)\Leftrightarrow[\mu_a(x_i)\leqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\geqslant\nu_a(x_j)]$$

$$f(x_i,a)\geqslant f(x_j,a)\Leftrightarrow[\mu_a(x_i)\geqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\leqslant\nu_a(x_j)]$$

$$g(x_i,d)\leqslant g(x_j,d),g(x_i,d)\geqslant g(x_j,d)$$

则 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统。

为了从线性的角度来研究直觉模糊集的序关系，本文给出从线性的角度来描述直觉模糊集序关系的定义。

定义 4 设 $x=\langle\mu,\gamma\rangle$为直觉模糊数，其中取隶属度的权重为 α，非隶属度的权重为$(1-\alpha)$，定义 $s(x)=\alpha\mu-(1-\alpha)\gamma$ 为 x 的得分函数，$h(x)=\alpha\mu+(1-\alpha)\gamma$ 为 x 的精度，对于两个直觉模糊数 $x_i=\langle\mu_i,\gamma_i\rangle(i=1,2)$的大小排序如下：

1)若 $s(x_1)>s(x_2)$，则 x_1 大于 x_2，记作 $x_1>x_2$。

2)若 $s(x_1)=s(x_2)$同时 $h(x_1)>h(x_2)$，则 x_1 大于 x_2，记作 $x_1>x_2$。

3)若 $s(x_1)=s(x_2)$同时 $h(x_1)=h(x_2)$，则 x_1 等于 x_2，记作 $x_1=x_2$。

下面仅考虑由递增偏序构成的优势关系的情形，并给出直觉模糊优势关系的第一定义和第二定义；同样，考虑递减偏序的情形也可以得到类似的结论。

定义 5(第一定义) 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统，对于 $A\subseteq AT$，令

$$\begin{aligned}R_A^{\leqslant}&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid x_i\leqslant x_j\}\\&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a),\forall a\in A,f\in F\}\\&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid\mu_a(x_i)\leqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\geqslant\nu_a(x_j),\forall a\in A,f\in F\}\end{aligned}$$

$$R_d=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid g(x_i,d)\leqslant g(x_j,d),g\in G\}$$

在定义 3 的基础上定义的 $R_A^{\leqslant}$ 和 $R_d^{\leqslant}$ 称为直觉模糊序决策信息系统的优势关系，所以此时该决策信息系统称为基于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统。

记：

$$\begin{aligned}[x_i]_A^{\leqslant}&=\{x_j\in U\mid(x_i,x_j)\in R_A^{\leqslant}\}\\&=\{x_j\in U\mid f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a),\forall a\in A,f\in F\}\\&=\{x_j\in U\mid\mu_a(x_i)\leqslant\mu_a(x_j),\nu_a(x_i)\geqslant\nu_a(x_j),\forall a\in A,f\in F\}\end{aligned}$$

$$[x_i]_d^{\leqslant}=\{x_j\in U\mid g(x_i,a)\leqslant g(x_j,a),\forall g\in G\}$$

其中，$[x_i]_A^{\leqslant}$，$[x_i]_d^{\leqslant}$ 是基于优势关系的直觉模糊序决策信息系统中的条件属性集下的优势类和决策属性集下的优势类，并且它们满足单调性。

定义 6(第二定义) 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统，对于 $A\subseteq AT$，令

$$\begin{aligned}R_A'^{\leqslant}&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid x_i\leqslant x_j\}\\&=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid s(x_i,a)<s(x_j,a)\text{或}(s(x_i,a)=s(x_j,a)\text{且 }h(x_i,a)\leqslant h(x_j,a))\ \forall a\in A\}\end{aligned}$$

$$R_d^{\leqslant}=\{(x_i,x_j)\in U\times U\mid g(x_i,d)<g(x_j,d),\forall g\in G\}$$

在定义 4 的基础上定义的 $R_A'^{\leqslant}$ 和 $R_d^{\leqslant}$ 称为直觉模糊序决策信息系统的优势关系，所以此时该决策信息系统称为基于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统。

$$\begin{aligned}[x_i]_A'^{\leqslant}&=\{x_j\in U\mid(x_i,x_j)\in R_A'^{\leqslant}\}\\&=\{x_j\in U\mid s(x_i,a)<s(x_j,a)\text{或}(s(x_i,a)=s(x_j,a)\text{且 }h(x_i,a)\leqslant h(x_j,a))\ \forall a\in A\}\end{aligned}$$

$$[x_i]_d^{\leqslant}=\{x_j\in U\mid g(x_i,d)\leqslant g(x_j,d),\forall g\in G\}$$

