区间集上的格蕴涵代数、FI-代数、MV-代数的研究

薛占熬 杜浩翠 尹昊喆 肖运花

（河南师范大学计算机与信息技术学院 新乡 453007）

摘 要 区间集是一个新的重要的研究方向，在近似推理、模糊控制等领域中有着广泛的应用。在区间集上，重新定义了区间蕴涵⇒，构造了格蕴涵代数，讨论了格蕴涵代数的一系列性质。同时在区间集上也重新定义了可换 FI-代数和 MV-代数，证明了格蕴涵代数、FI-代数和 MV-代数 3 种不同的代数系统是等价的。

关键词 区间集，格蕴涵代数，可换 FI-代数，MV-代数

中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Lattice Implication Algebras, FI-algebras, and MV-algebras Based on the Interval Sets

XUE Zhan-ao DU Hao-cui YIN Hao-zhe XIAO Yun-hua

(College of Computer and Information Technology, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract The interval sets are new important direction of the research, which have been widely applied in approximate reasoning, fuzzy control, and so on. In the interval sets, the new interval implication (⇒) was redefined, the lattice implication algebras was reconstructed and its properties were discussed. Meanwhile, commutative FI-algebras and MV-algebras also were redefined in the interval sets. Three different algebraic systems were proved to equivalence, which are lattice implication algebras, commutative FI-algebras and MV-algebras.

Keywords Interval sets, Lattice implication algebras, FI-algebras, MV-algebras

在日常生活中，有许多带有模糊信息的问题仅用点值很难表达其准确意义，如若用区间就能有效地表达其语义。而且用区间来处理模糊信息正是人脑潜意识处理不确定不完全信息的一种有效方法，也符合人类思维推的理过程。

目前国内外诸多学者对区间集、区间值模糊集和区间值直觉模糊集进行了深入研究，为研究区间值模糊逻辑提供了理论基础[1,2]。区间集作为一个新的重要的研究方向，在近似推理、模糊控制等领域中有着广泛的应用，其中文献[1]运用集合观点，对区间集的交并补运算及代数性质与代数结构进行了研究，但是他们对区间集的蕴涵算子及其性质的研究相对比较少，故对区间集的蕴涵算子及其代数结构有必要进行深入研究。

在本文中，我们首先根据 Stone 代数[3-5]以及文献[3]中的影射 $\varphi\rightarrow\psi=\varphi^{*}\vee\psi\vee(\varphi^{*}\wedge\psi^{*})$，在区间集上结合文献[1]中的包含序，用集合的观点重新定义了新的运算——区间蕴涵，然后重新构造了格蕴涵代数[6]，并讨论了其性质。其次，依据吴望名教授提出的 FI-代数概念[7-9]，在区间集上重新定义了 FI-代数，证明了格蕴涵代数与可换 FI-代数是等价的。然后根据文献[8]，对给出的不同 MV-代数，在区间集上重新进行定义。最后得出结果是：尽管在区间集上的格蕴涵代数、MV-代数与可换 FI-代数这 3 个代数结构定义形式不同，但经证明它们却是等价的。

1 基本理论

定义 1[1] 设 $\bar{A}=[A_l,A_r]$是一个区间集，其中 A_l,A_r 是任意集合且 $A_l\subseteq A_r$。区间集是用上下界集合对来表示的且其定义如下：设 U 为论域，2^U 是 U 的幂集，那么区间集上 2^U 的子集形式为：$\bar{A}=[A_l,A_r]=\{A\in 2^U\mid A_l\subseteq A\subseteq A_r\}$，称其为一个闭区间集。闭区间上的所有区间集的集合记为 $I(2^U)=\{[A_l,A_r]\mid A_l,A_r\subseteq U,A_l\subseteq A_r\}$。

说明：当 $A_l=A_r$ 时，区间集 $\bar{A}=[A_l,A_r]$成为普通集合 A，尤其全集为 $\bar{U}=[U,U]$，空集为 $\bar{\phi}=[\phi,\phi]$。

定义 2 设 $\bar{A},\bar{B}$ 是任意的区间集，那么区间集上的交、并、补、伪补与蕴涵的定义如下：

(1) $\bar{A}\Cap\bar{B}=[A_l\cap B_l,A_r\cap B_r]$；

(2) $\bar{A}\Cup\bar{B}=[A_l\cup B_l,A_r\cup B_r]$；

(3) $(\bar{A})^c=[U-A_r,U-A_l]$；

(4) $(\bar{A})^{*}=[U-A_l,U-A_l]$；

(5) $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=(\bar{A})^c\Cup\bar{B}\Cup((\bar{A})^{*}\Cap(\bar{B})^{c*})$。

定理 1 设 $\bar{A},\bar{B}$ 是任意的区间集，则区间补和区间伪补满足以下性质：

(1) $(\bar{A}\Cap\bar{B})^c=(\bar{A})^c\Cup(\bar{B})^c$；$(\bar{A}\Cup\bar{B})^c=(\bar{A})^c\Cap(\bar{B})^c$；

(2) $(\bar{A}\Cap\bar{B})^{*}=(\bar{A})^{*}\Cup(\bar{B})^{*}$；$(\bar{A}\Cup\bar{B})^{*}=(\bar{A})^{*}\Cap(\bar{B})^{*}$。

证明：由定义 2 得证。

到稿日期：2009-12-01 返修日期：2010-02-21 本文受河南省重点科技攻关项目(No. 092102210149)，河南省教育厅自然科学研究计划项目(No. 2009B520015)资助。

薛占熬(1963－)，男，博士，教授，主要研究方向为人工智能基础理论，E-mail：xuezhanao@163.com；杜浩翠(1986－)，女，硕士生，主要研究方向为区间值模糊理论；尹昊喆(1986－)，男，硕士生，主要研究方向为计算机音乐技术多媒体技术；肖运花(1986－)，女，硕士生，主要研究方向为模糊集理论。

定理 2 设 $\bar{A},\bar{B}$ 是任意的区间集，则区间值补 $(\bar{A})^c$，$(\bar{B})^c$ 和区间值伪补 $(\bar{A})^*$，$(\bar{B})^*$ 具有以下性质：

(1) $(\bar{A})^c \subseteq (\bar{A})^*$，$(\bar{A})^{**} \subseteq (\bar{A})^{c*}$；

(2) $(\bar{A})^{cc}=[A_l,A_r]$，$(\bar{A})^{ccc}=(\bar{A})^c$；

(3) $(\bar{A})^{c*}=[A_r,A_r]$，$(\bar{A})^{*c}=(\bar{A})^{**}=[A_l,A_l]$；

(4) $(\bar{A})^{c*c*}=(\bar{A})^{c*}=[A_r,A_r]$；

(5) $(\bar{A})^{cc*}=(\bar{A})^{*c*}=(\bar{A})^{***}=(\bar{A})^{**c}=(\bar{A})^{*cc}=(\bar{A})^*$；

(6) $(\bar{A})^{c*c}=(\bar{A})^{c**}=[U-A_r,U-A_r]$；

(7) $(\bar{A})^c \Cup (\bar{A})^*=(\bar{A})^*$，$(\bar{A})^c \Cap (\bar{A})^*=(\bar{A})^c$；

