变精度对象概念格的构造及其性质

宋笑雪[1,2] 张文修[2] 李 红[1]

(咸阳师范学院计算机系 咸阳 712000)[1] (西安交通大学理学院信息与系统科学研究所 西安 710049)[2]

摘 要 讨论了基于模糊形式背景的模糊对象概念格的概念约简,构造出了模糊对象概念格的3种变精度概念格,即经典-模糊、模糊-经典、经典-经典变精度对象概念格,并讨论了它们的性质及相互关系。结果表明,变精度对象概念格的概念数量远远少于模糊对象概念格的概念数,而且每一种变精度概念格都保留了模糊对象概念格中相对重要的概念。

关键词 Galois连接,模糊形式背景,模糊对象概念格,变精度对象概念格

中图法分类号 TP182 **文献标识码** A

Construction and Properties of Variable Threshold Object-oriented Concept Lattices

SONG Xiao-xue[1,2] ZHANG Wen-xiu[2] LI Hong[1]

(College of Computer, Xianyang Normal College, Xianyang 712000, China)[1]

(Institute of Information and System Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)[2]

Abstract In this paper we discussed the conceptual reduction of fuzzy object-oriented concept lattices. Three kinds of variable threshold concept lattices, i.e., crisp-crisp, crisp-fuzzy, fuzzy-crisp variable threshold object-oriented concept lattices, and the properties and the relations of them were discussed. The results shows that the number of concepts in variable threshold object-oriented concept lattices is less than that in fuzzy object-oriented concept lattices, and the important concept is preserved.

Keywords Galois connection, Fuzzy formal context, Fuzzy object-oriented concept lattice, Variable threshold object-oriented concept lattice

1 引言

形式概念分析是由德国数学家Wille于20世纪80年代初提出的[1],也称为概念格理论。形式概念分析的基础是一个由三元组构成的形式背景(U,A,I),其中U是对象集,A是属性集,I是U与A之间的二元关系。在形式背景的基础上,获得形式概念(X,B),其中$X\subseteq U$称为概念的外延,是属于这个概念的所有对象的集合;而$B\subseteq A$称为内涵,是所有这些对象所具有的属性(或特征)的集合。所有的概念同它们之间的泛化/例化关系构成概念格。概念格的每个节点是一个形式概念。概念格结构模型本质上描述了对象和特征之间的联系,其相应的Hasse图实现了对数据的可视化。因此,概念格被认为是进行数据分析的有力工具,已被成功应用于决策分析、信息检索、数据挖掘和知识发现等领域。

进行数据分析和知识处理的另一个重要工具是由Pawlak[2]提出的粗糙集理论。粗糙集理论的基本结构是近似空间,它是由一个论域及其上定义的一个二元关系构成的。使用粗糙集理论的下上近似概念,可将隐藏在信息系统中的知识挖掘出来并表达为决策规则的形式[3]。

粗糙集理论和形式概念分析相互关联,相互补充,为数据分析提供了新的研究方法。Gediga, Düntsch[4]和Yao[5]等把形式概念分析引入到粗糙集理论中,从而定义了两种类型的概念格,即对象概念格和属性概念格,Yao进一步又定义了对偶概念格。

但是二元形式背景上对象与属性之间的关系只有两种,即对象具有某个属性或不具有某个属性,分别用数字1,0来表示。这种非此即彼的定义方式在现实情况下具有很大的局限性。因为现实情况下对象与属性之间的关系往往是模糊的,所以人们将形式概念分析推广到模糊环境下。

Burusco等[6]首先将模糊逻辑的有关理论引入到概念格中,但是他们的定义不满足伽罗瓦连接,因此二元形式背景下概念格所具有的一些基本性质不再成立。R. Belohlavek[7]推广了基于包含度(以完备剩余格为真值度)的L-伽罗瓦连接的定义。进而,Belohlavek, Georgescu, Fan, Shao[8-11]等分别定义了4类模糊概念格,它们实际上是二元形式背景下4类概念格的推广,分别称为模糊形式概念格、模糊对象概念格、模糊属性概念格、模糊对偶概念格。这些定义形式均满足伽罗瓦连接,因此保持了二元形式背景下概念格的基本性质,但

