基于加权代价的决策粗糙集模型

陈玉金 李续武
(空军工程大学防空反导学院 西安 710051)

摘 要 经典决策粗糙集模型仅仅依据单个代价矩阵进行风险决策,没有考虑到风险代价的多样性和复杂性。为了弥补现有模型的不足,首先,从加权投票机制的角度引入基于多重代价融合的风险分析方法,提出一种基于加权代价的决策粗糙集方法。然后,研究基于加权代价的决策粗糙集模型与其他模型的性质和关系,分析它们之间的度量和代价关系。最后,通过 UCI 数据集验证该方法的有效性和鲁棒性。

关键词 决策粗糙集,多重代价,权重,度量
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.12.043

Decision-theoretic Rough Set Model Based on Weighted Multi-cost

CHEN Yu-jin LI Xu-wu
(College of Air and Missile Defense, Air-force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract Classical decision-theoretic rough set was proposed based on only one cost matrix, which dose not take the diversity and complexity of cost into account. To make up for the shortcomings, a risk analysis method based on multi-cost fusion was introduced and a decision-theoretic rough set method based on weighted multi-cost was proposed. Futhermore, the properties and the relations of these kinds of rough sets were discussed. The measure and cost relations of them were analyzed. Finally, the validity and robustness of the method were verified by UCI dataset.

Keywords Decision-theoretic rough set, Multi-cost, Weight, Measurement

1 引言

决策粗糙集[1]是由 Yao 等人提出的,他们在经典 Pawlak 粗糙集[2-3]的基础上引入了贝叶斯风险分析,通过单个代价矩阵来求得构建概率粗糙近似所需的一对阈值[4]。然而,单个代价矩阵存在标准不统一及主观性较强等不足,无法获得具有普遍决策意义的近似集和决策规则。基于此,研究人员提出通过构建多重代价决策粗糙集模型来解决这一问题。文献[5]将问题抽象为映射关系,从 3 种特殊情况出发探讨融合方法。文献[6]提出了保守与激进决策粗糙集方法。文献[7-8]提出了乐观与悲观两种多重代价融合方法,并从代价风险的角度进行了分析。文献[9]提出了一种含有可变语义的多重代价融合方法,将乐观和悲观决策粗糙集统一起来。

经过分析可以发现:1)乐观决策粗糙近似仅要求对象满足单重代价的决策规则即可,这种决策过于宽松;2)悲观决策粗糙近似要求对象满足所有代价的决策规则,这种决策又过于严格;3)可变多重代价决策粗糙近似要求对象满足一定数目的代价决策规则,这种决策对每个代价矩阵的考查是无差别的,虽然考虑了代价的数量,但忽略了其质量。不同个体在其领域内的权威性不同,实际应用中给出的代价矩阵也不是完全平等的,比如在项目决策过程中,总工程师相对于其他人更有经验,在做决策时应被赋予更大的权重。不同个体的权重可通过 AHP 法[10]、Delphi 法[11]等获得,也可以视情况人为给定。基于此,本文提出一种基于加权代价的决策粗糙集模型,讨论加权多重代价决策粗糙集与现有决策粗糙集方法之间的关系和性质。

2 基本知识

2.1 单重代价决策粗糙集

设信息系统为一个二元组 $\langle U, AT\rangle$,其中论域 U 是所有对象的有限非空集合,AT 是所有属性的有限非空集合。依据是否属于集合 X 对对象 x 进行分类,构造状态空间 $\Theta=\{X,\sim X\}$,决策动作集 $A=\{a_P,a_B,a_N\}$。其中,a_P,a_B,a_N 表示对一个对象 x 进行分类决策的行动,即对象 x 确定属于、可能属于、确定不属于集合 X。那么,设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵,以 a_P,a_B,a_N 为行,以 X 和 $\sim X$ 为列,第 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 个代价矩阵如下所示:

$$B_i=\begin{bmatrix}\lambda_{PP}^i & \lambda_{PN}^i\\ \lambda_{BP}^i & \lambda_{BN}^i\\ \lambda_{NP}^i & \lambda_{NN}^i\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中,当一个对象 x 属于集合 X 时,将采取 a_P,a_B,a_N 决策时所需的代价记为 $\lambda_{PP}^i,\lambda_{BP}^i,\lambda_{NP}^i$;当一个对象 x 不属于集合 X

到稿日期:2016-12-20 返修日期:2017-04-05 本文受国家自然科学基金(61503407)资助。
陈玉金(1992-),男,硕士,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理,E-mail:ivan@mail.dlut.edu.cn;李续武(1959-),男,教授,硕士生导师,主要研究方向为粗糙集与智能信息处理等。