其中，$[x_i]_A'^{\leqslant}$，$[x_i]_d^{\leqslant}$ 是基于优势关系的直觉模糊序决策信息系统中的条件属性集下的优势类和决策属性集下的优势类，并且它们满足单调性。

由于直觉模糊在第一定义优势关系下的相关性质与在第二定义优势关系下的相关性质相同，因此下面只给出直觉模糊在第一定义优势关系下的相关性质。

命题 1 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统，$R_A^{\leqslant}$，$R_d^{\leqslant}$ 称为直觉模糊序决策信息系统的优势关系，则以下命题成立。

(1)$R_A^{\leqslant}$ 满足自反性和传递性，未必满足对称性，因而一般不再是等价关系。

(2)当 $B_1\subseteq B_2\subseteq AT$ 时，有 $R_{AT}^{\leqslant}\subseteq R_{B_2}^{\leqslant}\subseteq R_{B_1}^{\leqslant}$。

(3)当 $B_1\subseteq B_2\subseteq AT$ 时，有$[x_i]_{AT}^{\leqslant}\subseteq[x_i]_{B_2}^{\leqslant}\subseteq[x_i]_{B_1}^{\leqslant}$。

(4)当 $x_j\in[x_i]_A^{\leqslant}$ 时，有$[x_j]_A^{\leqslant}\subseteq[x_i]_A^{\leqslant}$。

对于任意 $X\subseteq U$，定义 X 关于优势关系下 $R_A^{\leqslant}$ 的下近似和上近似分别为：

$$\underline{R_A^{\leqslant}}(X)=\{x_i\in U:[x_i]_A^{\leqslant}\subseteq X\}$$

$$\overline{R_A^{\leqslant}}(X)=\{x_i\in U:[x_i]_A^{\leqslant}\cap X\neq\varnothing\}$$

优势关系下的上、下近似也满足类似于 Pawlak 近似空间中的许多性质，为了方便叙述，下文在没有特别说明时直觉模糊序决策信息系统都是指基于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统。

定义 7[8] 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统，若 $R_{AT}^{\leqslant}\subseteq R_d^{\leqslant}$，则称该直觉模糊序决策信息系统是协调的；否则若 $R_{AT}^{\leqslant}\not\subset R_d^{\leqslant}$，则称该系统是不协调的。

例 1 本文选用文献[8]中的数据作为实例，表 1 列出了一个直觉模糊序决策信息系统。$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，$AT=\{a_1,a_2,a_3\}$，d 为决策属性。

首先，按照直觉模糊序关系的定义 5 得出表 1 以及任意一个 x 的优势类。

表 1 直觉模糊序决策信息系统

U	a_1	a_2	a_3	d
x_1	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.7⟩	⟨0.1,0.9⟩	3
x_2	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.3,0.6⟩	⟨0.3,0.6⟩	2
x_3	⟨0.1,0.9⟩	⟨0.1,0.8⟩	⟨0.1,0.8⟩	1
x_4	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.2,0.8⟩	⟨0.4,0.6⟩	2
x_5	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.3,0.5⟩	⟨0.3,0.5⟩	3
x_6	⟨0.4,0.4⟩	⟨0.4,0.6⟩	⟨0.4,0.3⟩	1

按照直觉模糊序关系的定义 5 有：

$[x_1]_{AT}^{\leqslant}=\{x_1,x_2,x_5,x_6\}$

$[x_2]_{AT}^{\leqslant}=\{x_2,x_5,x_6\}$

$[x_3]_{AT}^{\leqslant}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_4]_{AT}^{\leqslant}=\{x_4,x_6\}$

$[x_5]^{\leqslant}_{AT}=\{x_5\}$

$[x_6]^{\leqslant}_{AT}=\{x_6\}$

$[x_1]^{\leqslant}_{d}=[x_5]^{\leqslant}_{d}=\{x_1,x_5\}$

$[x_2]^{\leqslant}_{d}=[x_4]^{\leqslant}_{d}=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$