(8) $\bar{A}\Cup(\bar{A})^*=\bar{U}$，$\bar{A}\Cap(\bar{A})^c=\bar{\phi}$；

(9) $(\bar{A}\Cap\bar{B})^c=(\bar{A})^c\Cup(\bar{B})^c$，$(\bar{A}\Cup\bar{B})^c=(\bar{A})^c\Cap(\bar{B})^c$；

(10) $(\bar{A}\Cap\bar{B})^*=(\bar{A})^*\Cup(\bar{B})^*$，$(\bar{A}\Cup\bar{B})^*=(\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^*$。

证明：根据定义 2 容易得证。

注：由定义 2 和定理 2，区间蕴涵还可展为：$\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=[(U-A_r)\cup B_l\cup((U-A_l)\cap B_r),(U-A_l)\cup B_r]$，或 $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=[((U-A_l)\cup B_l)\cap((U-A_r)\cup B_r),(U-A_l)\cup B_r]$。为研究方便，把 $(\bar{A})^c\Rightarrow\bar{B}=[A_l\cup B_l\cup(A_r\cap B_r),A_r\cup B_r]$，$(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B})^c)^c=[A_l\cap B_l,A_r\cap B_r\cap(A_l\cup B_l)]=((\bar{A})^c\Delta(\bar{B})^c)^c$，分别记 $\bar{A}\Delta\bar{B}=(\bar{A})^c\Rightarrow\bar{B}$，$\bar{A}\otimes\bar{B}=((\bar{A})^c\Delta(\bar{B})^c)^c=(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B})^c)^c$。

定义 3 设 $\bar{A},\bar{B}$ 是任意的区间集，则在 $I(2^U)$ 上序关系 $\subseteq$ 的定义如下：

若 $\bar{A}\subseteq\bar{B}$，当且仅当 $A_l\subseteq B_l$ 和 $A_r\subseteq B_r$。

定理 3 在 $I(2^U)$ 上序关系 $\subseteq$ 偏序关系，$\langle I(2^U),\subseteq\rangle$ 是偏序集。

证明：根据定义 3 和偏序集的定义容易得证。

定理 4 如果 ^{c} 是 $I(2^U)\to I(2^U)$ 的一个逆序对合映射，即 1) $\bar{A}\subseteq\bar{B}$ 当且仅当 $(\bar{B})^c\subseteq(\bar{A})^c$；2) $(\bar{A})^{cc}=\bar{A}$，则称格 $\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*\rangle$ 为有余格。

证明：根据定理 2、定义 3 和文献[10]有余格的定义得证。

定理 5 $\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*\rangle$ 是有界的有余格。

证明：由定理 3、定理 4 易知，$\langle I(2^U),\subseteq\rangle$ 是具有最大元 $\bar{U}=[U,U]$ 和最小元 $\bar{\phi}=[\phi,\phi]$ 的有界格以及 $\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*\rangle$ 为有余格，则 $\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*\rangle$ 是有界的有余格。

命题 1 设 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 是任意的区间集，则 $\Rightarrow: I(2^U)\times I(2^U)\to I(2^U)$ 是一映射，且具有以下性质：

(1) $\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})=\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$；

(2) $\bar{A}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$；

(3) $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B})^c\Rightarrow(\bar{A})^c$；

(4) 若 $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=\bar{B}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$，则 $\bar{A}=\bar{B}$；

(5) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow\bar{A}$；

(6) $(\bar{A}\Cup\bar{B})\Rightarrow\bar{C}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})\Cap(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$；

(7) $(\bar{A}\Cap\bar{B})\Rightarrow\bar{C}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})\Cup(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$。

证明：(2)、(6)和(7)根据定义 2 和定理 2 容易得证。这里仅证明(1)、(3)、(4)和(5)。

(1) 因为

$\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$

$=(\bar{A})^c\Cup(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})^{c*})$

$=(\bar{A})^c\Cup((\bar{B})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*}))\Cup((\bar{A})^*\Cap((\bar{B})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*}))^{c*})$

$=(\bar{A})^c\Cup(\bar{B})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*})\Cup((\bar{A})^*\Cap((\bar{B})^*\Cup(\bar{C})^{c*}\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*})))$

$=(\bar{A})^c\Cup(\bar{B})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*})\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^*)\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{C})^{c*})\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*})$

$\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$

$=(\bar{B})^c\Cup(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})^{c*})$

$=(\bar{B})^c\Cup((\bar{A})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{C})^{c*}))\Cup((\bar{B})^*\Cap((\bar{A})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{C})^{c*}))^{c*})$

$=(\bar{B})^c\Cup(\bar{A})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{C})^{c*})\Cup((\bar{B})^*\Cap((\bar{A})^*\Cup(\bar{C})^{c*}\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{C})^{c*})))$

$=(\bar{A})^c\Cup(\bar{B})^c\Cup\bar{C}\Cup((\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*})\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^*)\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^{c*})\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^*\Cap(\bar{C})^{c*})$

所以，$\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})=\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$。

(3) $(\bar{B})^c\Rightarrow(\bar{A})^c=(\bar{B})^{cc}\Cup(\bar{A})^c\Cup((\bar{B})^{c*}\Cap(\bar{A})^{cc*})$

$=\bar{B}\Cup(\bar{A})^c\Cup((\bar{B})^c\Cap(\bar{A})^*)$

$=(\bar{A})^c\Cup\bar{B}\Cup((\bar{A})^*\Cap(\bar{B})^{c*})=\bar{A}\Rightarrow\bar{B}$

(4) 由

$\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=[(U-A_r)\cup B_l\cup((U-A_l)\cap B_r),(U-A_l)\cup B_r]$

$=[((U-A_r)\cup B_l\cup(U-A_l))\cap((U-A_r)\cup B_l\cup B_r),(U-A_l)\cup B_r]$

$=[(B_l\cup(U-A_l))\cap((U-A_r)\cup B_r),(U-A_l)\cup B_r]$

$=[U,U]$

知，$B_l\cup(U-A_l)=U$，$(U-A_r)\cup B_r=U$ 和 $(U-A_l)\cup B_r=U$，则有 $A_l\subseteq B_l$ 和 $A_r\subseteq B_r$。

因此，$\bar{A}\subseteq\bar{B}$。

同理，当 $\bar{B}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$ 时，有 $\bar{B}\subseteq\bar{A}$。

故，若 $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=\bar{B}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$，则 $\bar{A}=\bar{B}$。

(5) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}$

$=[(U-A_r)\cup B_l\cup((U-A_l)\cap B_r),(U-A_l)\cup B_r]\Rightarrow\bar{B}$

$=[(U-(U-A_l)\cup B_r)\cup B_l\cup(U-((U-A_r)\cup B_l\cup((U-A_l)\cap B_r))\cap B_r),(U-((U-A_r)\cup B_l\cup((U-A_l)\cap B_r))\cup B_r]$

$=[(A_l\cap(U-B_r))\cup B_l\cup(A_r\cap(U-B_l)\cap(A_l\cup(U-B_r))\cap B_r),(A_r\cap(U-B_l)\cap(A_l\cup(U-B_r)))\cup B_r]$