时，将采取 a_P，a_B，a_N 决策时所需的代价记为 λ_{PN}^i，λ_{BN}^i，λ_{NN}^i。

定义 1 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵。$\forall X\subseteq U$，关于代价矩阵 B_i 的决策粗糙集的下、上近似集为：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_D^i(X)=\{x\in U\mid P(X\mid[x]_R)\geqslant\alpha_i\}\\&\overline{A}_D^i(X)=\{x\in U\mid P(X\mid[x]_R)>\beta_i\}\end{aligned}\tag{2}$$

其中，$\alpha_i=\dfrac{\lambda_{PN}^i-\lambda_{BN}^i}{(\lambda_{PN}^i-\lambda_{BN}^i)+(\lambda_{BP}^i-\lambda_{PP}^i)}$，$\beta_i=\dfrac{\lambda_{BN}^i-\lambda_{NN}^i}{(\lambda_{BN}^i-\lambda_{NN}^i)+(\lambda_{NP}^i-\lambda_{BP}^i)}$，且 $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i\leqslant1$。

2.2 多重代价决策粗糙集

定义 2 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵，$\forall X\subseteq U$，乐观决策粗糙集的下、上近似集为：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{OD}(X)=\{x\in U\mid P(x\mid[x]_R)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i\}\\&\overline{A}_{OD}(X)=\{x\in U\mid P(x\mid[x]_R)>\min_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_i\}\end{aligned}\tag{3}$$

相应的边界域集合为：

$$BND_{OD}(X)=\overline{A}_{OD}(X)-\underline{A}_{OD}(X)\tag{4}$$

定义 3 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵，$\forall X\subseteq U$，悲观决策粗糙集的下、上近似集为：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{PD}(X)=\{x\in U\mid P(x\mid[x]_R)\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i\}\\&\overline{A}_{PD}(X)=\{x\in U\mid P(x\mid[x]_R)>\max_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_i\}\end{aligned}\tag{5}$$

相应的边界域集合为：

$$BND_{PD}(X)=\overline{A}_{PD}(X)-\underline{A}_{PD}(X)\tag{6}$$

定义 4 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant1$，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵，$\forall X\subseteq U$，可变多重代价决策粗糙集的下、上近似集为：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{VD}^{\rho}(X)=\{x\in U\mid\frac{|\{i\mid P(x\mid[x]_R)\geqslant\alpha_i,1\leqslant i\leqslant n\}|}{n}\geqslant\rho\}\\&\overline{A}_{VD}^{\rho}(X)=\{x\in U\mid\frac{|\{i\mid P(x\mid[x]_R)>\beta_i,1\leqslant i\leqslant n\}|}{n}\geqslant\rho\}\end{aligned}\tag{7}$$

相应的边界域集合为：

$$BND_{VD}^{\rho}(X)=\overline{A}_{VD}^{\rho}(X)-\underline{A}_{VD}^{\rho}(X)\tag{8}$$

定理 1 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$\forall X\subseteq U$，可变、乐观和悲观决策粗糙集之间存在如下关系：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{VD}^{0}(X)=\underline{A}_{OD}(X)\\&\overline{A}_{VD}^{0}(X)=\overline{A}_{OD}(X)\\&\underline{A}_{VD}^{1}(X)=\underline{A}_{PD}(X)\\&\overline{A}_{VD}^{1}(X)=\overline{A}_{PD}(X)\end{aligned}\tag{9}$$

3 加权多重代价决策粗糙集

3.1 加权多重代价决策粗糙集的定义

在多重代价决策粗糙集理论中，乐观决策粗糙集认为对象 x 满足 n 个代价矩阵中任意一个即可作出分类决策；悲观决策粗糙集认为对象 x 必须满足所有代价矩阵才能作出分类决策；可变多重代价决策粗糙集认为对象 x 满足一定数目的代价矩阵方可作出分类决策。在上述决策过程中，只考虑了代价空间的数量而忽略了其质量。但在实际应用中，不是每个个体都是平等的，需要区别对待。本节从加权投票机制的角度引入基于多重代价融合的风险分析方法，给出一种基于加权代价的决策粗糙集。

定义 5 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant1$，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵，相应的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$且 $\theta_i>0$。令 $p_i(x)$和 $b_i(x)$表示对于对象 x，第 i 个代价矩阵的上近似、下近似决策结果。$\forall X\subseteq U$，加权多重代价决策粗糙集的下、上近似集为：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)=\{x\in U\mid\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\theta_i\geqslant\rho\}\\&\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)=\{x\in U\mid\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\theta_i\geqslant\rho\}\end{aligned}\tag{10}$$