$[x_3]^{\leqslant}_{d}=[x_6]^{\leqslant}_{d}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

显然，$R^{\leqslant}_{AT}\not\subset R^{\leqslant}_{d}$。因此该直觉模糊序决策信息系统是不协调的。

然后，按照直觉模糊序关系的定义 6 得出表 2 以及任意一个 x 的优势类。

取 $\forall x\in U$，$\forall a\in AT$，对象 x 在条件属性 a 下的隶属度权重取 0.8，非隶属度权重取 0.2，得到在直觉模糊序线性关系下的直觉模糊序决策信息系统。

表 2　直觉模糊序决策信息系统

U	a_1	a_2	a_3	d
x_1	(−0.06,0.22)	(−0.06,0.22)	(−0.10,0.26)	3
x_2	(0.12,0.36)	(0.12,0.36)	(0.12,0.36)	2
x_3	(−0.10,0.26)	(−0.08,0.24)	(−0.08,0.24)	1
x_4	(0,0.32)	(0,0.32)	(0.20,0.44)	2
x_5	(0.14,0.34)	(0.14,0.34)	(0.14,0.34)	3
x_6	(0.24,0.40)	(0.20,0.44)	(0.24,0.38)	1

$[x_1]'^{\leqslant}_{AT}=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_2]'^{\leqslant}_{AT}=\{x_2,x_5,x_6\}$

$[x_3]'^{\leqslant}_{AT}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_4]'^{\leqslant}_{AT}=\{x_4,x_6\}$

$[x_5]'^{\leqslant}_{AT}=\{x_5,x_6\}$

$[x_6]'^{\leqslant}_{AT}=\{x_6\}$

$[x_1]^{\leqslant}_{d}=[x_5]^{\leqslant}_{d}=\{x_1,x_5\}$

$[x_2]^{\leqslant}_{d}=[x_4]^{\leqslant}_{d}=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$

$[x_3]^{\leqslant}_{d}=[x_6]^{\leqslant}_{d}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

3　不协调直觉模糊序决策信息系统的分配约简

由于优势关系不同于等价关系，在对象集上不能形成划分，而是形成一个覆盖。因此，对于优势关系下的直觉模糊序决策信息系统，不能采取 Pawlak 近似空间下的决策信息系统中的方法定义分配函数。下面给出直觉模糊序决策信息系统的分配函数的定义方式。

定义 8[8]　设 $I^{\leqslant}_{*}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，$R^{\leqslant}_{A}$，$R^{\leqslant}_{d}$ 分别为条件属性集 AT 和决策属性 d 生成的 U 上的优势关系，对于 $A\subseteq AT$，$x\in U$，记：

$U/R^{\leqslant}_{A}=\{[x_i]^{\leqslant}_{A}\mid x_i\in U\}$

$U/R^{\leqslant}_{d}=\{D_1,D_2,\cdots D_r\}$

$\sigma_A(x)=\{D_j\mid D_j\cap[x]^{\leqslant}_{A}\neq\emptyset,x\in U\}$

其中，$[x]^{\leqslant}_{A}=\{y\in U\mid(x,y)\in R^{\leqslant}_{A}\}$，称为论域上对象关于条件属性子集和决策属性的分配函数，简称分配函数。

由以上定义可得到如下面定理。

定理 1　设 $I^{\leqslant}_{*}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A\subseteq AT$。

(1) 当 $B\subseteq A$ 时，对任意 $x\in U$ 有 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_B(x)$。

(2) 对 $\forall x,y\in U$，当 $[y]^{\leqslant}_{A}\subseteq[x]^{\leqslant}_{A}$ 时，有 $\sigma_A(y)\subseteq\sigma_A(x)$。

定义 9[8]　设 $I^{\leqslant}_{*}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为不协调直觉模糊序决策信息系统。若 $\forall x\in U$，$A\subseteq AT$ 有 $\sigma_A(x)=\sigma_{AT}(x)$，则称 A 是 $I^{\leqslant}_{*}$ 中关于序关系 $R^{\leqslant}_{AT}$ 的分配相对协调集，简称分配协调集；且若 A 的任何真子集不是分配协调集，则称 A 是 $I^{\leqslant}_{*}$ 中关于序关系 $R^{\leqslant}_{AT}$ 的分配相对约简，简称分配约简。