$=[(A_l\cap(U-B_r))\cup B_l\cup(A_r\cap(U-B_l)\cap A_l\cap B_r)\cup(A_r\cap(U-B_l)\cap(U-B_r)\cap B_r),(A_r\cup B_r)\cap((U-B_l)\cup B_r)\cap(A_l\cup(U-B_r)\cup B_r)]$

$=[(A_l\cap(U-B_r))\cup B_l\cup((U-B_l)\cap A_l\cap B_r),A_r\cup B_r]$

$=[(A_l\cap(U-B_r))\cup((B_l\cup(U-B_l))\cap(B_l\cup(A_l\cap B_r))),A_r\cup B_r]$

$=[(A_l\cap(U-B_r))\cup B_l\cup(A_l\cap B_r),A_r\cup B_r]$

$=[(A_l\cap((U-B_r)\cup B_r))\cup B_l,A_r\cup B_r]$

$=[A_l\cup B_l,A_r\cup B_r]=\bar{A}\Cup\bar{B}$

同理可证，$(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow\bar{A}=\bar{A}\Cup\bar{B}$。

故，$(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow\bar{A}$。

根据文献[6]格蕴涵代数概念，在区间集上对格蕴涵代数进行定义。

定义 4 设 $\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*\rangle$ 是一有界的有余格，$\Rightarrow: I(2^U)\times I(2^U)\to I(2^U)$ 是一映射，称 $\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$ 为一格蕴涵代数，对任意的区间集 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$ 有以下性质成立：

(1) $\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})=\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$；

(2) $\bar{A}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$；

(3) $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B})^c\Rightarrow(\bar{A})^c$；

(4) 若 $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=\bar{B}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$，则 $\bar{A}=\bar{B}$；

(5) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow\bar{A}$；

(6) $(\bar{A}\Cup\bar{B})\Rightarrow\bar{C}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})\Cap(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$;

(7) $(\bar{A}\Cap\bar{B})\Rightarrow\bar{C}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})\Cup(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$。

定理 6 如果$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$为一格蕴涵代数,则对于任意的区间集$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$,我们有以下结果成立:

(1) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}=\bar{A}\Cup\bar{B}$;

(2) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Cup(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})=\bar{U}$;

(3) $\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=\bar{U}$ 当且仅当$\bar{A}\subseteq\bar{B}$;

(4) $\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Cup\bar{C})=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Cup(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$;

(5) $\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Cap\bar{C})=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Cap(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$;

(6) $\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}=(\bar{A})^c$,$\bar{U}\Rightarrow\bar{A}=\bar{A}$。

证明:根据定义 4 容易得证。

2 区间集上的FI-代数、格蕴涵代数

根据文献[7-9]的FI-代数和交换FI-代数概念,在区间集$I(2^U)$上对这两个代数进行定义。

命题 2 在区间集上,代数系统$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$,满足以下性质:

(1) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow((\bar{B}\Rightarrow\bar{C})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C}))=\bar{U}$;

(2) $\bar{\phi}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$,其中,$\bar{U}=\bar{\phi}\Rightarrow\bar{\phi}$;

(3) $(\bar{A})^{\alpha}=\bar{A}$。

证明:(1) 根据定义 4 和定理 6,

$(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow((\bar{B}\Rightarrow\bar{C})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C}))$

$=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow((\bar{B}\Rightarrow\bar{C})\Rightarrow\bar{C}))$

$=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Cup\bar{C}))$

$=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow((\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Cup(\bar{A}\Rightarrow\bar{C}))$

$=((\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{B}))\Cup((\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C}))=\bar{U}$

(2)、(3)根据定义 2 易证。

定义 5 一个(2,0)型代数$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$称为区间集上的FI-代数,对任意的区间集$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$,满足:

(F1) $\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})=\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$;

(F2) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow((\bar{B}\Rightarrow\bar{C})\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C}))=\bar{U}$;

(F3) $\bar{A}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$;

(F4) 若$\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=\bar{B}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$,则$\bar{A}=\bar{B}$;

(F5) $\bar{\phi}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$,其中,$\bar{U}=\bar{\phi}\Rightarrow\bar{\phi}$。

定义 6 一个区间集上的FI-代数$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$称之为区间集上的可换FI-代数,对任意的区间集$\bar{A},\bar{B}$,如果还满足条件:

(F6) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow\bar{A}$。

定义 7 设$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$称为区间集上的FI-代数,对于任意的区间集$\bar{A}$,如果满足$(\bar{A})^{\alpha}=\bar{A}$,则称$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$为区间集上的正则FI-代数。

定理 7 设$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$是区间集的格蕴涵代数,对任意的区间集$\bar{A},\bar{B},\bar{C}$,下列性质成立:

(1) $(\bar{A})^c=\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}$;

(2) $\bar{A}\Cup\bar{B}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}$,$\bar{A}\Cap\bar{B}=((\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow(\bar{B})^c)^c$;

(3) 若$\bar{A}\subseteq\bar{B}$,则$\bar{C}\Rightarrow\bar{A}\subseteq\bar{C}\Rightarrow\bar{B}$,$\bar{B}\Rightarrow\bar{C}\subseteq\bar{A}\Rightarrow\bar{C}$。

证明:(1) 由定理 6(6)得$(\bar{A})^c=\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}$。

(2) $\bar{A}\Cup\bar{B}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Rightarrow\bar{B}$ 由定理 6(1)得证。因为 $\bar{B}\Rightarrow\bar{A}=[(U-B_r)\cup A_l\cup((U-B_l)\cap A_r),(U-B_l)\cup A_r]$ $(\bar{B})^c=[U-B_r,U-B_l]$,所以,

$(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow(\bar{B})^c$

$=[(U-((U-B_l)\cup A_r))\cup(U-B_r)\cup((U-((U-B_r)\cup A_l\cup((U-B_l)\cap A_r)))\cap(U-B_l)),(U-((U-B_r)\cup A_l\cup((U-B_l)\cap A_r)))\cup(U-B_l)]$

$=[(B_l\cap(U-A_r))\cup(U-B_r)\cup(B_r\cap(U-A_l)\cap(B_l\cup(U-A_r))\cap(U-B_l)),(B_r\cap(U-A_l)\cap(B_l\cup(U-A_r)))\cup(U-B_l)]$

由于上式比较长,所以分成两个子式进行证明。

子式一:

$(B_l\cap(U-A_r))\cup(U-B_r)\cup(B_r\cap(U-A_l)\cap(B_l\cup(U-A_r))\cap(U-B_l))$

$=(B_l\cap(U-A_r))\cup(U-B_r)\cup(B_r\cap(U-A_l)\cap B_l\cap(U-B_l))\cup(B_r\cap(U-A_l)\cap(U-A_r)\cap(U-B_l))$

$=(B_l\cap(U-A_r))\cup(U-B_r)\cup(B_r\cap(U-A_r)\cap(U-B_l))$

$=(B_l\cap(U-A_r))\cup(U-B_r)\cup((U-A_r)\cap(U-B_l))$

$=((U-A_r)\cap(B_l\cup(U-B_l)))\cup(U-B_r)$

$=(U-A_r)\cup(U-B_r)$

子式二:

