基于无网格压缩感知的DOA估计算法

张星航 郭 艳 李 宁 孙保明
(中国人民解放军理工大学通信工程学院 南京 210007)

摘 要 应用传统的压缩感知理论对天线阵列信号的波达方向(Direction-of-arrival,DOA)进行估计,存在基的失配问题。基于交替方向乘子法(Alternative Direction Method of Multiplier,ADMM)的无网格压缩感知(Grid-less Compressive Sensing)技术能够解决该问题,但仍存在收敛速度慢的缺陷。针对该缺陷,提出带自适应惩罚项的ADMM(ADMM with adaptive penalty,AP-ADMM)算法,即根据输入信号的噪声功率,自适应地选择惩罚项的初始值;同时在算法迭代求解的过程中,自适应地对目标函数的惩罚项进行调整。与传统算法相比,在保证收敛精度和DOA的恢复成功概率的条件下,带自适应惩罚项的ADMM算法收敛速率明显加快。仿真结果验证了新算法的有效性。

关键词 波达方向估计,无网格压缩感知,带自适应惩罚项的ADMM算法
中图法分类号 TP393 **文献标识码** A **DOI** 10.11896/j.issn.1002-137X.2017.10.019

DOA Estimating Algorithm Based on Grid-less Compressive Sensing

ZHANG Xing-hang GUO Yan LI Ning SUN Bao-ming
(Institute of Communication Engineering,PLA University of Science and Technology,Nanjing 210007,China)

Abstract The basis mismatch is existing in the DOA estimation problem by traditional compressive sensing theory. Applying the grid-less compressive sensing technology based on the ADMM algorithm is a wonderful solution,but the convergence rate of the traditional ADMM algorithm was low. To solve this problem,the AP-ADMM algorithm was proposed in this paper. According to the power of the input signals,the AP-ADMM algorithm is able to choose the original numerical value of the penalty adaptively. In addition,the proposed algorithm converges with the ite-rating adaptive penalty. The convergence rate of the proposed algorithm is much higher than the traditional ADMM algorithm. Meanwhile,the accuracy and the probability of successful restoration of the proposed algorithm are approximate with the the traditional ADMM algorithm. The simulation results demonstrate the efficiency of the proposed algorithm.

Keywords DOA,Grid-less compressive sensing,AP-ADMM algorithm

1 引言

众所周知,波达方向估计在通信、语音、雷达、声纳等方面都有着不可替代的作用。由于压缩感知技术具有独特的优势,其在空间谱估计问题中得到了广泛的应用。具体地说,压缩感知技术利用信号在空域中的稀疏性,只需要少量的观测数据就能够对信号实现重构,而且在信噪比(Signal to Noise Rate,SNR)较低、信源相关性较高的场合,算法仍然具有鲁棒性。然而,传统的超分辨算法,如基于信号子空间的多重信号分类(Multiple Signal Classification,MUSIC)算法[1]和旋转不变技术估计信号参数(Estimating Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques,ESPRIT)算法[2]等,并不具备这一优势。经过近年来的研究和发展,稀疏信号重构算法在小样本甚至单次快拍的情况下也能实现超分辨的DOA估计[3]。

在许多实际应用中,信号的参数空间是连续的。针对这一问题,传统压缩感知算法首先对连续参数空间进行离散化处理,将整个参数空间划分为有限个网格,并假设信号的参数能由某些网格点来表示[4]。理论上讲,过于密集的网格虽然能提升估计的精度,但同时也会使得基字典中相邻原子之间的相关性太强,使得字典的约束等容性(RIP性)下降,从而降低压缩感知的重构性能[5]。另外,信号的实际参数值很可能不会恰好落在离散的网格上[6-7],在这种情况下,假设的变换基则无法表示稀疏信号,研究者把这种现象称为基的失配(Basis Mismatch)。