其中：

$$p_i(x)=\begin{cases}1, & P(X\mid[x]_R)\geqslant\alpha_i\\0, & P(X\mid[x]_R)<\alpha_i\end{cases}$$

$$b_i(x)=\begin{cases}1, & P(X\mid[x]_R)>\beta_i\\0, & P(X\mid[x]_R)\leqslant\beta_i\end{cases}$$

相应的边界域集合为：

$$BND_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)=\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)-\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\tag{11}$$

定理 2 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant1$，n 个代价矩阵的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$。若 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=1/n$，则 $\forall X\subseteq U$，加权多重代价决策粗糙集与可变多重代价决策粗糙集的下、上近似等价：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)=\underline{A}_{VD}^{\rho}(X)\\&\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)=\overline{A}_{VD}^{\rho}(X)\end{aligned}\tag{12}$$

证明：由定义 4、定义 5 易证该定理成立。

定理 3 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant1$，n 个代价矩阵的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$ 且 $\theta_i>0$。则 $\forall X\subseteq U$，加权多重代价决策粗糙集与乐观和悲观决策粗糙集存在如下关系：

$$\begin{aligned}&\underline{A}_{PD}(X)\subseteq\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq\underline{A}_{OD}(X)\\&\overline{A}_{PD}(X)\subseteq\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq\overline{A}_{OD}(X)\end{aligned}\tag{13}$$

证明：$\forall x\in\underline{A}_{PD}(X)$，显然有 $x\in\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)$，即$\underline{A}_{PD}(X)\subseteq\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)$。同理可证，$\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq\underline{A}_{OD}(X)$。类似地，$\overline{A}_{PD}(X)\subseteq\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq\overline{A}_{OD}(X)$。

定理 4 令 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant1$，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵，相应的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$ 且 $\theta_i>0$。则 $\forall X\subseteq U$，加权多重代价决策粗糙集有如下性质：

1)$\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq X\subseteq\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)$

2)$\rho_1\geqslant\rho_2\Rightarrow\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho_1)}(X)\subseteq\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho_2)}(X)$

$\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho_1)}(X)\subseteq\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho_2)}(X)$

3)$\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(\varnothing)=\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(\varnothing)=\varnothing$

$\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(U)=\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(U)=U$

4)$\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X\cap Y)\subseteq\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\cap\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(Y)$

$\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X\cup Y)\supseteq\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\cup\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(Y)$

5)$X\subseteq Y\Rightarrow\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(Y)$

$\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)\subseteq\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(Y)$

6)$\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(\sim X)=\sim\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)$

$\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(\sim X)=\sim\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)$

证明：由定义 6 易证。

分析表明，当 $\rho\to 0$ 时，加权多重代价决策粗糙集与乐观决策粗糙集的上、下近似等价。当 $\rho=1$ 时，加权多重代价决策粗糙集与悲观决策粗糙集的上、下近似等价。可见，加权多重代价决策粗糙集是可变多重代价决策粗糙集、乐观和悲观多重代价决策粗糙集的泛化形式。该模型通过调节参数的取值可使其兼有其他 3 种模型的特点和性质，能够满足特定情况的应用需求。

3.2 加权多重代价决策粗糙集的度量

描述一个粗糙集模型的度量，通常考虑通过近似分类质量 γ、属性依赖度 π 等度量来分析和验证其边界域的精确度[12-13]。

定义 6　$I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant 1$，n 个代价矩阵的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$ 且 $\theta_i>0$。则 $\forall X\subseteq U$，加权多重代价决策粗糙集、可变多重代价决策粗糙集以及乐观和悲观决策粗糙集的近似分类质量 γ 分别为：

$$\begin{aligned}\gamma_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)&=\frac{|\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(X)|}{|U|}\\ \gamma_{VD}^{\rho}(X)&=\frac{|\underline{A}_{VD}^{\rho}(X)|}{|U|}\\ \gamma_{OD}(X)&=\frac{|\underline{A}_{OD}(X)|}{|U|}\\ \gamma_{PD}(X)&=\frac{|\underline{A}_{PD}(X)|}{|U|}\end{aligned}\tag{14}$$

那么由定理 3 易得，$\gamma_{PD}(D)\leqslant\gamma_{MD}^{(\theta,\rho)}(D)\leqslant\gamma_{OD}(D)$，$\gamma_{PD}(D)\leqslant\gamma_{VD}^{\rho}(D)\leqslant\gamma_{OD}(D)$。