$(B_r\cap(U-A_l)\cap(B_l\cup(U-A_r)))\cup(U-B_l)$

$=(B_r\cap(U-A_l)\cap B_l)\cup(B_r\cap(U-A_l)\cap(U-A_r))\cup(U-B_l)$

$=((U-A_l)\cap B_l)\cup(B_r\cap(U-A_r))\cup(U-B_l)$

$=(((U-A_l)\cup(U-B_l))\cap(B_l\cup(U-B_l)))\cup(B_r\cap(U-A_r))$

$=(U-A_l)\cup(U-B_l)\cup(B_r\cap(U-A_r))$

$=(U-A_l)\cup(U-B_l)$

所以,$(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow(\bar{B})^c=[(U-A_r)\cup(U-B_r),(U-A_l)\cup(U-B_l)]$,故

$((\bar{B}\Rightarrow\bar{A})\Rightarrow(\bar{B})^c)^c$

$=[U-((U-A_r)\cup(U-B_r)),U-((U-A_l)\cup(U-B_l))]$

$=[A_r\cap B_r,A_l\cap B_l]=\bar{A}\Cap\bar{B}$

(3) 因为$\bar{A}\subseteq\bar{B}$,所以 $A_l\subseteq B_l$,$A_r\subseteq B_r$。又因为$\bar{C}\Rightarrow\bar{A}=[(U-C_r)\cup A_l\cup((U-C_l)\cap A_r),(U-C_l)\cup A_r]=[((U-C_l)\cup A_l)\cap((U-C_r)\cup A_r),(U-C_l)\cup A_r]$,$\bar{C}\Rightarrow\bar{B}=[((U-C_l)\cup B_l)\cap((U-C_r)\cup B_r),(U-C_l)\cup B_r]$,所以,$(U-C_l)\cup A_l\subseteq(U-C_l)\cup B_l$,$(U-C_r)\cup A_r\subseteq(U-C_r)\cup B_r$,$(U-C_l)\cup A_r\subseteq(U-C_l)\cup B_r$。

所以,$((U-C_l)\cup A_l)\cap((U-C_r)\cup A_r)\subseteq((U-C_l)\cup B_l)\cap((U-C_r)\cup B_r)$,故得$\bar{C}\Rightarrow\bar{A}\subseteq\bar{C}\Rightarrow\bar{B}$。

同理可得,$\bar{B}\Rightarrow\bar{C}\subseteq\bar{A}\Rightarrow\bar{C}$。

综上所述,(3)成立。

定理 8 区间集的可换FI-代数和格蕴涵代数是等价的。

证明:由格蕴涵代数$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$和定理6、定理7容易证出可换FI-代数$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$;反之,由可换FI-代数$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$,根据定理7(1)、(2)和区间补^c、区间并$\Cap$、区间交$\Cup$,容易证出格蕴涵代数$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$。

3 区间集上的MV-代数、格蕴涵代数

根据文献[8]中的MV-代数概念,在区间集上对它进行定义。

定义 8 如果(2,1,0)型代数$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$是区间集的MV-代数,则满足如下条件:

(1) $\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$是以$\bar{\phi}$为单位的交换半群;

(2) $((\bar{A})^c)^c=\bar{A}$;

(3) $\bar{A}\Delta(\bar{\phi})^c=(\bar{\phi})^c$;

(4) $((\bar{A})^c\triangle\bar{B})^c\triangle\bar{B}=((\bar{B})^c\triangle\bar{A})^c\triangle\bar{A}$。

定义 9 如果(2,2,1,0,0)型代数$\langle I(2^U),\triangle,\otimes,{}^c,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$是区间集的 MV-代数,则满足如下条件:

(1) $\bar{A}\triangle\bar{B}=\bar{B}\triangle\bar{A}$;

(2) $(\bar{A}\triangle\bar{B})\triangle\bar{C}=\bar{A}\triangle(\bar{B}\triangle\bar{C})$;

(3) $\bar{A}\triangle\bar{\phi}=\bar{A}$;

(4) $\bar{A}\triangle\bar{U}=\bar{U}$;

(5) $\bar{A}\triangle(\bar{A})^c=\bar{U}$;

(6) $((\bar{A})^c)^c=\bar{A}$;

(7) $(\bar{\phi})^c=\bar{U}$;

(8) $((\bar{A})^c\triangle\bar{B})^c\triangle\bar{B}=((\bar{B})^c\triangle\bar{A})^c\triangle\bar{A}$;

(9) $\bar{A}\otimes\bar{B}=((\bar{A})^c\triangle(\bar{B})^c)^c$。

说明:因为定义 9(9)中的运算$\otimes$可以用$\triangle$和^{c}表示,且在定义 9(1)—(8)中并没有出现,所以不考虑其证明。定义 9(1)—(3)对应于定义 8(1),定义 9(6)为定义 8(2),定义 9(8)就是定义 8(4),且由定义 9(4)和定义 9(7)可推得定义 8(3)成立,所以要证明定义 8 和定义 9 等价,只需证定义 8 即可推得$\bar{A}\triangle(\bar{A})^c=\bar{U}$。因为$\bar{A}\triangle(\bar{A})^c=(\bar{A})^c\Rightarrow(\bar{A})^c=\bar{A}\Rightarrow\bar{A}=\bar{U}$,所以定义 9(5)成立。

故 MV-代数$\langle I(2^U),\triangle,{}^c,\bar{\phi}\rangle$和$\langle I(2^U),\triangle,\otimes,{}^c,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$是等价的。

定义 10 (2,2,2,2,0,0)型代数$\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\otimes,\Rightarrow,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$为区间集上的 MV-代数,则满足如下条件:

(1) $\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$是有界格;

(2) $\langle I(2^U),\otimes,\bar{U}\rangle$是以$\bar{U}$为单位的交换半群;

(3) $\langle\otimes,\Rightarrow\rangle$是$I(2^U)$上的伴随对;

(4) $\bar{A}\Cap\bar{B}=\bar{A}\otimes(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})$;

(5) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Cup(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})=\bar{U}$;

(6) $(\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi})\Rightarrow\bar{\phi}=\bar{U}$。

定理 9 在区间集上,MV-代数$\langle I(2^U),\triangle,{}^c,\bar{\phi}\rangle$和$\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\otimes,\Rightarrow,\bar{\varphi},\bar{U}\rangle$是等价的。

证明:(一)由$\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\otimes,\Rightarrow,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$证出$\langle I(2^U),\triangle,{}^c,\bar{\phi}\rangle$。

$\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\otimes,\Rightarrow,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$是定义 10 的 MV-代数,定义$(\bar{A})^c=\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}$,$\bar{A}\triangle\bar{B}=((\bar{A})^c\otimes(\bar{B})^c)^c$。

1) 由定义 10(2)知$\bar{A}\triangle\bar{\phi}=((\bar{A})^c\otimes(\bar{\phi})^c)^c=((\bar{A})^c\otimes\bar{U})^c=(\bar{A})^{cc}=\bar{A}$,所以$\bar{\phi}$是加法$\triangle$的单位。又由$\langle I(2^U),\otimes\rangle$是半群,可得:

$$\begin{aligned}(\bar{A}\triangle\bar{B})\triangle\bar{C}&=(((\bar{A})^c\otimes(\bar{B})^c)^{cc}\otimes(\bar{C})^c)^c\\&=(((\bar{A})^c\otimes(\bar{B})^c)\otimes(\bar{C})^c)^c=((\bar{A})^c\otimes((\bar{B})^c\otimes(\bar{C})^c))^c\\&=\bar{A}\triangle(\bar{B}\triangle\bar{C})\end{aligned}$$