例 2　计算例 1 给出的不协调直觉模糊序决策信息系统的分配约简。

首先基于定义 5 的直觉模糊序关系来分配约简。

若在该信息系统中记：$D_1=[x_1]^{\leqslant}_{d}=[x_5]^{\leqslant}_{d}$，$D_2=[x_2]^{\leqslant}_{d}=[x_4]^{\leqslant}_{d}$，$D_3=[x_3]^{\leqslant}_{d}=[x_6]^{\leqslant}_{d}$，则有：$\sigma_{AT}(x_1)=\sigma_{AT}(x_2)=\sigma_{AT}(x_3)=\sigma_{AT}(x_5)=\{D_1,D_2,D_3\}$，$\sigma_{AT}(x_4)=\{D_2,D_3\}$，$\sigma_{AT}(x_6)=\{D_3\}$。

若取 $A=\{a_2,a_3\}$ 时，易验证得到 $\forall x\in U$ 有 $[x]^{\leqslant}_{AT}=[x]^{\leqslant}_{A}$，因此有 $\sigma_A(x)=\sigma_{AT}(x)$。故 $A=\{a_2,a_3\}$ 是 A 关于 d 的一个分配协调集。

取 $B=\{a_3\}$，有：

$[x_1]^{\leqslant}_{B}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_2]^{\leqslant}_{B}=\{x_2,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_3]^{\leqslant}_{B}=\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$

$[x_4]^{\leqslant}_{B}=\{x_4,x_6\}$

$[x_5]^{\leqslant}_{B}=\{x_5,x_6\}$

$[x_6]^{\leqslant}_{B}=\{x_6\}$

于是：$\sigma_B(x_1)=\sigma_B(x_2)=\sigma_B(x_3)=\sigma_B(x_5)=\{D_1,D_2,D_3\}$，$\sigma_B(x_4)=\{D_2,D_3\}$，$\sigma_B(x_6)=\{D_3\}$。

因此，对于 $\forall x\in U$ 有 $\sigma_B(x)=\sigma_{AT}(x)$。$B=\{a_3\}$ 也是一个分配协调集，从而可以验证 $\{a_1\}$，$\{a_2\}$ 均不是分配协调集，进而 $B=\{a_3\}$ 是一个分配约简。

容易验证 $\{a_1,a_2\}$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$ 都不是分配协调集，因此该目标信息系统只有一个分配约简，即 $\{a_3\}$。

同理，基于定义 6 的直觉模糊序关系来进行分配约简，得到的结果仍然是 $\{a_1,a_2\}$，$\{a_1\}$ 和 $\{a_2\}$ 都不是分配协调集，因此该目标信息系统只有一个分配约简，即 $\{a_3\}$。

下面具体给出不协调直觉模糊序决策信息系统的分配协调集的判定定理。

定理 2　设 $I^{\leqslant}_{*}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$ 为直觉模糊序决策信息系统，$A\subseteq AT$。则 A 是分配协调集当且仅当对任意 x，$y\in U$，若 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(y)$，则 $[x]^{\leqslant}_{A}\cap[y]^{\leqslant}_{A}\neq[y]^{\leqslant}_{A}$，即 A 是分配协调集 $\Leftrightarrow(\forall x,y\in U)[[y]^{\leqslant}_{A}\subseteq[x]^{\leqslant}_{A}\Rightarrow\sigma_{AT}(y)\subseteq\sigma_{AT}(x)]$。

证明：必要性。反正法。假设当 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(y)$ 时，$[x]^{\leqslant}_{A}\cap[y]^{\leqslant}_{A}\neq[y]^{\leqslant}_{A}$ 不成立。此时有 $[x]^{\leqslant}_{A}\cap[y]^{\leqslant}_{A}=[y]^{\leqslant}_{A}$，即 $[x]^{\leqslant}_{A}\supset[y]^{\leqslant}_{A}$，由定理 1(2) 知 $\sigma_A(y)\subseteq\sigma_A(x)$。由 A 是分配协调集知 $\sigma_{AT}(x)\supseteq\sigma_{AT}(y)$。即 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)=\sigma_{AT}(y)$，矛盾。从而证得必要性成立。