定义 7　$I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant 1$，n 个代价矩阵的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$ 且 $\theta_i>0$。$D=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 为由决策属性 d 在论域 U 上导出的划分，则决策类 D 对条件属性集的属性依赖度记为 π。$\forall X\subseteq U$，加权多重代价决策粗糙集、可变多重代价决策粗糙集以及乐观和悲观决策粗糙集的属性依赖度 π 分别为：

$$\begin{aligned}\pi_{MD}^{(\theta,\rho)}(D)&=\frac{\sum_{i=1}^{m}||\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(D_i)||D_i\in D|}{|U|}\\ \pi_{VD}^{\rho}(D)&=\frac{\sum_{i=1}^{m}||\underline{A}_{VD}^{\rho}(D_i)||D_i\in D|}{|U|}\\ \pi_{OD}(D)&=\frac{\sum_{i=1}^{m}||\underline{A}_{OD}(D_i)||D_i\in D|}{|U|}\\ \pi_{PD}(D)&=\frac{\sum_{i=1}^{m}||\underline{A}_{PD}(D_i)||D_i\in D|}{|U|}\end{aligned}\tag{15}$$

那么一定有 $\pi_{PD}(D)\leqslant\pi_{MD}^{(\theta,\rho)}(D)\leqslant\pi_{OD}(D)$，$\pi_{PD}(D)\leqslant\pi_{VD}^{\rho}(D)\leqslant\pi_{OD}(D)$。

由以上分析可知，加权多重代价决策粗糙集、可变多重代价决策粗糙集的各度量指标是介于乐观决策粗糙集和悲观决策粗糙集的相应度量指标之间的。

从决策粗糙集的角度评价模型时，正域、边界域和负域的代价是衡量粗糙集的另一个数字特征[8-10]。对于 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 这 n 个不同的代价矩阵，第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个代价矩阵 B_i 都有相应的正域、边界域、负域代价。

定义 8　令 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵。$D=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 为由决策属性 D 导出的划分。乐观决策粗糙集的正域代价 $\sigma_{OD}(x)$、边界域代价 $\tau_{OD}(x)$、负域代价 $\theta_{OD}(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}\sigma_{OD}(x)&=P(D_j|[x]_R)\min_{i=1}^{n}\lambda_{PP}^{i}+(1-P(D_j|[x]_R))\min_{i=1}^{n}\lambda_{PN}^{i}\\ \tau_{OD}(x)&=P(D_j|[x]_R)\min_{i=1}^{n}\lambda_{BP}^{i}+(1-P(D_j|[x]_R))\min_{i=1}^{n}\lambda_{BN}^{i}\\ \theta_{OD}(x)&=P(D_j|[x]_R)\min_{i=1}^{n}\lambda_{NP}^{i}+(1-P(D_j|[x]_R))\min_{i=1}^{n}\lambda_{NN}^{i}\end{aligned}\tag{16}$$

那么，乐观决策粗糙集的总决策代价如下：

$$COST_{OD}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{x\in\underline{A}_{OD}(D_j)}\sigma_{OD}(x)+\sum_{x\in BND_{OD}(D_j)}\tau_{OD}(x)+\sum_{x\in U-\overline{A}_{OD}(D_j)}\theta_{OD}(x)\Big)$$

定义 9　令 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵。$D=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 为由决策属性 D 导出的划分。悲观决策粗糙集的正域代价 $\sigma_{PD}(x)$、边界域代价 $\tau_{PD}(x)$、负域代价 $\theta_{PD}(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}\sigma_{PD}(x)&=P(D_j|[x]_R)\max_{i=1}^{n}\lambda_{PP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j|[x]_R))\max_{i=1}^{n}\lambda_{PN}^{i}\\ \tau_{PD}(x)&=P(D_j|[x]_R)\max_{i=1}^{n}\lambda_{BP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j|[x]_R))\max_{i=1}^{n}\lambda_{BN}^{i}\\ \theta_{PD}(x)&=P(D_j|[x]_R)\max_{i=1}^{n}\lambda_{NP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j|[x]_R))\max_{i=1}^{n}\lambda_{NN}^{i}\end{aligned}\tag{17}$$

那么，悲观决策粗糙集的总决策代价如下：

$$COST_{PD}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{x\in\underline{A}_{PD}(D_j)}\sigma_{PD}(x)+\sum_{x\in BND_{PD}(D_j)}\tau_{PD}(x)+\sum_{x\in U-\overline{A}_{PD}(D_j)}\theta_{PD}(x)\Big)$$