到稿日期:2010-01-20 返修日期:2010-04-13 本文受陕西省教育厅自然科学项目(No.07JK422),陕西省科技厅计划项目(No.2009JM8021)和咸阳师范学院专项科研基金项目(06XSYK272)资助。

宋笑雪 博士生,教授,主要研究方向为人工智能的数学基础;**张文修** 教授,博士生导师,主要研究方向为粗糙集、遗传算法、模糊集、人工智能等。

不足之处是得到的概念数量庞大。比如我们可能会得到对于 x,只要 $A(x)\in[0.1,0.2]$都将形成一个概念,得到这么多概念对于我们了解事物是不必要的。

Belohlavek 对模糊概念格的简化问题进行了研究,提出了多种约简方法。比如,基于障篱的约简方法或通过定义约束属性-依赖公式来约简概念的数目[12,13]。Zhang[14]等提出了更易于操作的变精度概念格来达到对模糊概念进行约简的目的。

Zhang 等只讨论了模糊形式概念格的变精度概念格。本文将进一步给出模糊对象概念格的变精度概念格的构造,构造出的经典-经典变精度对象概念格的外延集包含于经典-模糊变精度对象概念格的外延集,其内涵集包含于模糊-经典变精度对象概念格的内涵集;经典-模糊变精度对象概念格的内涵集包含于模糊对象概念格的内涵集;模糊-经典变精度概念格的外延集包含于模糊对象概念格的外延集。由此可以看到,变精度对象概念格中的概念是模糊对象概念格中概念的子集。此方法可以有效地减少模糊对象概念格中概念的数量。

2 伽罗瓦连接

设 U 是一个论域,L 是完备格,记 L^U 是定义在 U 上的所有 L-模糊集的集合。$\forall X_1,X_2\in L^U, X_1\subseteq X_2\Leftrightarrow\forall x\in U,\ X_1(x)\leqslant X_2(x)$,则$(L^U,\subseteq)$是偏序集。记偏序集$(L^U,\subseteq)$的逆序集为$(L^U,\supseteq)^\partial$(简写为$(L^U)^\partial$)。

定义 1[7] 称$(L_1{}^U,\subseteq)$和$(L_2{}^A,\subseteq)$是两个偏序集。映射 $f:L_1^U\to L_2^A$ 和 $g:L_2^A\to L_1^U$ 被称为 L_1^U 和 L_2^A 上的伽罗瓦连接当且仅当 $X\subseteq g(B)\Leftrightarrow f(X)\subseteq B$,其中 $X\in L_1^U, B\in L_2^A$(X,B 可以是经典集,也可以是 L-模糊集)。

改变伽罗瓦连接的序关系,可以得到 L_1^U 和$(L_2^A)^\partial$之间的伽罗瓦连接及其有关性质。

定理 1[8] 设$(L_1^U,\subseteq)$和$(L_2^A,\subseteq)$是两个偏序集,映射 $f:L_1^U\to L_2^A, g:L_2^A\to L_1^U$。对任意的 $X,X_1,X_2\in L_1^U, B,B_1,B_2\in L_2^A$,以下命题等价:

(1) $X\subseteq g(B)\Leftrightarrow B\subseteq f(X)$;

(2) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow f(X_2)\subseteq f(X_1), B_1\subseteq B_2\Rightarrow g(B_2)\subseteq g(B_1), X\subseteq g\circ f(X), B\subseteq f\circ g(B)$;

(3) $f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cap f(X_2), g(B_1\cup B_2)=g(B_1)\cap g(B_2), X\subseteq g\circ f(X), B\subseteq f\circ g(B)$。

定义 2[8] 设$(L_1^U,\subseteq)$和$(L_2^A,\subseteq)$是两个偏序集,映射 $f:L_1^U\to L_2^A, g:L_2^A\to L_1^U$,对于 $X\in L_1^U, B\in L_2^A$,如果 $f(X)=B, g(B)=X$,则称(X,B)为一个形式概念。X,B 分别称为形式概念(X,B)的外延和内涵。