充分性。由定理 1(1) 知 $\sigma_{AT}(x)\subseteq\sigma_A(x)$，只需证明 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_{AT}(x)$ 即可。

对 $\forall x,y\in U$ 若 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(y)$，则 $[x]^{\leqslant}_{A}\cap[y]^{\leqslant}_{A}\neq[y]^{\leqslant}_{A}$。因此对 $\forall x,y\in U$，若 $[x]^{\leqslant}_{A}\cap[y]^{\leqslant}_{A}=[y]^{\leqslant}_{A}$，则 $\sigma_{AT}(x)\cap\sigma_{AT}(y)=\sigma_{AT}(y)$，即 $[y]^{\leqslant}_{A}\subseteq[x]^{\leqslant}_{A}$ 成立，可推出 $\sigma_{AT}(y)\subseteq\sigma_{AT}(x)$ 成立。对 $\forall D_k\in\sigma_A(x)$，有 $[x]^{\leqslant}_{A}\cap D_k\neq\emptyset$。假设 $y\in[x]^{\leqslant}_{A}\cap D_k$，则 $y\in[x]^{\leqslant}_{A}$。所以 $[y]^{\leqslant}_{A}\subseteq[x]^{\leqslant}_{A}$，可得 $\sigma_{AT}(y)\subseteq\sigma_{AT}(x)$。又因为 $[y]^{\leqslant}_{AT}\subseteq[y]^{\leqslant}_{A}$，所以 $[y]^{\leqslant}_{A}\cap D_k\neq\emptyset$。因此 $D_k\in\sigma_{AT}(y)$，则 $D_k\in\sigma_{AT}(x)$。进而得到 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_{AT}(x)$。

4　不协调直觉模糊序决策信息系统的分配可辨识矩阵

第 3 节中的定理给出了不协调直觉模糊序决策信息系统的分配协调集的等价刻画，这是判断属性子集是否协调的理论所在，由此可进一步得出分配约简的方法。下面分别给出

基于定义 5 的直觉模糊序关系和基于定义 6 的直觉模糊序关系的分配相对可辨识属性集的概念。

定义 10 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序决策信息系统，记：

$$D^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)=\{(x_i,x_j)\mid\sigma_{AT}(x_i)\subset\sigma_{AT}(x_j)\}$$

$$Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)=\begin{cases}\{a_k\in AT\mid f(x_i,a)\leqslant f(x_j,a)\}, & \\ \qquad (x_i,x_j)\in D^{\sigma}_{\leqslant AT} \\ \varnothing, \qquad (x_i,x_j)\notin D^{\sigma}_{\leqslant AT}\end{cases}$$

称 $D^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)$为 $I_*^{\leqslant}$ 中 x_i 和 x_j 关于定义 5 直觉模糊关系 $R^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的第一分配相对可辨识属性集，简称为第一分配可辨识属性集。

记 $Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}=(Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j))_{|U|\times|U|}$。称 $Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 为 $I_*^{\leqslant}$ 关于定义 5 直觉模糊序关系 $R^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的分配相对可辨识矩阵，简称为第一分配可辨识矩阵。

定义 11 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为直觉模糊序信息系统，记：

$$D^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)=\{(x_i,x_j)\mid\sigma_{AT}(x_i)\subset\sigma_{AT}(x_j)\}$$

$$DIS^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)=$$

$$\begin{cases}\{a_k\in AT\mid(s(x_i,a)>s(x_j,a)\vee(s(x_i,a)=s(x_j,a)\wedge \\ h(x_i,a)>h(x_j,a))\}, \quad (x_i,x_j)\in D^{\sigma}_{\leqslant AT} \\ \varnothing, \qquad (x_i,x_j)\notin D^{\sigma}_{\leqslant AT}\end{cases}$$

称 $D^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)$为 $I_*^{\leqslant}$ 中 x_i 和 x_j 关于定义 6 直觉模糊关系 $R'^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的第二分配相对可辨识属性集，简称为第二分配可辨识属性集。

记 $DIS^{\sigma}_{\leqslant AT}=(DIS^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j))_{|U|\times|U|}$。称 $DIS^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 为 $I_*^{\leqslant}$ 关于定义 6 的直觉模糊序关系 $R'^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的分配相对可辨识矩阵，简称为第二分配可辨识矩阵。