定义 10　令 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant 1$，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 n 个不同的代价矩阵。$D=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 为由决策属性 D 导出的划分。可变多重代价决策粗糙集的正域代价 $\sigma_{VD}^{\rho}(x)$、边界域代价 $\tau_{VD}^{\rho}(x)$、负域代价 $\theta_{VD}^{\rho}(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}\sigma_{VD}^{\rho}(x)&=\frac{1}{n}(P(D_j|[x]_R)\sum_{i=1}^{n}\lambda_{PP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j|[x]_R))\sum_{i=1}^{n}\lambda_{PN}^{i})\\ \tau_{VD}^{\rho}(x)&=\frac{1}{n}(P(D_j|[x]_R)\sum_{i=1}^{n}\lambda_{BP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j|[x]_R))\sum_{i=1}^{n}\lambda_{BN}^{i})\\ \theta_{VD}^{\rho}(x)&=\frac{1}{n}(P(D_j|[x]_R)\sum_{i=1}^{n}\lambda_{NP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j|[x]_R))\sum_{i=1}^{n}\lambda_{NN}^{i})\end{aligned}\tag{18}$$

那么，可变多重代价决策粗糙集的总决策代价如下：

$$COST_{VD}^{\rho}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{x\in\underline{A}_{VD}^{\rho}(D_j)}\sigma_{VD}^{\rho}(x)+\sum_{x\in BND_{VD}^{\rho}(D_j)}\tau_{VD}^{\rho}(x)+\sum_{x\in U-\overline{A}_{VD}^{\rho}(D_j)}\theta_{VD}^{\rho}(x)\Big)$$

定义 11 令 $I=\langle U,AT\rangle$ 为一信息系统，$0<\rho\leqslant1$，B_1，B_2，…，B_n 为 n 个不同的代价矩阵，其相应的权重为 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=1$ 且 $\theta_i>0$。$D=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$ 为由决策属性 D 导出的划分。加权多重代价决策粗糙集的正域代价 $\sigma_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)$、边界域代价 $\tau_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)$、负域代价 $\theta_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)$ 如下：

$$\begin{aligned}\sigma_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)&=P(D_j\mid[x]_R)\sum_{i=1}^{n}\theta_i\lambda_{PP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j\mid[x]_R))\sum_{i=1}^{n}\theta_i\lambda_{PN}^{i}\\\tau_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)&=P(D_j\mid[x]_R)\sum_{i=1}^{n}\theta_i\lambda_{BP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j\mid[x]_R))\sum_{i=1}^{n}\theta_i\lambda_{BN}^{i}\\\theta_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)&=P(D_j\mid[x]_R)\sum_{i=1}^{n}\theta_i\lambda_{NP}^{i}+\\&\quad(1-P(D_j\mid[x]_R))\sum_{i=1}^{n}\theta_i\lambda_{NN}^{i}\end{aligned}\tag{19}$$

那么，可变多重代价决策粗糙集的总决策代价如下：

$$COST_{MD}^{(\theta,\rho)}=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{x\in\underline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(D_j)}\sigma_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)+\sum_{x\in BND_{MD}^{(\theta,\rho)}(D_j)}\tau_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)+\sum_{x\in U-\overline{A}_{MD}^{(\theta,\rho)}(D_j)}\theta_{MD}^{(\theta,\rho)}(x)\Big)$$

那么易得，$COST_{OD}\leqslant COST_{MD}^{(\theta,\rho)}\leqslant COST_{PD}$，$COST_{OD}\leqslant COST_{VD}^{\rho}\leqslant COST_{PD}$。

因而，加权多重代价决策粗糙集、可变多重代价决策粗糙集的代价风险指标是介于乐观决策粗糙集和悲观决策粗糙集的相应代价风险指标之间的。

4 实验分析

为了检验加权多重代价决策粗糙集的相关性质，选用UCI数据集进行仿真实验，数据描述如表1所列。若数据集中含有多个决策类，则将多个决策类看作多个2类问题进行解决[14-15]。为贴近实际情况，采用正态分布生成代价矩阵，假定正确分类时没有代价，即 $\lambda_{PP}^{i}=\lambda_{NN}^{i}=0$[16]。权重 $\theta_1=(1/n,1/n,\cdots,1/n)$，$\theta_2$ 通过AHP方法[10]得出。

表1 数据描述

数据集	样本个数	条件属性	决策类别
statlog (Australian Credit Approval)	690	14	2
breast cancer wisconsin	699	10	2
page-blocks	5473	10	5

实验首先选取了20个代价矩阵，对statlog，breast cancer wisconsin数据集分别计算乐观和悲观决策粗糙集，可变多重代价决策粗糙集和加权多重代价决策粗糙集的下、上近似的样本个数，如表2、表3所列。在此基础上，根据相应的数据集的真实类别，将其与特定的决策粗糙集模型预测类别组合划分为真正例、假正例、真反例、假反例4种情形，分别用TP，FP，TN，FN表示[17]。划分矩阵如表4所列。