针对该现象,有学者针对信号源偏离格点(off-grid)的现象进行了研究,并提出了基于off-grid的DOA估计算法[8]。贝叶斯压缩感知在这一领域也取得了广泛的应用[9-10]。与此同时,还有研究者找到了解决欠定线性逆问题的最佳凸启发式方法——采用原子范数来刻画信号特征,即直接在连续参数空间中寻找最少的原子来表示给定的信号,而无需对稀疏域进行离散化处理[11],并提出了无网格压缩感知,或者连续域压缩感知(Continuous Compressive Sensing,

到稿日期:2016-09-05 返修日期:2017-01-22 本文受国家自然科学基金(61571463,61371124,61272487,61472445,61201217)资助。
张星航(1992-),男,硕士生,主要研究方向为波束形成、压缩感知;**郭 艳**(1971-),女,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为波束形成、MIMO、认知网络、无线传感器网络定位,E-mail:guoyan_1029@sina.com;**李 宁**(1967-),男,硕士,副教授,硕士生导师,主要研究方向为Ad hoc网络、无线认知网络;**孙保明**(1989-),男,博士生,主要研究方向为信号处理、压缩感知。

CCS) 这一概念。原子范数的概念最先在文献[12]中被提出,它涵盖了许多常用范数,如 l_1 范数和核范数,其中 l_1 范数用于稀疏矢量估计[13],核范数用于低秩矩阵恢复[14]。原子范数的求解依赖于半定规划问题(Semi-Definite Programming,SDP),而半定规划问题是一个非光滑的凸优化问题。当天线阵规模较大时,凸优化方法存在复杂度高、收敛速度慢等问题。为此,许多学者采用一种更好的近似求解算法——ADMM 算法[15]来解决这个 SDP 问题。

ADMM 算法在压缩感知领域中取得了广泛的应用,比如图像处理[16]、信道估计[17]、无线传感器网络[18]等。这些研究仍然依赖于格点划分。近年来,相关研究已延伸到无网格压缩感知领域,如雷达成像[19-20]、加权原子范数最小化[21]等,其中文献[20]还证明了 ADMM 算法的性能优于贝叶斯压缩感知算法的。然而,目前在无网格压缩感知领域进行阵列信号处理时,ADMM 算法在迭代过程中采用的惩罚项是固定的,而非自适应的[19-21],以至于算法存在收敛速度偏慢的问题。对此,许多作者提出了改进方案。例如,通过迭代误差自适应调整惩罚项的大小[22],以及改变参数的迭代次序等[23]。然而,这些算法并没有利用信号中的一些信息对惩罚项的初始值进行自适应调整,从而进一步减少迭代次数。

文中针对 ADMM 算法迭代次数较多的问题提出一种带自适应惩罚项的 ADMM 算法,该算法既能根据信号噪声功率的变化自适应地选择惩罚项的初始值,又能根据迭代过程中的残差自适应地调整惩罚项的大小。在实验过程中,我们发现随着目标函数中的正则项和惩罚项取值的变化,算法的迭代次数也会发生变化。也就是说,当正则项的取值一定时,算法的迭代次数会随着惩罚项取值的变化而变化;同时,惩罚项存在一个最佳取值,使得算法的迭代次数最小,即正则项和惩罚项之间可能存在一定的函数关系。通过进一步探究,最终发现噪声的方差是影响惩罚项最佳取值的决定性因素,而信噪比和信号源的数目又会影响噪声方差的大小;天线阵元数目的变化只会影响算法的迭代次数,对惩罚项的最佳取值没有影响。最后,通过曲线拟合的方法,得到惩罚项的最佳取值随信号的噪声标准差变化的函数规律。利用这个规律可以自适应地选择惩罚项的初始值。

与此同时,我们利用文献[22]中算法的优势,根据迭代误差自适应调整惩罚项的大小。仿真结果表明,AP-ADMM 算法的迭代次数明显降低;同时,算法的误差和恢复性能与传统 ADMM 算法相当。可见,该算法在降低迭代次数的同时维持了良好的性能。