由于基于分配协调集的判定定理和分配可辨识矩阵定义 10 或定义 11 都可以得到相同的定理，因此这里仅考虑基于分配可辨识矩阵定义 10 得到的相关定理。

定理 3[9] 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统，$A\subseteq AT$，$A$ 是分配协调集当且仅当 $\forall(x,y)\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 都有 $A\cap Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)\neq\varnothing$。

证明：（必要性）$\forall(x,y)\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 有 $\sigma_{AT}(x)\subset\sigma_{AT}(y)$，则 $\sigma_A(x)\cap\sigma_{AT}(y)\neq\sigma_{AT}(y)$。因为 A 是分配协调集，由定理 2 得 $[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\neq[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$。所以$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$ 与$[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$ 的关系有 3 种情况：

(1)$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\subset[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$；

(2)$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}=\varnothing$；

(3)$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\subset[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$ 且$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\subset[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$。

下面证明 3 种情况下均有 $A\cap Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)\neq\varnothing$ 成立。

(1)如果$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\subset[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，则至少存在一个 $z\in[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，但 $z\notin[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，由 $z\notin[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$ 可知，至少存在一个 $a\in A$，使得$f(x,a)>f(z,a)$。因为 $z\in[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，所以 $f(y,a)\leqslant f(z,a)$。于是得到 $f(x,a)>f(y,a)$，因此 $a\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)$，有 $A\cap Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)\neq\varnothing$。

(2)若$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}=\varnothing$，必然至少存在一个 $a\in A$ 使得 $f(x,a)>f(y,a)$，即 $A\cap Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)\neq\varnothing$。否则，若对于所有的 $a\in A$ 都有 $f(x,a)\leqslant f(y,a)$，则 $y\in[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，与$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}=\varnothing$ 矛盾。

(3)若$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\subset[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$ 且有$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\subset[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，证明与(1)相同。因为至少存在一个 $z\in[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$，但是 $z\notin[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$。

由此必要性即证。

（充分性）如果对所有的$(x,y)\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 有 $A\cap Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)\neq\varnothing$，则必定存在 $a\in A$ 且 $a\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x,y)$，故有 $f(x,a)>f(y,a)$，所以 $y\notin[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$。因此$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{B}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{B}}\neq[y]^{\leqslant}_{\widetilde{B}}$。另外，由 $(x,y)\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}$，得 $\sigma_A(x)\subseteq\sigma_A(y)$，于是 $\sigma_A(x)\cap\sigma_A(y)\neq\sigma_A(y)$。当 $\sigma_A(x)\cap\sigma_A(y)\neq\sigma_A(y)$ 时，有$[x]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\cap[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}\neq[y]^{\leqslant}_{\widetilde{A}}$。由定理 2 知 A 是分配协调集，充分性得证。

定义 12 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统，对象关于直觉模糊序关系 $R^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的分配辨识矩阵为 $Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}$。记 $M^{\sigma}_{\leqslant AT}=\wedge\{\vee\{a\mid a\in Dis^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)\}\mid\forall x_i,x_j\in U\}$，称 $M^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 为 $I_*^{\leqslant}$ 关于直觉模糊序关系 $R^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的第一分配可辨识公式。

定义 13 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统，对象关于直觉模糊序关系 $R'^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的分配辨识矩阵为 $DIS'^{\sigma}_{\leqslant AT}$。记 $M'^{\sigma}_{\leqslant AT}=\wedge\{\vee\{a\mid a\in DIS'^{\sigma}_{\leqslant AT}(x_i,x_j)\}\mid\forall x_i,x_j\in U\}$，称 $M'^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 为 $I_*^{\leqslant}$ 关于直觉模糊序关系 $R'^{\leqslant}_{\widetilde{AT}}$ 的第二分配可辨识公式。

定理 4 设 $I_*^{\leqslant}=(U,AT\cup\{d\},F,G)$为不协调直觉模糊序决策信息系统，分配辨识公式 $M^{\sigma}_{\leqslant AT}$ 的极小析取范式为 $M^{\sigma}_{\leqslant\min}=\bigvee_{k=1}^{p}(\bigvee_{s=1}^{q_k}a_s)$，若记 $B^k_{\sigma}=\{a_s\mid s=1,2,\cdots,q_k\}$，则$\{B^k_{\sigma}\mid k=1,2,\cdots,p\}$是所有分配约简构成的集合。