那么，查全率 P 与查准率 R 分别定义为：

$$P=\frac{TP}{TP+FP}\qquad R=\frac{TP}{TP+FN}\tag{20}$$

表2 statlog数据集上的计算结果

	决策类 D_1		决策类 D_2	
	下近似	上近似	下近似	上近似
乐观决策粗糙集	408	598	226	575
悲观决策粗糙集	115	464	92	282
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	172	556	122	514
加权多重代价决策粗糙集($\rho\to0,\theta=\theta_1$)	408	598	226	575
加权多重代价决策粗糙集($\rho=1,\theta=\theta_1$)	115	464	92	282
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_1$)	172	556	122	514
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	176	568	134	518
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	252	587	182	528
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	152	503	92	365

表3 breast cancer wisconsin的计算结果

	决策类 D_1		决策类 D_2	
	下近似	上近似	下近似	上近似
乐观决策粗糙集	455	464	238	385
悲观决策粗糙集	314	461	235	244
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	455	464	235	244
加权多重代价决策粗糙集($\rho\to0,\theta=\theta_1$)	455	464	238	385
加权多重代价决策粗糙集($\rho=1,\theta=\theta_1$)	314	461	235	244
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_1$)	455	464	235	244
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	455	464	235	244
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	455	464	238	244
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	455	461	235	244

表4 划分矩阵

真实情况	预测结果	
	正例	反例
正例	TP(真正例)	FN(假反例)
反例	FP(假正例)	TN(真反例)

计算模型在不同数据集下的分类性能度量(查准率、查全率)，如表5－表8所列。然后，计算3组数据集上的近似分类质量，如表9、表10所列；计算3组数据集上的属性依赖度，如图1所示。最后，实验选取了210个代价矩阵来分别计算3组数据集在不同模型下的总决策代价。代价矩阵的数目以20为基数依次递增，结果如图2所示。

表5 statlog决策类 D_1 的查准率、查全率

	下近似		上近似	
	查准率	查全率	查准率	查全率
乐观决策粗糙集	0.762	0.812	0.640	1.000
悲观决策粗糙集	1.000	0.300	0.731	0.885
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	0.971	0.436	0.676	0.982
加权多重代价决策粗糙集($\rho\to0,\theta=\theta_1$)	0.762	0.812	0.640	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=1,\theta=\theta_1$)	1.000	0.300	0.731	0.885
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_1$)	0.971	0.436	0.676	0.982
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	0.762	0.812	0.640	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	1.000	0.300	0.731	0.885
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	0.971	0.436	0.676	0.982

表 6　statlog 决策类 D_2 的查准率、查全率

	下近似		上近似	
	查准率	查全率	查准率	查全率
乐观决策粗糙集	0.805	0.593	0.534	1.000
悲观决策粗糙集	1.000	0.300	0.745	0.684
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	0.967	0.384	0.586	0.980
加权多重代价决策粗糙集($\rho\to0,\theta=\theta_1$)	0.805	0.593	0.534	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=1,\theta=\theta_1$)	1.000	0.300	0.745	0.684
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_1$)	0.967	0.384	0.586	0.980
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	0.967	0.384	0.586	0.980
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	0.868	0.515	0.576	0.990
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	1.000	0.300	0.674	0.801

表 7　breast cancer wisconsin 决策类 D_1 的查准率、查全率

	下近似		上近似	
	查准率	查全率	查准率	查全率
乐观决策粗糙集	0.998	0.991	0.987	1.000
悲观决策粗糙集	1.000	0.686	0.991	0.998
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	0.998	0.991	0.987	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho\to0,\theta=\theta_1$)	0.998	0.991	0.987	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=1,\theta=\theta_1$)	1.000	0.686	0.991	0.998
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_1$)	0.998	0.991	0.987	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	0.998	0.991	0.987	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	0.998	0.991	0.987	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	0.998	0.991	0.991	0.998

表 8　breast cancer wisconsin 决策类 D_2 的查准率、查全率

	下近似		上近似	
	查准率	查全率	查准率	查全率
乐观决策粗糙集	0.996	0.983	0.626	1.000
悲观决策粗糙集	1.000	0.975	0.984	0.996
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	1.000	0.975	0.984	0.996
加权多重代价决策粗糙集($\rho\to0,\theta=\theta_1$)	0.996	0.983	0.626	1.000
加权多重代价决策粗糙集($\rho=1,\theta=\theta_1$)	1.000	0.975	0.984	0.996
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_1$)	1.000	0.975	0.984	0.996
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	1.000	0.975	0.984	0.996
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	0.996	0.983	0.984	0.996
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	1.000	0.975	0.984	0.996