2 基于无网格压缩感知的 DOA 估计问题求解

2.1 原始问题的求解

假设一线型天线阵列(Uniform Linear Array,ULA)的阵元数为 M,信号 $y\in R^M$ 是接收到的一组 M 维含噪声的信号,$x\in R^M$ 是无噪声信号。天线阵接收到的信号可以表示为:

$$y=x+w=A(\theta)S+w=\sum_{k=1}^{K}a(\theta_k)s_k+w \tag{1}$$

其中,$a(\theta_k)=[1,e^{j2\pi d\sin\theta_k/\lambda},\cdots,e^{j2\pi d(M-1)\sin\theta_k/\lambda}]^{\mathrm{T}}\in R^{M\times 1}$,$A(\theta)=[a(\theta_1),a(\theta_2),\cdots,a(\theta_K)]\in R^{M\times K}$,$K$ 为信源数,$s\in R^K$ 为原信号,$w\in R^M$ 是均值为 0,方差为 σ^2 的高斯白噪声信号。

令 $\mathscr{A}$ 为一个原子集合,该集合可以写成 $\mathscr{A}\overset{\triangle}{=}\{a(\theta_k):\theta\in[-90°,90°]\}$。若其凸包 $conv(\mathscr{A})$ 相对于原点是一个中心对称的紧集,且包含原点作为内点。a 为集合 $\mathscr{A}$ 中的原子,由此 $conv(\mathscr{A})=\{a:\|a\|_{\mathscr{A}}\leqslant 1\}$,$\mathscr{A}$ 包含了集合 $\{a:\|a\|_{\mathscr{A}}\leqslant 1\}$ 中所有的极点[8]。此时由凸包 $conv(\mathscr{A})$ 的尺度函数定义的范数为原子范数,用 $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ 表示,则有

$$\|x\|_{\mathscr{A}}=\inf\{t>0:x\in t\cdot conv(\mathscr{A})\} \tag{2}$$

文献[24]将原子范数最小化问题描述为半定规划问题。然后进行求解,重构稀疏信号(无噪声信号)的估计 $\hat{x}$。该问题的函数表达式为:

$$\min_{x,u,t}\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2+\frac{\tau}{2}(t+u_1)\quad \text{s.t.}\begin{bmatrix}T(u) & x\\ x^H & t\end{bmatrix}\geqslant 0,$$
$$T(u)\geqslant 0 \tag{3}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量或矩阵的 l_2 范数,正则项 τ 的表达式为:

$$\tau=\sigma(1+\frac{1}{\log(M)})\sqrt{M\log(M)+M\log(4\pi\log(M))} \tag{4}$$

另外,$u\in R^{M\times 1}$,$T(u)\in R^{M\times M}$ 表示 Toeplitz 矩阵:

$$T(u)=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_M\\ u_2^H & u_1 & \cdots & u_{M-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_M^H & u_{M-1}^H & \cdots & u_1\end{bmatrix} \tag{5}$$

其中,u_j 表示 u 的第 j 个值。

式(3)可以直接通过 CVX 工具包求解,但在天线阵规模较大时,算法收敛速度会很慢。为此,诸多学者使用基于 ADMM 的一阶算法来求解。该算法引入拉格朗日乘子 Λ,其函数表达式为拉格朗日函数的形式:

$$\mathscr{L}(t,u,x,\Lambda,Z)=\frac{1}{2}\|x-y\|_2^2+\frac{\tau}{2}(t+u_1)+\langle\Lambda,Z-\begin{bmatrix}T(u) & x\\ x^H & t\end{bmatrix}\rangle+\frac{\rho}{2}\|Z-\begin{bmatrix}T(u) & x\\ x^H & t\end{bmatrix}\|_F^2 \tag{6}$$