定理 2[8] 设$(L_1^U,\subseteq)$和$(L_2^A,\subseteq)$是两个偏序集,映射 $f:L_1^U\to L_2^A$ 和 $g:L_2^A\to L_1^U$ 是 L_1^U 和 L_2^A 上的伽罗瓦连接,则由此生成的所有形式概念的集合形成一个完备格,其交和并定义如下:

$$\bigwedge_{i\in I}(X_i,B_i)=(\bigcap_{i\in I}X_i, f\circ g(\bigcup_{i\in I}B_i))$$
$$\bigvee_{i\in I}(X_i,B_i)=(g\circ f(\bigcup_{i\in I}X_i), \bigcap_{i\in I}B_i)$$

类似地,可以得到$(L_1^U)^\partial$和$(L_2^A)^\partial$之间的伽罗瓦连接及其等价定义。

定理 3 设$(L_1^U,\subseteq)$和$(L_2^A\subseteq)$是两个偏序集,映射 $f:L_1^U\to L_2^A, g:L_2^A\to L_1^U$。对任意的 $X,X_1,X_2\in L_1^U, B,B_1,B_2\in L_2^A$,以下命题等价:

(1) $B\subseteq f(X)\Leftrightarrow g(B)\subseteq X$;

(2) $X_1\subseteq X_2\Rightarrow f(X_1)\subseteq f(X_2), B_1\subseteq B_2\Rightarrow g(B_1)\subseteq g(B_2), X\supseteq g\circ f(X), B\subseteq f\circ g(B)$;

(3) $f(X_1\cap X_2)=f(X_1)\wedge f(X_2), g(B_1\cup B_2)=g(B_1)\vee g(B_2), X\supseteq g\circ f(X), B\subseteq f\circ g(B)$。

定理 4[7] 设$(L_1^U,\subseteq)$和$(L_2^A,\subseteq)$是两个偏序集,映射 $f:L_1^U\to L_2^A$ 和 $g:L_2^A\to L_1^U$ 是$(L_1^U)^\partial$和$(L_2^A)^\partial$之间的伽罗瓦连接,则由此得到的所有形式概念的集合形成一个完备格,其交和并定义如下:

$$\bigwedge_{i\in I}(X_i,B_i)=(g\circ f(\bigcap_{i\in I}X_i), \bigcap_{i\in I}B_i)$$
$$\bigvee_{i\in I}(X_i,B_i)=(\bigcup_{i\in I}X_i, f\circ g(\bigcup_{i\in I}B_i))$$

3 完备剩余格与模糊形式背景

为了方便我们的讨论,本节给出了完备剩余格及模糊形式概念分析的有关概念和性质。

定义 3[10] 称 $\boldsymbol{L}=(L,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$是一个剩余格,如果以下条件成立:

(1) $(L,\wedge,\vee,0,1)$是一个格,其中最大元为 1,最小元为 0;

(2) $(L,\otimes,1)$是一个交换幺半群;

(3) $(\otimes,\to)$是一个剩余对,即 $a\otimes b\leqslant c\Leftrightarrow a\leqslant b\to c, a,b,c\in L$。

如果$(L,\wedge,\vee,0,1)$是一个完备格,则称 $\boldsymbol{L}$ 是完备剩余格。一个完备剩余格 $\boldsymbol{L}$ 是对合的当且仅当 $a=a^{cc}, \forall a\in L$(其中,$a^c=a\to 0$)。

我们下面主要用到完备剩余格的以下性质:$\forall x,y,z\in L, x_i,y_i\in L, i\in I$,$I$ 是一个序列集,

(1) $x\to x=1, x\to 1=1, 0\to x=1, 1\to x=x, x\otimes 0=0$;

(2) $x\leqslant y$ 当且仅当 $x\to y=1$;

(3) $\bigvee_{i\in I}x_i\to y=\bigwedge_{i\in I}(x_i\to y), x\to\bigwedge_{i\in I}y_i=\bigwedge_{i\in I}(x\to y_i)$;

(4) $\bigvee_{i\in I}(x\to y_i)\leqslant x\to\bigvee_{i\in I}y_i, \bigvee_{i\in I}(x_i\to y)\leqslant\bigwedge_{i\in I}x_i\to y$;