例 3 对于表 1 给出的不协调直觉模糊序决策信息系统中的分配函数，可以计算该信息系统的第一分配辨识矩阵，如表 3 所列。

表 3 不协调直觉模糊序决策信息系统的第一分配辨识矩阵

$Dis^{\sigma}_{\leqslant A}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_4	A	a_3	A	$\varnothing$	a_3	$\varnothing$
x_5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_6	A	A	A	A	A	$\varnothing$

故可得：$M^{\sigma}_{\leqslant A}=a_3\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)=a_3$。

此时经过计算该信息系统的第一分配辨识矩阵得到的分配约简与例 2 中基于直觉模糊序关系的第一定义得到的分配约简一致。

该信息系统的第二分配辨识矩阵如表 4 所列。

表 4 不协调直觉模糊序决策信息系统的第二分配辨识矩阵

$DIS^{\sigma}_{\leqslant A}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_4	A	a_3	A	$\varnothing$	a_3	$\varnothing$
x_5	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
x_6	A	A	A	A	A	$\varnothing$

故可得：$M'^{\sigma}_{\leqslant A}=a_3\wedge(a_1\vee a_2\vee a_3)=a_3$。

因此$\{a_3\}$是该不协调直觉模糊序决策信息系统的所有分配约简。这与例 2 的结果是一致的。

结束语 本文首先介绍了直觉模糊集，进而分别定义出两种直觉模糊序关系，在一个的决策信息系统中引入直觉模糊序关系，从而建立一个直觉模糊序决策信息系统。在该信息系统中引入了分配约简的概念，而且得到了分配约简的判定定理以及分配可辨识矩阵，建立了直觉模糊序关系下不协调决策信息系统的分配约简的具体方法，同时通过实例验证了该方法的有效性。

参考文献

[1] VLACHOS L K,SERGIADIS G D. Intuitionistic fuzzy information:Applications to pattern recognition [J]. Pattern Recognition Letters,2007,28(2):180-210.

[2] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets & Systems,1986,20(1):87-96.

[3] ÇOKER,DOGAN. Fuzzy rough sets are intuitionistic L-fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets & Systems,1998,96(3):381-383.

[4] NANDA S,MAJUMDAR S. Fuzzy rough sets [J]. Fuzzy Sets & Systems,1992,45(2):157-160.

[5] JENSEN R,SHEN Q. Fuzzy-rough attribute reduction with application to web categorization[J]. Fuzzy Sets & Systems,2004,141(3):469-485.

[6] JENSEN R,SHEN Q. Fuzzy-rough data reduction with ant colony optimization[J]. Fuzzy Sets & Systems,2005,149(1):5-20.

[7] ZHOU L,WU W,ZHANG W. On characterization of intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy implicators [J]. Information Sciences,2009,179(7):883-898.

[8] 徐伟华. 序信息系统与粗糙集[M]. 北京:科学出版社,2013.

[9] 袁修久,张文修. 模糊目标信息系统的属性约简[J]. 系统工程理论与实践,2004,24(5):116-120.

[10] 徐伟华,柴昱洲,李坚,等. 优势关系下分配约简矩阵算法的程序实现[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2011,25(4):117-122.

[11] 张晓燕,徐伟华,张文修. 序目标信息系统中分布约简的矩阵算法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2010,24(3):56-61.

[12] 苟光磊,王国胤. 基于不协调置信优势原理关系的知识约简[J]. 计算机科学,2016,43(6):204-207.

[13] 刘芳,李天瑞. 基于边界域的不完备信息系统属性约简方法[J]. 计算机科学,2016,43(3):242-245.

[14] 徐伟华,张先韬,王巧荣. 序信息系统中变精度粗糙集属性约简的 Matlab 实现[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2013,27(1):107-115.

[15] JING Y,LI T,HUANG J,et al. An incremental attribute reduction approach based on knowledge granularity under the attribute generalization [J]. International Journal of Approximate Reasoning,2016,76:80-95.

[16] 鞠恒荣,杨习贝,戚湧,等. 量化粗糙集的单调性属性约简方法[J]. 计算机科学,2015,42(8):36-39.