其中,$\langle\cdot\rangle$ 表示向量或者矩阵的内积,则 $\langle\Lambda,Z-\begin{bmatrix}T(u) & x\\ x^H & t\end{bmatrix}\rangle=\mathrm{tr}(\Lambda^H\cdot(Z-\begin{bmatrix}T(u) & x\\ x^H & t\end{bmatrix}))$,$\|\cdot\|_F$ 表示向量或矩阵的 Frobenius 范数,$\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹,$(\cdot)^H$ 表示向量或矩阵的共轭转置。参数 (t,u,x,Z,Λ) 按照如式迭代更新:

$$\begin{aligned}&(t^{l+1},u^{l+1},x^{l+1})\leftarrow\arg\min_{t,u,x}\mathscr{L}(t,u,x,Z^l,\Lambda^l)\\ &Z^{l+1}\leftarrow\arg\min_{Z\geqslant 0}\mathscr{L}(t^{l+1},u^{l+1},x^{l+1},Z,\Lambda^l)\\ &\Lambda^{l+1}\leftarrow\Lambda^l+\rho(Z^{l+1}-\begin{bmatrix}T(u^{l+1}) & x^{l+1}\\ x^{l+1H} & t^{l+1}\end{bmatrix})\end{aligned} \tag{7}$$

以上参数的闭式解在文献[24]中给出。

2.2 对偶问题的求解

对于每种范数来说都有相应的对偶范数,原子范数的对偶范数等价于原子集合 $\mathscr{A}$ 的支撑集函数,即:

$$\|z\|_{\mathscr{A}}^*=\sup_{\|a\|_{\mathscr{A}}\leqslant 1}\langle z,x\rangle_R=\sup_{a\in\mathscr{A}}\langle z,a\rangle_R \tag{8}$$

其中，$\langle z,a\rangle_R$ 表示内积的实部。求解原子范数最小化问题的对偶问题，实质上就是求解原子范数的对偶范数的最大化问题。我们以这种方法求解，能够得到更加接近于原始信号的角度支撑集，完成 DOA 估计。式(3)的对偶问题可以表示为：

$$\max_z \frac{1}{2}(\|y\|_2^2-\|y-z\|_2^2) \quad \text{s.t. } \|z\|_{\mathscr{A}}^* \leqslant \tau \tag{9}$$

原始和对偶问题之间存在强对偶性，这意味着，$\hat{x}$，$\hat{z}$分别是原始和对偶问题的最优解。二者的关系为：1) $y=\hat{x}+\hat{z}$；2) $\langle \hat{z},\hat{x}\rangle_R=\tau\|x\|_{\mathscr{A}}$，其中$\hat{z}$满足[24]

$$\begin{cases}\langle \hat{z},a\rangle_R=\tau, & a\in\mathscr{A}\\ |\langle \hat{z},a\rangle_{\mathscr{A}}|<\tau, & a\notin\mathscr{A}\end{cases} \tag{10}$$

也就是说，在此问题中，$\langle \hat{z},a\rangle_R$的最大值等于正则项 τ。即通过计算$\langle \hat{z},a\rangle_R$，当结果等于正则项 τ 时，则认为 a 是集合 $\mathscr{A}$ 中的原子，即信号 x 的角度分量。利用这种方法进行求解，在信噪比较高的条件下，可得到更加接近于原始信号的角度支撑集。

3　AP-ADMM 算法

3.1　最少迭代次数与惩罚项之间的关系

在实验过程中，发现随着参数 τ 和惩罚项 ρ 取值的变化，算法的迭代次数也会随之变化。换句话说，当参数 τ 一定时，算法的迭代次数会随着参数 ρ 取值的变化而变化。这一规律已在图 1 中给出。在信噪比为 0dB，阵元数为 64，信源数为 4 的条件下，经过 100 次仿真，迭代次数随惩罚项 ρ 的变化趋势如图 1 所示。其中，信噪比与噪声标准差 σ 的关系为 $SNR=10\ln(\frac{K}{10\sigma^2})$。当 ρ 取 4 或者 4.5 时，迭代次数最少。因此，在上述实验条件下，ρ 的最佳取值在区间[4，4.5]之内。由此可见，当参数 τ 一定时，ρ 存在一个最佳取值使得算法的迭代次数最小。