因为$\bar{A}\triangle\bar{B}=(\bar{A})^c\Rightarrow\bar{B}$,根据定义 4(3),得$(\bar{A})^c\Rightarrow\bar{B}=(\bar{B})^c\Rightarrow((\bar{A})^c)^c=(\bar{B})^c\Rightarrow\bar{A}$,即$\bar{A}\triangle\bar{B}=\bar{B}\triangle\bar{A}$,所以$\triangle$满足交换律。

故$\langle I(2^U),\triangle,\bar{\phi}\rangle$是以$\bar{\phi}$为单位的交换半群,即定义 8(1)成立。

2) $(\bar{A})^{cc}=(\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi})^c=(\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi})\Rightarrow\bar{\phi}=\bar{A}$,定义 8(2)成立。

3) $\bar{A}\otimes\bar{B}\subseteq\bar{C}$当且仅当$(\bar{A}\otimes\bar{B})\Rightarrow\bar{C}=(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B})^c)^c\Rightarrow\bar{C}=(\bar{C})^c\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B})^c)=\bar{A}\Rightarrow((\bar{C})^c\Rightarrow(\bar{B})^c)=\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$当且仅当$\bar{A}\subseteq\bar{B}\Rightarrow\bar{C}$,故$\langle\otimes,\Rightarrow\rangle$是$I(2^U)$上的伴随对。又由$\bar{\phi}\subseteq\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}$,则得$\bar{\phi}\otimes\bar{A}=\bar{\phi}$,所以$\bar{A}\triangle(\bar{\phi})^c=((\bar{A})^c\otimes(\bar{\phi})^{cc})^c=((\bar{A})^c\otimes\bar{\phi})^c=(\bar{\phi})^c$,定义 8(3)成立。

4) 在定理 9(一)1)的证明中,知$\triangle$满足交换律与结合律,根据$\bar{A}\otimes\bar{B}=((\bar{A})^c\triangle(\bar{B})^c)^c$得$\otimes$满足交换律与结合律,所以$(\bar{D}\otimes\bar{A})\otimes\bar{B}\subseteq\bar{C}$等价于$\bar{D}\otimes(\bar{A}\otimes\bar{B})\subseteq\bar{C}$,又$\langle\otimes,\Rightarrow\rangle$是$I(2^U)$上的伴随对知,$\bar{D}\subseteq\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})$当且仅当$\bar{D}\subseteq\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$,则$\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\Rightarrow\bar{C})=\bar{B}\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{C})$,那么$(\bar{B})^c\Rightarrow(\bar{A})^c=(\bar{B})^c\Rightarrow(\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi})=\bar{A}\Rightarrow((\bar{B})^c\Rightarrow\bar{\phi})=\bar{A}\Rightarrow(\bar{B})^{cc}=\bar{A}\Rightarrow\bar{B}$。

由$(\bar{A})^c=\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}$,可知$^c:I(2^U)\to I(2^U)$是逆序的。

对于任意的区间集$\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}$,若$\bar{A}\subseteq\bar{B}$,$\bar{B}\otimes\bar{C}\subseteq\bar{D}$,则$\bar{A}\subseteq\bar{B}\subseteq\bar{C}\Rightarrow\bar{D}$,所以$\bar{A}\otimes\bar{C}\subseteq\bar{D}$,令$\bar{D}=\bar{B}\otimes\bar{C}$,可得$\bar{A}\otimes\bar{C}\subseteq\bar{B}\otimes\bar{C}$。若$\bar{A}\subseteq\bar{B}$,则得$\bar{A}\otimes(\bar{B}\Rightarrow\bar{\phi})\subseteq\bar{B}\otimes(\bar{B}\Rightarrow\bar{\phi})=\bar{B}\Cap\bar{\phi}=\bar{\phi}$,$\bar{B}\Rightarrow\bar{\phi}\subseteq\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi}$,即$(\bar{B})^c\subseteq(\bar{A})^c$,所以$^c:I(2^U)\to I(2^U)$是逆序对合对应的。

若$\bar{C}\subseteq\bar{A}\Rightarrow\bar{B}$,则$\bar{C}\otimes\bar{A}\subseteq\bar{B}$,$\bar{A}\subseteq\bar{C}\Rightarrow\bar{B}$,$\bar{A}\subseteq(\bar{B})^c\Rightarrow(\bar{C})^c$,$\bar{A}\otimes(\bar{B})^c\subseteq(\bar{C})^c$,得$\bar{C}\subseteq(\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)^c$,所以,$\bar{A}\Rightarrow\bar{B}=(\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)^c=(\bar{A})^c\triangle\bar{B}$。又由$\bar{A}\Cap\bar{B}=\bar{A}\otimes(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})=\bar{B}\otimes(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})$,得:

$((\bar{A})^c\triangle(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})^c)^c=((\bar{B})^c\triangle(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})^c)^c$

$(\bar{A})^c\triangle(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})^c=(\bar{B})^c\triangle(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})^c$

$(\bar{A})^c\triangle((\bar{A})^c\triangle\bar{B})^c=(\bar{B})^c\triangle((\bar{B})^c\triangle\bar{A})^c$

$\bar{A}\triangle(\bar{A}\triangle(\bar{B})^c)^c=\bar{B}\triangle(\bar{B}\triangle(\bar{A})^c)^c$

所以,$((\bar{B})^c\triangle\bar{A})^c\triangle\bar{A}=((\bar{A})^c\triangle\bar{B})^c\triangle\bar{B}$,定义 8(4)成立。

综上所述,定义 10 推出定义 8。

在上述推导过程中,没有使用定义 10(5),事实上,定义 10(5)可从其他各条件推出。推导如下:$(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})\Cup(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})=\bar{U}$等价于$(\bar{A}\Rightarrow\bar{B})^c\Cap(\bar{B}\Rightarrow\bar{A})^c=\bar{\phi}$,即$(\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)\Cap(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)=\bar{\phi}$,因为

$$\begin{aligned}&(\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)\Cap(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)\\&=(\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)\otimes((\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)\Rightarrow(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))\\&=\bar{A}\otimes(\bar{B})^c\otimes((\bar{A}\otimes(\bar{B})^c)^c\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))\\&=\bar{A}\otimes(\bar{B})^c\otimes((\bar{A})^c\triangle\bar{B}\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))\\&=\bar{A}\otimes(\bar{B})^c\otimes((\bar{B})^c\Rightarrow((\bar{A})^c\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)))\\&=\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\Cap((\bar{A})^c\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)))\\&=\bar{A}\otimes((\bar{A})^c\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))\otimes[((\bar{A})^c\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))^c\triangle(\bar{B})^c]\\&=\bar{A}\otimes(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))\otimes[(\bar{B})^c\triangle(\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A}))]\\&=(\bar{A}\Cap(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c))\otimes[(\bar{B})^c\triangle(\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A}))]\\&=(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)\otimes((\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)\Rightarrow\bar{A})\otimes[(\bar{B})^c\triangle(\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A}))]\\&=(\bar{A})^c\otimes(\bar{A}\triangle(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)^c)\otimes\bar{B}\otimes[(\bar{B})^c\triangle(\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A}))]\\&=((\bar{A})^c\Cap(\bar{B}\otimes(\bar{A})^c)^c)\otimes(\bar{B}\Cap(\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A})))\\&\subseteq(\bar{A})^c\otimes(\bar{A}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A}))=\bar{A}\otimes(\bar{A}\Rightarrow\bar{\phi})\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A})\\&=(\bar{A}\Cap\bar{\phi})\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A})=\bar{\phi}\otimes((\bar{B})^c\triangle\bar{A})\\&=(((\bar{B})^c\triangle\bar{A})^c\triangle(\bar{\phi})^c)^c=(\bar{\phi})^{cc}=\bar{\phi}\end{aligned}$$