(5) $x\otimes\bigvee_{i\in I}y_i=\bigvee_{i\in I}(x\otimes y_i), x\otimes\bigwedge_{i\in I}y_i\leqslant\bigwedge_{i\in I}(x\otimes y_i)$;

(6) $\otimes$是单调递增的,即 $y_1\leqslant y_2\Rightarrow x\otimes y_1\leqslant x\otimes y_2$;

(7) $\to$关于第一变量不增,关于第二变量不减,即 $y_1\leqslant y_2\Rightarrow x\to y_1\leqslant x\to y_2, x_1\leqslant x_2\Rightarrow x_2\to y\leqslant x_1\to y$。

本文还会用到否以及对合剩余格的以下性质:

(8) $x\leqslant y\Rightarrow x^c\geqslant y^c$;

(9) $x\to y=(x\otimes y^c)^c$;

(10) $x\to y=y^c\to x^c$。

下面我们在 $L=[0,1]$区间的完备剩余格上进行讨论,即设 $\boldsymbol{L}=([0,1],\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$。

定义 4[7,10] 称$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景,其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是非空有限对象集,$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是非空有限属性集,$\tilde{I}$ 是 U 与 A 之间的二元模糊关系,即 $\tilde{I}:U\times A\to[0,1]$。

我们记 U 的幂集为 $\mathscr{P}(U)$,$\mathscr{P}(U)$中的元素记为 X,即 $X\in\mathscr{P}(U)$;记 $\widetilde{X}:U\to L$ 是 U 上的 L-模糊集,$\widetilde{B}:A\to L$ 是 A 上的 L-模糊集。

定义 5[9,10] 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景。对任意的 $\widetilde{X}\in L^U, \widetilde{B}\in L^A$。定义 L^U 与 L^A 之间的两个算子$^\square,{}^\square$如下:

$$\begin{aligned}&\widetilde{X}^{\Box}(a)=\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x))\\&\widetilde{B}^{\Box}(x)=\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes\widetilde{B}(a))\end{aligned}\tag{1}$$

算子$^{\Box}$,$^{\Box}$构成$(L_U)^{\partial}$与L_A之间的伽罗瓦连接,即满足$\widetilde{B}^{\Box}\subseteq\widetilde{X}\Leftrightarrow\widetilde{B}\subseteq\widetilde{X}^{\Box}$。它们所形成的概念全体构成完备格,称为模糊对象概念格。

4 变精度对象概念格的构造

定义 6 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景。对任意的$X\in\mathscr{P}(U)$,$B\in\mathscr{P}(A)$,$0<\delta\leqslant1$。定义$\mathscr{P}(U)$与$\mathscr{P}(A)$之间的两个算子$^{\Box_1}$,$^{\Box_1}$如下:

$$\begin{aligned}&X^{\Box_1}=\{a\in A\mid\bigwedge_{x\in X}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow X^c(x))\geqslant\delta\}\\&B^{\Box_1}=\{x\in U\mid\bigvee_{a\in B}(\tilde{I}(x,a)\otimes B(a))\leqslant\delta^c\}\end{aligned}\tag{2}$$

定理 5 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景,算子$^{\Box_1}$,$^{\Box_1}$如式(2)定义,则$^{\Box_1}$,$^{\Box_1}$满足:

$X\subseteq B^{\Box_1}\Leftrightarrow B\subseteq X^{\Box_1}$

即算子$^{\Box_1}$,$^{\Box_1}$是$\mathscr{P}(U)$与$\mathscr{P}(A)$之间的伽罗瓦连接。

证明:因为$X\in\mathscr{P}(U)$,$B\in\mathscr{P}(A)$,所以$\forall x\in X,X(x)=1$;$\forall a\in B$, $B(a)=1$。因此有:

$X\subseteq B^{\Box_1}\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall a\in B,\tilde{I}(x,a)\otimes B(a)\leqslant\delta^c$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall a\in B,\tilde{I}(x,a)\leqslant\delta^c$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall a\in B,\tilde{I}^c(x,a)\geqslant\delta$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall a\in B,\tilde{I}(x,a)\rightarrow0\geqslant\delta$