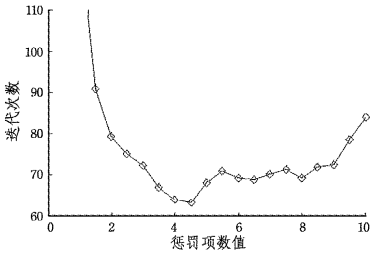


图 1　迭代次数随惩罚项 ρ 的变化趋势

由式(4)可知，正则项 τ 与阵元数 M、噪声的标准差 σ 有关。由此推断，ρ 的最佳取值可能与阵元数 M、信源数 K、噪声的标准差 σ 中的一个或者几个参量有关。通过进一步探究发现，ρ 的最佳取值与阵元数 M、信源数 K 无关，只与噪声的标准差 σ 有关。阵元数 M 的增加会导致接收信号维度的增加，但也只能影响算法的收敛次数，不影响 ρ 的最佳取值。

不论阵元数 M、信源数 K 取何值，随着信噪比的逐渐增大，ρ 的最佳取值都会逐渐减小，并同时呈现负指数函数和高次函数的规律。因此，假设 ρ 与 σ 的函数关系为：

$$\rho=f(\sigma)=\sum_{n=0}^{m}a_n(k\cdot b^{\sigma})^n \tag{11}$$

通过曲线拟合的方法，最终确定了这些系数：$m=3$，$a_0=0.664$，$a_1=8.265$，$a_2=-5.876$，$a_3=1.483$，$k=7.52$，$b=0.06$。随着 M，K 取值的改变，这些系数依然不变，这个规律依然成立。根据这些系数能够绘制出 $\rho=f(\sigma)$函数曲线。当 $M=64$，$K=4$ 时，在 (−20dB，20dB) 区间内，ρ 的实际最佳取值与根据式(11)计算的 ρ 的取值的对比如图 2 所示。

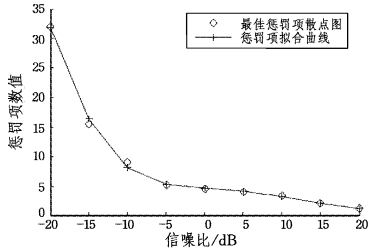


图 2　惩罚项拟合曲线与最佳惩罚项的对比

由图 2 可以看出，两者相差很小。因此，可以利用式(11)得出不同信噪比条件下的最佳惩罚项 ρ。

由此，确定了 σ 和 ρ 之间的函数关系，即可以利用 σ 求得最佳惩罚项 ρ。σ 决定了 ρ 的大小，而 σ 与两个变量 K 和 SNR 有关。在实际环境中，信源数 K 和信噪比 SNR 往往是未知的，而阵元数 M 是已知的，所以 σ 只能通过 τ 求得。

3.2　惩罚项的迭代

为进一步减小 ADMM 算法的迭代次数，在前一部分的基础上，改进了带自适应惩罚项的 ADMM 算法，即根据迭代过程中的残差自适应地调整惩罚项。已有的理论研究表明，如果提前确定惩罚项系数，则系数过大或者过小都将使整个算法的收敛速度下降。因此希望惩罚项系数是自适应的，即依据算法当前的残差，更新惩罚项系数 ρ。下式给出了 ρ 的迭代规则：

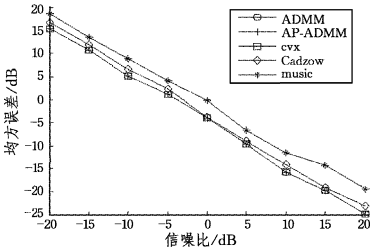
$$\rho=\begin{cases}\min(1.1\rho,\rho_{\max}), & r^l>\mu\cdot s^l\\ \max(0.9\rho,\rho_{\min}), & s^l>\mu\cdot r^l\end{cases} \tag{12}$$