(二)由$\langle I(2^U),\triangle,{}^c,\bar{\phi}\rangle$证出$\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\otimes,\Rightarrow,\bar{\phi},\bar{U}\rangle$。

由定理 6(3)及$\bar{A}\triangle\bar{B}=(\bar{A})^c\Rightarrow\bar{B}$知,若$\bar{A}\subseteq\bar{B}$当且仅当$(\bar{A})^c\triangle\bar{B}=(\bar{\phi})^c$。另由$\bar{A}\otimes\bar{B}=(\bar{A}\Rightarrow(\bar{B})^c)^c$易知$\langle\otimes,\Rightarrow\rangle$是$I(2^U)$上的伴随对。

1) ① 先证明$\subseteq$是$I(2^U)$上的偏序关系。

根据若$\bar{A}\subseteq\bar{B}$当且仅当$(\bar{A})^c\triangle\bar{B}=(\bar{\phi})^c$,对任意的区间集$\bar{A}$,由$\bar{A}\triangle(\bar{\phi})^c=(\bar{\phi})^c$可推出$\bar{\phi}\subseteq\bar{A}$,即$\bar{\phi}$是最小元。同理,由$(\bar{A})^c\triangle(\bar{\phi})^c=(\bar{\phi})^c$得,$\bar{A}\subseteq(\bar{\phi})^c$,即$(\bar{\phi})^c$是最大元,记作$\bar{U}$。

在公式$((\bar{A})^c\triangle\bar{D})^c\triangle\bar{D}=((\bar{D})^c\triangle\bar{A})^c\triangle\bar{A}$中,令$\bar{D}=(\bar{\phi})^c$,根据定义 8(3),左边$((\bar{A})^c\triangle\bar{D})^c\triangle\bar{D}=\bar{U}$,再根据定义 8(4),右

边$((\bar{\phi})^{cc}\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}=(\overline{A})^c\Delta\overline{A}$,所以$(\overline{A})^c\Delta\overline{A}=\overline{U}=(\bar{\phi})^c$,从而$\overline{A}\subseteq\overline{A}$,即$\subseteq$具有自反性。

设$\overline{A}\subseteq\overline{B}$和$\overline{B}\subseteq\overline{A}$,即$(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=(\bar{\phi})^c$和$(\overline{B})^c\Delta\overline{A}=(\bar{\phi})^c$,根据定义8(4),得$\overline{A}=\overline{A}$,即$\subseteq$具有反对称性。

设$\overline{A}\subseteq\overline{B}$和$\overline{B}\subseteq\overline{C}$,即$(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=(\bar{\phi})^c$和$(\overline{B})^c\Delta\overline{C}=(\bar{\phi})^c$,根据定义8(4),得:

$$(\overline{A})^c\Delta\overline{C}=(\overline{A})^c\Delta(((\overline{B})^c\Delta\overline{C})^c\Delta\overline{C})$$
$$=(\overline{A})^c\Delta(((\overline{C})^c\Delta\overline{B})^c\Delta\overline{B})$$
$$=((\overline{A})^c\Delta\overline{B})\Delta((\overline{C})^c\Delta\overline{B})^c=\overline{U}\Delta((\overline{C})^c\Delta\overline{b})^c=\overline{U}$$

故$\overline{A}\subseteq\overline{C}$,即$\subseteq$具有传递性。

因此,$\langle I(2^U),\subseteq\rangle$是偏序集。

②下证定义8(4)$((\overline{A})^c\Delta\overline{B})^c\Delta\overline{B}=((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}$式子两边都是$\overline{A}$和$\overline{B}$的上确界。

根据若$\overline{A}\subseteq\overline{B}$当且仅当$(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=(\bar{\phi})^c$,由$(\overline{A})^c\Delta\overline{A}\Delta\overline{B}=\overline{U}$,得$\overline{A}\subseteq\overline{A}\Delta\overline{B}$,故$\overline{A}\subseteq((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}$,同理$\overline{B}\subseteq((\overline{A})^c\Delta\overline{B})^c\Delta\overline{B}$。所以定义8(4)式两边都是$\overline{A}$和$\overline{B}$的上界。

反之,设$\overline{A}\subseteq\overline{C}$,$\overline{B}\subseteq\overline{C}$,得$(\overline{A})^c\Delta\overline{C}=(\overline{B})^c\Delta\overline{C}=\overline{U}$,再根据命题1(6),则$\overline{A}\Cup\overline{B}\subseteq\overline{C}$,$\overline{C}$是$\overline{A}$和$\overline{B}$的任一上界。因为若$\overline{A}\subseteq\overline{B}$则$\overline{C}\Delta\overline{A}\subseteq\overline{C}\Delta\overline{B}$,且当$\overline{B}\subseteq\overline{C}$时有$(\overline{C})^c\subseteq(\overline{B})^c$,所以$(\overline{C})^c\Delta\overline{A}\subseteq(\overline{B})^c\Delta\overline{A}$,即$((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\subseteq((\overline{C})^c\Delta\overline{A})^c$,$((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}\subseteq((\overline{C})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}=((\overline{A})^c\Delta\overline{C})^c\Delta\overline{C}=\overline{C}$。

所以,$\overline{A}\Cup\overline{B}=((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}=((\overline{A})^c\Delta\overline{B})^c\Delta\overline{B}$,故两个集合有上确界。

又因为$^c:I(2^U)\to I(2^U)$是逆序对合对应的,所以$\overline{A}\Cap\overline{B}=((\overline{A})^c\Cup(\overline{B})^c)^c$,则存在

$$\overline{A}\Cap\overline{B}=((\overline{A})^c\Cup(\overline{B})^c)^c=((\overline{A}\Delta(\overline{B})^c)^c\Delta(\overline{B})^c)^c$$
$$=((\overline{A}\Delta(\overline{B})^c)^c)\otimes\overline{B}=\overline{B}\otimes(\overline{B}\Rightarrow\overline{A})$$

故两个集合也有下确界。

所以,$\langle I(2^U),\Cup,\Cap,\bar{\phi},\overline{U}\rangle$是有界格。

2) 由$\overline{A}\otimes\overline{B}=((\overline{A})^c\Delta(\overline{B})^c)^c$,结合定理9(一)1)的证明,易证$\otimes$是交换的和结合的,且以$\overline{U}$为乘法单位,所以定义10(2)成立。