表 9　两组数据集的近似分类质量

	statlog (Australian Credit Approval)		breast cancer wisconsin	
	决策类 D_1	决策类 D_2	决策类 D_1	决策类 D_2
乐观决策粗糙集	0.5913	0.3275	0.6509	0.3405
悲观决策粗糙集	0.1667	0.1333	0.4491	0.3362
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	0.2493	0.1767	0.6509	0.3362
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	0.3652	0.2638	0.6509	0.3405
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	0.2551	0.1942	0.6509	0.3362
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	0.2203	0.1333	0.6509	0.3362

表 10　page-blocks 的近似分类质量

	决策类 D_1	决策类 D_2	决策类 D_3	决策类 D_4	决策类 D_5
乐观决策粗糙集	0.9300	0.0164	0.0026	0.0005	0.0046
悲观决策粗糙集	0.1465	0.0126	0.0026	0.0005	0.0013
可变多重代价决策粗糙集(ρ=0.5)	0.8779	0.0155	0.0026	0.0005	0.0046
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.2,\theta=\theta_2$)	0.9105	0.0155	0.0026	0.0005	0.0046
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.5,\theta=\theta_2$)	0.8779	0.0155	0.0026	0.0005	0.0046
加权多重代价决策粗糙集($\rho=0.8,\theta=\theta_2$)	0.8211	0.0155	0.0026	0.0005	0.0037

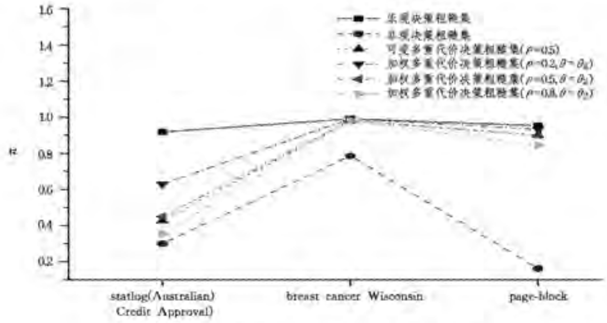
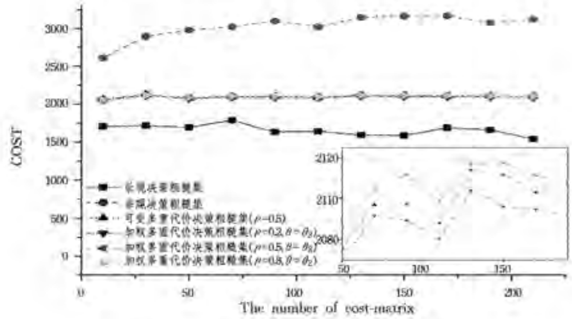
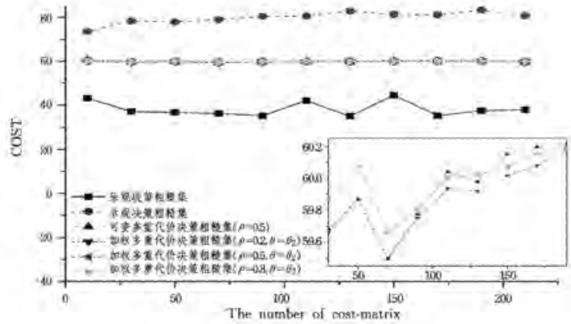


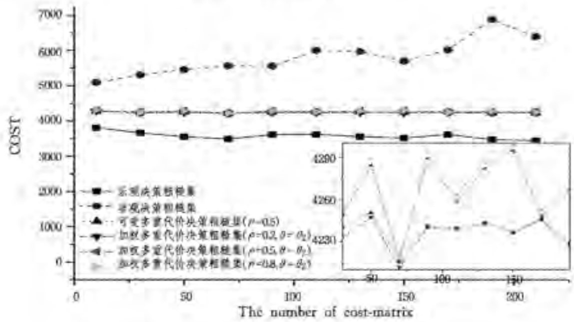
图 1　3 组数据集上属性依赖度的对比



(a) statlog (Australian Credit Approval)



(b) breast cancer Wisconsin



(c) page-blocks

图 2　3 组数据集上总决策代价的计算结果

实验结果表明：1）当 $\theta_i=(1/n,1/n,\cdots,1/n)$ 时，加权多重代价决策粗糙集与可变多重代价决策粗糙集上、下近似等价。$\rho\to0$ 时，加权多重代价决策粗糙集与乐观决策粗糙集上、下近似等价。当 $\rho=1$ 时，加权多重代价决策粗糙集与悲观决策粗糙集上、下近似等价。2）加权多重代价决策粗糙集和可变多重代价决策粗糙集的各度量、分类性能度量（查准率、查全率）、代价风险指标是介于乐观决策粗糙集和悲观决策粗糙集的相应度量、代价风险指标之间的。加权多重代价决策粗糙集、可变多重代价决策粗糙集的各度量、代价风险指标之间没有确定的大小关系。3）随着代价数量的增加，加权多重代价决策粗糙集模型的总决策代价基本稳定。