其中，$\rho_{\min}=0.5\rho_0$，$\rho_{\max}=2\rho_0$，ρ_0 为惩罚项的初始值。通过设置惩罚项的上限 $\rho_{\max}$，避免惩罚项数值过大，导致算法不能收敛；通过设置下限 $\rho_{\min}$，避免惩罚项数值过小，导致在算法接近全局最优解的时候，迭代速度过慢，从而影响到算法的收敛速度。r^l为迭代残差，s^l为对偶残差[15]。μ 为误差更新门限，即当迭代误差 r^l大于对偶误差 s^l的 μ 倍，或者当对偶误差 s^l 大于迭代误差 r^l的 μ 倍时，惩罚项才会更新。这种改进方式同时考虑了自适应惩罚项的上限 $\rho_{\max}$、下限 $\rho_{\min}$、误差更新门限 μ，因此算法不仅能够避免陷入局部最优解，还具备更快的收敛速度。

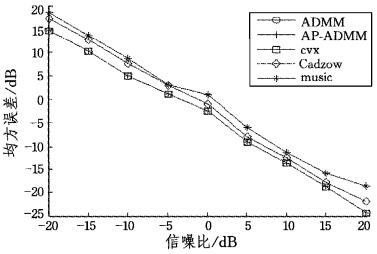
4　仿真分析

在仿真过程中，将带自适应惩罚项的 ADMM 算法在均方误差(Mean Square Error，MSE)、迭代次数、恢复成功概率等方面与相关算法进行了比较。所有仿真实验重复 100 次，并且对结果取平均值。其中，μ 的取值为 2。输入信号信噪比为−20～20dB。

图 3 示出了不同算法的 SNR-MSE 曲线。随着信噪比不断增大，各算法的均方误差曲线均呈下降趋势，信噪比每增加 5dB，各算法的均方误差下降约 5dB。其中凸优化算法、ADMM 算法和 AP-ADMM 算法的误差相对较小，且比较接近。而 Cadzow[25] 算法的误差相对较大，与以上 3 种算法相比，其误差曲线高出 0～3dB 左右；相比之下，music[1] 算法的误差最大，其误差曲线与 Cadzow 算法相比，高出大约 0～3dB。另外，阵元数的变化对仿真结果基本没有影响。由此可见，凸优化算法、ADMM 算法和 AP-ADMM 算法的均方误差较小，且误差能够随着信噪比的增大而不断减小，性能相对优越。