3) 因为$\overline{A}\otimes\overline{B}\subseteq\overline{C}$当且仅当$(\overline{A}\otimes\overline{B})^c\Delta\overline{C}=\overline{U}$,即$(\overline{A})^c\Delta(\overline{B})^c\Delta\overline{C}=\overline{U}$,从而$\overline{A}\subseteq(\overline{B})^c\Delta\overline{C}=\overline{B}\Rightarrow\overline{C}$,所以$\langle\otimes,\Rightarrow\rangle$是$I(2^U)$上的伴随对,定义10(3)成立。

4) 由上述证明1)②得知$\overline{A}\Cap\overline{B}=\overline{B}\otimes(\overline{B}\Rightarrow\overline{A})$,所以得定义10(4)成立。

5) 前面已经证明了定义10(5)可以由定义的其它各条件推出,略。

6) $(\overline{A}\Rightarrow\bar{\phi})\Rightarrow\bar{\phi}=((\overline{A})^c\Delta\bar{\phi})^c\Delta\bar{\phi}=(\overline{A})^{cc}\Delta\bar{\phi}=\overline{A}$

所以,定义10(6)成立。

综上所述,定义8推出定义10。

故由(一)和(二)得,定义8与定义10是等价的。

定理10 在区间集上,格蕴涵代数$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$与MV-代数$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$是等价的。

证明:(一)先证由格蕴涵代数$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$推出MV-代数$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$。

1) ①在定理9(二)1)②的证明中,Δ满足交换律。

②由定义4(1)、(3)可知:

$$(\overline{A}\Delta\overline{B})\Delta\overline{C}=((\overline{A})^c\Rightarrow\overline{B})^c\Rightarrow\overline{C}=(\overline{C})^c\Rightarrow((\overline{A})^c\Rightarrow\overline{B})$$
$$=(\overline{A})^c\Rightarrow((\overline{C})^c\Rightarrow\overline{B})=\overline{A}\Delta(\overline{C}\Delta\overline{B})=\overline{A}\Delta(\overline{B}\Delta\overline{C})$$

所以Δ满足结合律。

③由定义4(2)、(7)得:

$$\overline{A}\Rightarrow\overline{U}=(\overline{U}\Cap\overline{A})\Rightarrow\overline{U}=(\overline{U}\Rightarrow\overline{U})\Cup(\overline{A}\Rightarrow\overline{U})$$
$$=\overline{U}\Cup(\overline{A}\Rightarrow\overline{U})=\overline{U}$$

再根据定义4(2)、(5),得:

$$(\overline{U}\Rightarrow\overline{A})\Rightarrow\overline{A}=(\overline{A}\Rightarrow\overline{U})\Rightarrow\overline{U}=\overline{U}\Rightarrow\overline{U}=\overline{U}$$

且根据定义4(1)、(2),得:

$$\overline{A}\Rightarrow(\overline{U}\Rightarrow\overline{A})=\overline{U}\Rightarrow(\overline{A}\Rightarrow\overline{A})=\overline{U}\Rightarrow\overline{U}=\overline{U}$$

所以由定义4(4)得$\overline{U}\Rightarrow\overline{A}=\overline{A}$。那么,由$\bar{\phi}\Delta\overline{A}=(\bar{\phi})^c\Rightarrow\overline{A}=\overline{U}\Rightarrow\overline{A}=\overline{A}$知,$\bar{\phi}$是加法$\Delta$的单位。

所以,$\langle I(2^U),\Delta,\bar{\phi}\rangle$是以$\bar{\phi}$为单位的交换群,定义8(1)成立。

2) 定义8(2)由^{c}是逆序对合而得证。

3) 由$\overline{A}\Delta(\bar{\phi})^c=\overline{A}\Delta\overline{U}=\overline{A})^c\Rightarrow\overline{U}=\overline{U}=((\bar{\phi})^c$得,定义8(3)成立。

4) 由定义4(5)得:

$$((\overline{A})^c\Delta\overline{B})^c\Delta\overline{B}=(\overline{A}\Rightarrow\overline{B})^c\Delta\overline{B}=(\overline{A}\Rightarrow\overline{B})\Rightarrow\overline{B}=(\overline{B}\Rightarrow\overline{A})\Rightarrow\overline{A}=((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}$$

则定义8(4)成立。

故,由$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$是格蕴涵代数可推证$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$是MV-代数。

(二)在区间集上,证明由MV-代数$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$推出格蕴涵代数$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$。

设$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$是MV-代数,由$\overline{A}\Delta\overline{B}=(\overline{A})^c\Rightarrow\overline{B}$,得$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}=(\overline{A})^c\Delta\overline{B}$,且按$\overline{A}\subseteq\overline{B}$当且仅当$(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=(\bar{\phi})^c=\overline{U}$,在$I(2^U)$中引入关系$\subseteq$,由文献[11]所证知$\langle I(2^U),\subseteq\rangle$是有界格和分配格,且满足定义10的全部条件,特别是$^c:I(2^U)\to I(2^U)$为逆序对合映射。

1) 因为

$$\overline{A}\Rightarrow(\overline{B}\Rightarrow\overline{C})=(\overline{A})^c\Delta((\overline{B})^c\Delta\overline{C})=(\overline{A})^c\Delta(\overline{C}\Delta(\overline{B})^c)$$
$$=((\overline{A})^c\Delta\overline{C})\Delta(\overline{B})^c=(\overline{B})^c\Delta((\overline{A})^c\Delta\overline{C})=\overline{B}\Rightarrow(\overline{A}\Rightarrow\overline{C})$$

所以,定义4(1)成立。

2) 由$\overline{A}\Rightarrow\bar{\phi}=(\overline{A})^c\Delta\bar{\phi}=(\overline{A})^c$和定义10(4) $\overline{A}\otimes(\overline{A})^c=\overline{A}\otimes(\overline{A}\Rightarrow\bar{\phi})=\overline{A}$同$\bar{\phi}=\bar{\phi}$,$\overline{A}\Rightarrow\overline{A}=(\overline{A})^c\Delta\overline{A}=(\overline{A}\otimes(\overline{A})^c)^c=((\bar{\phi})^c=\overline{U}$得,定义4(2)成立。

3) 由$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}=(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=\overline{B}\Delta(\overline{A})^c=((\overline{B})^c)^c\Delta(\overline{A})^c=(\overline{B})^c\Rightarrow(\overline{A})^c$,则定义4(3)成立。

4) 设$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}=\overline{B}\Rightarrow\overline{A}=\overline{U}$,即$(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=(\overline{B})^c\Delta\overline{A}=\overline{U}$,则由$\overline{A}\subseteq\overline{B}$当且仅当$(\overline{A})^c\Delta\overline{B}=(\bar{\phi})^c=\overline{U}$得,定义4(4)成立。

5) 因为

$$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}\Rightarrow\overline{B}=((\overline{A})^c\Delta\overline{B})^c\Delta\overline{B}=((\overline{B})^c\Delta\overline{A})^c\Delta\overline{A}=\overline{B}\Rightarrow\overline{A}\Rightarrow\overline{A},$$

所以定义4(5)成立。

6) 因为

$$(\overline{A}\Cup\overline{B})\Rightarrow\overline{C}=(\overline{A}\Cup\overline{B})^c\Delta\overline{C}=((\overline{A})^c\Cap(\overline{B})^c)\Delta\overline{C}$$
$$=((\overline{A})^c\Delta\overline{C})\Cap((\overline{B})^c\Delta\overline{C})\Delta\overline{C}=(\overline{A}\Rightarrow\overline{C})\Cap(\overline{B}\Rightarrow\overline{C})$$