结束语 在决策粗糙集的相关研究中，如何确定阈值是一个关键性问题，而多重代价决策方法是解决该问题的一种重要手段。本文通过改进现有多重代价决策粗糙集方法，提出了一种基于多重代价加权的决策粗糙集模型，其可以满足特定环境下的应用需求。在此基础上，分析了加权多重代价决策粗糙集与现有模型的关系，并讨论了其性质、度量、代价风险，丰富和发展了决策粗糙集理论。该方法可以应用于目标识别、战场态势评估等领域的多专家决策问题。下一步将继续研究满足特定需求的多重代价融合方法和相应的决策规则、属性约简。

参 考 文 献

[1] YAO Y Y,WONG S K M,LINGRAS P. A decision-theoretic rough set model[C]// Raszw, Zemankovam. Proceedings of the 5th International Symposium on Methodologies for Intelligent Systems. North-Holland,1990:17-25.

[2] PAWLAK Z. Rough sets [J]. International Journal of Computer and Information Sciences,1982,11(5):341-356.

[3] PAWLAK Z. Rudiments of rough sets [J]. Information Science, 2007,177(1):3-27.

[4] YU H, WANG G Y, YAO Y Y. Current research and future perspectives on decision-theoretic rough sets[J]. Chinese Journal of Computer,2015,38(8):1628-1639. (in Chinese)
于洪，王国胤，姚一豫. 决策粗糙集理论研究现状与展望[J]. 计算机学报，2015,38(8):1628-1639.

[5] YANG X P, YAO J T. A Multi-agent Decision-Theoretic Rough Set Model [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2010, 6401(2):711-718.

[6] YANG X P, YAO J T. Modeling Multi-agent Three-way Decisions with Decision-theoretic Rough Sets[J]. Fundamenta Informaticae,2012,115(2/3):157-171.

[7] MA X B,JU H R,YANG X B,et al. Multi-cost b ased decision-theoretic rough sets in complete information systems[J]. Journal of Nanjing University (Natural Sciences), 2015, 51(2): 335-342. (in Chinese)
马兴斌，鞠恒荣，杨习贝，等. 不完备信息系统中的多重代价决策粗糙集[J]. 南京大学学报（自然科学），2015,51(2):335-342.

[8] MA X B, YANG X B, QI Y, et al. Multicost Decision-theoretic rough sets based on maximal consistent blocks [M] // Rough Sets and Knowledge Technology. Shanghai: Springer, 2014: 824-833.

[9] DOU H L,YANG X B,SONG X N,et al. Decision-theoretic rough set:A multicost strategy [J]. Knowledge-Based Systems, 2016,91:71-83.

[10] LV Y J,CHENG H T,QIN J Y. Ranking method for AHP based on judgement credibility [J]. Control and Decision,2012, 27(5):787-791. (in Chinese)
吕跃进，程宏涛，覃菊莹. 基于判断可信度的层次分析排序方法[J]. 控制与决策，2012,27(5):787-791.

[11] TIAN J,ZHANG P Z,WANG K L,et al. The integrating model of expert's opinion based on delphi method [J]. System Engineering Theory and Practice,2004,24(1):55-62. (in Chinese)
田军，张朋柱，王刊良，等. 基于德尔菲法的专家意见集成模型研究[J]. 系统工程理论与实践，2004,24(1):55-62.

[12] ZHANG M,CHENG K,YANG X B,et al. Multigranulation rough set based on weighted granulations[J]. Control and Decision,2015,30(2):222-228. (in Chinese)
张明，程科，杨习贝，等. 基于加权粒度的多粒度粗糙集[J]. 控制与决策，2015,30(2):222-228.

[13] ZHANG M,TANG Z M,XU W Y,et al. Variable multigranulation rough set model[J]. PR & AI, 2012, 25(4): 709-720. (in Chinese)
张明，唐振民，徐维艳，等. 可变多粒度粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能，2012,25(4):709-720.

[14] LIU D,LI T R,LI H X. A multiple-category classification approach with decision-theoretic rough sets[J]. Fundamenta Informaticae,2012,115(2/3):173-188.

[15] YAO Y Y, ZHAO Y. Attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information Sciences, 2008, 178: 3356-3373.

[16] JIA X Y,TANG Z M,LIAO W H,et al. On an optimization representation of decision-theoretic rough set model[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2014,55:155-166.

[17] 周志华. 机器学习[M]. 北京：清华大学出版社，2016.