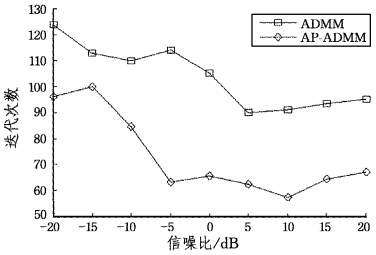


(a)天线阵元数为 64，目标数为 4

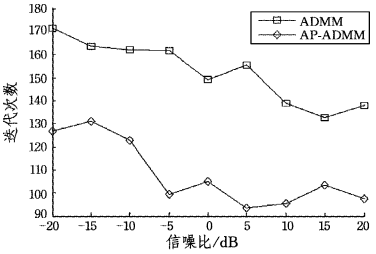


(b)天线阵元数为 100，目标数为 10

图 3 算法的均方误差随信噪比的变化曲线



(a)天线阵元数为 64，目标数为 4

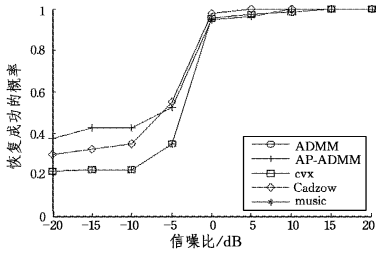


(b)天线阵元数为 100，目标数为 10

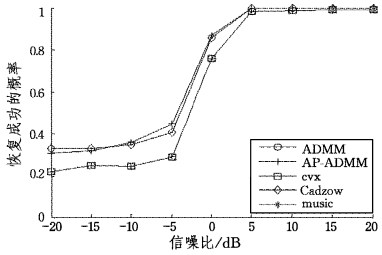
图 4 算法的迭代次数随信噪比变化的曲线。

从图 4 可以看出 ADMM 算法与 AP-ADMM 算法的迭代次数随信噪比的变化趋势，AP-ADMM 算法的收敛次数始终低于 ADMM 算法。图 4 中显示，随着信噪比的增加，ADMM 算法和 AP-ADMM 算法的平均收敛次数不断减少，并分别下降到一定的区间范围内。另外在图 4(b)中，两种算法在不同信噪比条件下的平均收敛次数均高于图 4(a)，这是因为天线阵元数的增加会导致接收信号维度的增加，从而导致算法收敛次数增加。总之，与 ADMM 算法相比，AP-ADMM 算法的迭代次数明显减少，具有更快的收敛速率。

由图 5 可知不同算法恢复成功的概率随信噪比的变化趋势。若恢复出的角度与对应的真实角度相比，误差低于0.2°，则视为恢复成功 1 次；如果误差大于 0.2°，则视为恢复失败。当信噪比低于－10dB 时，各个算法的成功恢复概率都很低，基本在 20%～40%左右；随着信噪比增加，其概率也逐渐增大。当信噪比达到 0dB 以上时，各算法恢复成功的概率达到 95%以上，基本上能够实现角度信息的完全恢复。另外，阵元数的变化对仿真结果基本没有影响。总体而言，AP-ADMM 算法、传统的 ADMM 算法和凸优化算法的恢复性能十分接近。在低信噪比条件下，这 3 种算法的恢复性能较弱；而当信噪比较高时，各个算法的恢复性能大体相当。



(a)天线阵元数为 64，目标数为 4



(b)天线阵元数为 100，目标数为 10

图 5 算法恢复成功的概率随信噪比的变化曲线

结束语 文中提出了带自适应惩罚项的 ADMM 算法。该算法根据输入信号的噪声功率，自适应地选择惩罚项的初始值，并且根据收敛过程中的残差，自适应地调整惩罚项的大小。仿真结果显示，该算法能够保证其收敛性能，不论是信号恢复的准确性，还是角度信息恢复成功的概率，都与传统的 ADMM 算法相近。同时，该算法的收敛速度比传统的 ADMM 算法更快。因此，带自适应惩罚项的 ADMM 算法的收敛速度更快，能够实现高效的信号重构，进而实现高效精确的 DOA 估计。

参 考 文 献

[1] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.

[2] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995.

(下转第 133 页)

[7] ARZT S, RASTHOFER S, FRITZ C. FlowDroid: Precise context, flow, field, object-sensitive and lifecycle-aware taint analysis for Android apps[J]. ACM SIGPLAN Notices, 2014, 49(6): 259-269.

[8] LAM P, BODDEN E, LHOTÁK O. The Soot framework for Java program analysis: a retrospective[C]// Cetus Users and Compiler Infastructure Workshop (CETUS). 2012.

[9] LI L, BARTEL A, BISSYANDÉ T F. IccTA: Detecting inter-component privacy leaks in Android apps[C]// Proceedings of the 37th International Conference on Software Engineering. IEEE, 2015: 280-291.

[10] LI L, BARTEL A, KLEIN J, et al. Automatically Exploiting Potential Component Leaks in Android Applications[C]// 2014 IEEE 13th International Conference on Trust, Security and Privacy in Computing and Communications. IEEE, 2014.

[11] SCHUTTE J, TITZE D, DE FUENTES J M. AppCaulk: Data leak prevention by injecting targeted taint tracking into Android apps[C]// Trust, Security and Privacy in Computing and Communications (TrustCom). IEEE, 2014: 370-379.

[12] YANG W, XIAO X, ANDOWS B. AppContext: Differentiating malicious and benign mobile app behaviors using context[C]// Software Engineering (ICSE). IEEE, 2015: 303-313.