所以定义4(6)成立。

7) 同理可得定义4(7)也成立。

综上所述,由$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$构成MV-代数可证明$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$是格蕴涵代数。

由(一)和(二)可得,在区间集上,MV-代数与区间集上的格蕴涵代数等价。

定理11 在区间集上,格蕴涵代数$\langle I(2^U),\Cap,\Cup,^c,^*,\Rightarrow\rangle$与可换FI-代数$\langle I(2^U),\Rightarrow,\bar{\phi}\rangle$和MV-代数$\langle I(2^U),\Delta,^c,\bar{\phi}\rangle$是相互等价的。

证明:由定理8、定理10得证。

参 考 文 献

[1] Yao Y Y. Interval Sets and Interval-Set Algebras[C]// The 8th IEEE International Conference on cognitive informatics. Hong Kong: IEEE Computer Society, 2009: 307-314

[2] 俞峰,杨成梧. 直觉区间值模糊集的熵、距离测试和相似测试[J]. 计算机科学, 2008, 35(6): 199-201, 205

[3] Pomykala J, Pomykala J A. The Stone Algebra of Rough Sets [J]. Bull. Polidh Acad. Sci. Math., 1988, 36: 495-508

[4] 薛占熬,何华灿. 粗糙蕴涵[J]. 计算机科学, 2003, 30(11): 18-20

[5] 张小红. 模糊逻辑及其代数分析[M]. 北京:科学出版社, 2008, 7: 122-168

[6] 徐扬. 格蕴涵代数[J]. 西南交通大学学报, 1993, 28(1): 20-26

[7] 朱怡权. 泛蕴涵代数与 FI-代数[J]. 数学杂志, 2004, 4(24): 411-415

[8] 王国俊. MV-代数、BL-代数、R_0-代数与多值逻辑[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 1-15

[9] 刘春辉,徐罗山. 赋范 Fuzzy 蕴涵代数[J]. 扬州大学学报:自然科学报, 2009, 12(3): 1-5

[10] 朱怡权. 格蕴涵代数与 Lukasiewicz 逻辑系统[J]. 内蒙古大学学报, 2004, 35(2): 121-123

[11] 代建云,吴洪博. 分配的 Fuzzy 蕴涵代数[J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(1): 26-32

(上接第 210 页)

很多优点:相对于线性核函数而言,RBF 核函数可以有效解决非线性问题;相对于多项式核函数,RBF 核函数的参数较少,因此计算的复杂性较低;另外,与多项式核函数及 Sigmoid 核函数相比,RBF 核函数计算方便。

(4)参数选择子模块主要用来选择合适的聚类中心数 C 和 σ,以提高分类精度。

(5)训练模块将特征向量集输入 SVM 分类器,根据不同的 C 和 σ 分别训练 SVM 分类器,最终得到满足目标的分类器。

(6)测试模块利用训练好的 SVM 分类器测试未分类的音频信号,得到分类结果,并计算正确率。

本文设计的支持向量机分类系统用来区分语音和音乐两类,选择美尔倒谱系数(MFCC)作为特征参数,主要是因为其具有良好的识别性能和抗噪能力。T. Foote[12], Zhang 和 Kuo 等人[14,15]在研究语音与音乐的分类中均采用了美尔倒谱系数,且取得了不错的分类效果。

3 系统实验及分析

实验选择 800 个语音 clip 和 800 个音乐 clip 作为训练集对 SVM 进行训练,剩下的 300 个语音 clip 及 400 个音乐 clip 作为测试集 Ⅰ,得到的结果如表 1 和表 3 所列。由于测试集中数目有限,本文又在训练集中随机抽取了 400 个语音 clip 和 400 个音乐 clip 加入到测试集中,形成测试集 Ⅱ,得到的实验结果如表 2 和表 4 所列。

表 1 美尔倒谱系数,测试集 Ⅰ 实验结果

样本		分类结果		正确率(%)
类别	数量	语音	音乐	
语音	300	274	26	91.33%
音乐	400	41	359	89.75%
平均识别率				90.43%

表 2 美尔倒谱系数,测试集 Ⅱ 实验结果

样本		分类结果		正确率(%)
类别	数量	语音	音乐	
语音	700	657	43	93.86%
音乐	800	54	746	93.25%
平均识别率				93.53%

表 3 美尔倒谱系数+各类其他特征,测试集 Ⅰ 实验结果

特征	MFCC	MFCC+高过零率比例	MFCC+低短时能量比率
正确率(%)	90.43%	91.29% (+0.86%)	91.86% (+1.43%)
特征	MFCC+静音帧比率	MFCC+平滑基音帧比率	MFCC+频率能量
正确率(%)	89.71% (−0.72%)	89.71% (−0.72%)	92.14% (+1.71%)

表 4 美尔倒谱系数+各类其他特征,测试集 Ⅱ 实验结果

特征	MFCC	MFCC+高过零率比例	MFCC+低短时能量比率
正确率(%)	93.53%	94.20% (+0.67%)	94.47% (+0.94%)
特征	MFCC+静音帧比率	MFCC+平滑基音帧比率	MFCC+频率能量
正确率(%)	92.87% (−0.66%)	92.53% (−1.00%)	94.47% (+0.94%)

实验结果表明,随着分类样本的增加,分类的正确率有所上升,无论哪种特征的组合,在测试集 Ⅱ 上的测试正确率都比该类特征组合在测试集 Ⅰ 上的高,平均高出了 3.155%。在各特征组合实验中,低短时能量及频率能量对结果的提升较为明显。在测试集 Ⅰ 上,加上低短时能量比率特征后,结果高出了 1.43%,加上频率能量特征后,结果高出了 1.71%。在测试集 Ⅱ 上,低短时能量比率和频率能量特征都对结果有近 1%的提升。

参 考 文 献

[1] 卢坚,陈毅松,孙正兴. 基于隐马尔可夫模型的音频自动分类[J]. 软件学报, 2002, 13(8): 1593-1597

[2] 赵雪雁,吴飞,刘骏伟. 基于模糊聚类表征的音频例子检索及相关反馈[J]. 浙江大学学报, 2003, 37(3): 264-268

[3] Cheng Chih-chieh, Hsu Chiou-ting. Content-Based Audio Classification with Generalized Ellipsoid Distance[C]// Proc. PCM. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, Dec. 2002: 328-335

[4] Li S Z, Guo Guo-dong. Content-Based audio classification and retrieval using SVM learning[C]// Proceedings of the 1st IEEE Pacific-Rim Conference on Multimedia. Sydney, Australia, 2000: 156-163

[5] Wold E, Blum T, Keislar D, et al. Content-Based classification, search and retrieval of audio[J]. IEEE Multimedia Magazine, 1996, 3(3): 27-36

[6] Tsekeridou S, Pitas I. Content-based video parsing and indexing based on audio-visual interaction[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems For Video Technology, 2001, 11(4): 522-535

[7] Li S Z. Content-Based classification and retrieval of audio using the nearest feature line method[J]. IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, 2000, 8(5): 619-625

[8] 韩纪庆,等. 音频信息处理技术[M]. 北京:清华大学出版社, 2007