$\Leftrightarrow\forall a\in B,\forall x\in X,\tilde{I}(x,a)\rightarrow B^c(a)\geqslant\delta$

$\Leftrightarrow\forall a\in B,\bigwedge_{x\in X}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow B^c(a))\geqslant\delta$

$\Leftrightarrow B\subseteq X^{\Box_1}$

定义 7 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景,对任意的$X\in\mathscr{P}(U)$,$\widetilde{B}\in L^A$,$0<\delta\leqslant1$。定义$\mathscr{P}(U)$与L^A之间的两个算子$^{\Box_2}$,$^{\Box_2}$如下:

$$\begin{aligned}&X^{\Box_2}(a)=\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,a)\rightarrow\delta^c\\&\widetilde{B}^{\Box_2}=\{x\in U\mid\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes\widetilde{B}(a))\leqslant\delta^c\}\end{aligned}\tag{3}$$

定理 6 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景,算子$^{\Box_2}$,$^{\Box_2}$如式(3)定义,则$^{\Box_2}$,$^{\Box_2}$满足:

$X\subseteq\widetilde{B}^{\Box_2}\Leftrightarrow\widetilde{B}\subseteq X^{\Box_2}$

即算子$^{\Box_2}$,$^{\Box_2}$是$\mathscr{P}(U)$与L^A之间的伽罗瓦连接。

证明:

$\widetilde{B}\subseteq X^{\Box_2}\Leftrightarrow\forall a\in A,\widetilde{B}(a)\leqslant\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,a)\rightarrow\delta^c$

$\Leftrightarrow\forall a\in A,\widetilde{B}(a)\otimes\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,a)\leqslant\delta^c$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall a\in A,\tilde{I}(x,a)\otimes\widetilde{B}(a)\leqslant\delta^c$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes\widetilde{B}(a))\leqslant\delta^c$

$\Leftrightarrow\forall x\in X,x\in\widetilde{B}^{\Box_2}$

$\Leftrightarrow X\subseteq\widetilde{B}^{\Box_2}$

定义 8 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景。对任意的$\widetilde{X}\in L^U$,$B\in\mathscr{P}(A)$,$0<\delta\leqslant1$。定义L^U与$\mathscr{P}(A)$之间的两个算子$^{\Box_3}$,$^{\Box_3}$如下:

$$\begin{aligned}&\widetilde{X}^{\Box_3}=\{a\in A\mid\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x))\geqslant\delta\}\\&B^{\Box_3}(x)=\delta\otimes\bigvee_{a\in B}\tilde{I}(x,a)\end{aligned}\tag{4}$$

定理 7 设$(U,A,\tilde{I})$是模糊形式背景,算子$^{\Box_3}$,$^{\Box_3}$如式(4)定义,则$^{\Box_3}$,$^{\Box_3}$满足:

$B\subseteq\widetilde{X}^{\Box_3}\Leftrightarrow B^{\Box_3}\subseteq\widetilde{X}$

即算子$^{\Box_3}$,$^{\Box_3}$是$(L_U)^{\partial}$与$\mathscr{P}(A)$之间的伽罗瓦连接。

证明:

$B^{\Box_3}\subseteq\widetilde{X}\Leftrightarrow\forall x\in U,\delta\otimes\bigvee_{a\in B}\tilde{I}(x,a)\leqslant\widetilde{X}(x)$

$\Leftrightarrow\forall x\in U,\delta\leqslant\bigvee_{a\in B}\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x)$

$\Leftrightarrow\forall x\in U,\delta\leqslant\bigwedge_{a\in B}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x))$

$\Leftrightarrow\forall x\in U,\forall a\in B,\delta\leqslant\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x)$

$\Leftrightarrow\forall a\in B,\delta\leqslant\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x))$