(上接第 67 页)

[10] NICHOLAS T. Using AdaBoost and Decision Stumps to Identify Spam E-mail[J]. Natural Language Processing,2003:1-7.

[11] 刘洋,杜孝平,周二胜,等. "垃圾邮件"的智能分析、过滤及 Rough 集讨论[C]∥中国计算机学会网络与数据通信学术会议,2002. 武汉,2002:515-521.

[12] 潘文锋. 基于内容的垃圾邮件过滤研究[D]. 北京:中国科学院计算技术研究所,2004.

[13] SOONTHORNPHISAJ N,CHAIKULSERIWAT K,TANG O P. Anti-Spam Filtering A Centroid-Based classification Approach [C]∥Proceedings of International Conference on Signal Processing (ICSP),2002. Pattaya Thailand:ICSP,2002:1096-1099.

[14] ODA T,WHITE T. Increasing the accuracy of a spam-detecting artificial immune system[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2004,1:390-396.

[15] 张泽明,罗文坚,王煦法. 一种基于人工免疫的多层垃圾邮件过滤算法[J]. 电子学报,2006,34(9):1616-1620.

[16] CHHABRA S,YERAZUNIS W,SIEFKES C. Spam filtering using a Markov random field model with variable weighting schemas[C]∥Proceedings of 4th IEEE International Conference on Data Mining,2014. Hong Kong,China:IEEE,2014:347-350.

[17] 李渊,廖闻剑,彭艳兵,等. 复杂网络性质探讨及在垃圾邮件过滤中的运用[J]. 计算机科学,2013,40(S1):145-148.

[18] ANDROUTSOPOULOS I,KOUTSIAS J,CHANDRINOS K,et al. An Experimental Comparison of Naive Bayesian and Keyword-Based Anti-Spam Filtering with Encrypted Personal E-mail Messages[C]∥Proceedings of the 23rd Annual International ACMSIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval (SIGIR), 2000. Athens Greece: ACM, 2000:160-167.

[19] RENUKA D,HAMSAPRIYA T,CHAKKARAVARTHI M R,et al. Spam Classification Based on Supervised Learning Using Machine Learning Techniques[C]∥Proceedings of Process Automation,Control and Computing (PACC),2011. Coimbatore,India:PACC,2011:1-7.

[20] RIJSBERGEN C J V,ROBERTSON S E,PORTER M F. New models in probabilistic information retrieval:British Library Research and Development Report,no. 5587[R]. Cambridge:Computer Laboratory University of Cambridge,1980.

[21] SHEN H Y,LI Z. Leveraging Social Networks for Effective Spam Filtering[J]. IEEE Transactions on Computers,2013,63(11):2743-2759.

[22] DEBARR D,SUN H,WECHSLER H. Adversarial Spam Detection Using the Randomized Hough Transform Support Vector Machine[C]∥Proceedings of 2013 12th International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA'12). Miami,FL,USA,2013:299-304.

[23] SHARAM A,SAHNI S. A Comparative Study of Classification Algorithms for Spam Email Data Analysis[J]. International Journal on Computer Science & Engineering,2011,3(5):111-117.

[24] ZHOU B,YAO Y Y,LUO J G. A Three-Way Decision Approach to Email Spam Filtering[C]∥Advances in Artificial Intelligence,Canadian Conference on Artificial Intelligence. Canadian,Ottawa,Canada,2010:28-39.

[25] ZHANG Y D,WANG S G,PHILLIPS P,et al. Binary PSO with mutation operator for feature selection using decision tree applied to spam detection[J]. Knowledge-Based Systems,2014,64:22-31.

[26] KAYA Y,ERTUĞRUL Ö F. A novel approach for spam email detection based on shifted binary patterns[J]. Security & Communication Networks,2016,9(10):1216-1225.

[27] ALQATAWNA J,FARIS H,JARADAT K,et al. Improving Knowledge Based Spam Detection Methods:The Effect of Malicious Related Features in Imbalance Data Distribution[J]. International Journal of Communications, Network and System Sciences,2015,8(5):118-129.

[28] NAKSOMBOON S,WATTANAPONGSAKORN N. Considering behavior of sender in spam mail detection[C]∥Proceedings of International Conference on Networked Computing (INC). Gyeongju,Korea (South),2010:1-5.