（上接第 102 页）

[3] HERMAN M A, STROHMER T. High-resolution radar via compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(6): 2275-2284.

[4] DUARTE M F, BARANIUK R G. Spectral compressive sensing [J]. Applied & Computational Harmonic Analysis, 2013, 35(1): 111-129.

[5] YANG Z, XIE L H. On gridless sparse methods for line spectral estimation from complete and incomplete data [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(12): 3139-3153.

[6] TANG G G, BHASKAR B N, SHAH P, et al. Compressed sensing off the grid [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(11): 7465-7490.

[7] CHI Y J, SCHARF L L, PEZESHKI A, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(5): 2182-2195.

[8] YANG X M, ZHENG Z, HU B. Off-grid DOA estimation of incoherently distributed non-circular sources via generalized approximate message passing [J]. IEEE Electronics Letters, 2016, 52(4): 262-264.

[9] ZHAO Y H, ZHANG L R, GU Y B. Array covariance matrix-based sparse bayesian learning for off-grid direction-of-arrival estimation [J]. IEEE Electronics Letters, 2006, 52(5): 401-402.

[10] WU X H, ZHU W P, YAN J. Direction of arrival estimation for off-grid signals based on sparse bayesian learning [J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(7): 2004-2016.

[11] CHEN X S, ZHANG X W, YANG J B, et al. How to solve basis-mismatch: From atomic norm to grid-less compressive sensing [J]. ACTA Automatica Sinica, 2016, 42(3): 335-346. (in Chinese)
陈栩杉，张雄伟，杨吉斌，等. 如何解决基失配问题：从原子范数到无网格压缩感知[J]. 自动化学报，2016，42(3)：335-346.

[12] CHANDRASEKARAN V, RECHT B, PARRILO P A, et al. The convex geometry of linear inverse problems [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2012, 12(6): 805-849.

[13] CANDÉS E, ROMBERGH J, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006, 59(8): 1207-1223.

[14] RECHT B, FAZEL M, PARRILO P. Guaranteed minimum rank solutions of matrix equations via nuclear norm minimization [J]. SIAM Review, 2010, 52(3): 471-501.

[15] BOYD S, PARIKH N, CHU B P E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers [J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2011, 3: 1-122.

[16] PHAM D S, VENKATESH S. Efficient algorithms for robust recovery of images from compressed data [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2013, 22(12): 4724-4737.

[17] SHEN C, CHANG T H, WANG K Y, et al. Distributed robust multi-cell coordinated beamforming with imperfect CSI: An ADMM approach [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(6): 2988-3003.

[18] LEINONEN M, CODREANU M, JUNTTI M. Distributed joint resource and routing optimization in wireless sensor networks via alternating direction method of multipliers [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2013, 12(11): 5454-5467.

[19] YANG L, ZHOU J X, XIAO H T. Super-resolution radar imaging using fast continuous compressed sensing [J]. IEEE Electronics Letters, 2015, 51(24): 2043-2045.

[20] YANG L, ZHOU J X, XIAO H T. Compressive high range resolution radar imaging based on continuous dictionary [C]// Proceedings of the IET International Radar Conference. Hangzhou, China, 2015: 1-5.

[21] YANG Z, XIE L H. Enhancing sparsity and resolution via reweighted atomic norm minimization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(4): 995-1006.

[22] WANG S L, LIAO L Z. Decomposition method with a variable parameter for a class of monotone variational inequality problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 109(2): 415-429.

[23] RUSZCZY′NSKI A. An augmented lagrangian decomposition method for block diagonal linear programming problems [J]. Operations Research Letters, 1989, 8(5): 287-294.

[24] BHASKAR B N, TANG G, RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation [J/OL]. https://people.eecs.berkeley.edu/~brecht/papers/12.Bha.EtAl.Denoising.pdf.

[25] CADZOW J. Signal enhancement: A composite property mapping algorithm [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, 36(1): 49-62.