$\Leftrightarrow\forall a\in B,a\in\widetilde{X}^{\Box_3}$

$\Leftrightarrow B\subseteq\widetilde{X}^{\Box_3}$

我们用$L_\delta(U,A,\tilde{I})$,$L_\delta(U,\widetilde{A},\tilde{I})$,$L_\delta(\widetilde{U},A,\tilde{I})$,$L(\widetilde{U},\widetilde{A},\tilde{I})$来表示由定义6、定义7、定义8和定义5形成的所有形式概念的集合。由定理2—定理4知,它们形成概念格。分别称$L_\delta(U,A,\tilde{I})$,$L_\delta(U,\widetilde{A},\tilde{I})$,$L_\delta(\widetilde{U},A,\tilde{I})$为$L(\widetilde{U},\widetilde{A},\tilde{I})$的经典-经典、经典-模糊、模糊-经典的变精度对象概念格。

5 变精度对象概念格的相互关系

定理 8 设$(X,\widetilde{B})\in L_\delta(U,\widetilde{A},\tilde{I})$,则$\widetilde{B}$一定是$L(\widetilde{U},\widetilde{A},\tilde{I})$中某一概念的内涵。

证明:由模糊对象概念的性质和定理3可知,$(\widetilde{B}^{\Box},\widetilde{B}^{\Box\Box})$一定是$L(\widetilde{U},\widetilde{A},\tilde{I})$中的一个概念。所以我们只要证明$\widetilde{B}^{\Box\Box}=\widetilde{B}$。而由伽罗瓦连接的性质可知$\widetilde{B}^{\Box\Box}\supseteq\widetilde{B}$,所以下面证明$\widetilde{B}^{\Box\Box}\subseteq\widetilde{B}$。

由$\widetilde{B}^{\Box\Box}$的定义(式(1))可知:

$\forall a\in A,\widetilde{B}^{\Box\Box}(a)=$

$\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow(\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes B(a))))$

由于$X=\widetilde{B}^{\Box_2}$,可得$\forall x\in X,\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes\widetilde{B}(a))\leqslant\delta^c$,因此

$$\begin{aligned}\widetilde{B}^{\Box\Box}(a)&\leqslant\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\delta^c)\leqslant\bigwedge_{x\in X}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\delta^c)\\&=X^{\Box_2}(a)=\widetilde{B}(a)\end{aligned}$$

定理 9 设$(\widetilde{X},B)\in L_\delta(\widetilde{U},A,\tilde{I})$,则$\widetilde{X}$一定是$L(\widetilde{U},\widetilde{A},\tilde{I})$中某一概念的外延。

证明:由模糊对象概念的性质和定理3可知,$(\widetilde{X}^{\Box\Box},\widetilde{X}^{\Box})$一定是$L(\widetilde{U},\widetilde{A},\tilde{I})$中的一个概念。所以我们只要证明$\widetilde{X}^{\Box\Box}=\widetilde{X}$。而已知$\widetilde{X}^{\Box\Box}\subseteq\widetilde{X}$,所以下面证明$\widetilde{X}^{\Box\Box}\supseteq\widetilde{X}$。

由$\widetilde{X}^{\Box\Box}$的定义(式(1))可知:

$\forall x\in X,\widetilde{X}^{\Box\Box}(x)=\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes(\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x))))$

由于$B=\widetilde{X}^{\Box_3}$,可得$\forall a\in B,\bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow\widetilde{X}(x))\geqslant\delta$,因此

$$\begin{aligned}\widetilde{X}^{\Box\Box}(x)&\geqslant\bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes\delta)\geqslant\bigvee_{x\in B}(\tilde{I}(x,a)\otimes\delta)=B^{\Box_3}(x)\\&=\widetilde{X}(x)\end{aligned}$$

定理 10 设$(X,B)\in L_\delta(U,A,\tilde{I})$,则$X$一定是$L(U,\widetilde{A},\tilde{I})$中某一概念的外延。

证明:由定理1及$\widetilde{B}^{\Box_2}$和$X^{\Box_2}$的性质可知,$(X^{\Box_2\Box_2},X^{\Box_2})$一定是$L(U,\widetilde{A},\tilde{I})$中的一个概念。所以我们只要证明$X^{\Box_2\Box_2}=X$。而已知$X^{\Box_2\Box_2}\supseteq X$,所以下面证明$X^{\Box_2\Box_2}\subseteq X$。

因为$(X,B)\in L_\delta(U,A,\tilde{I})$,所以有$B=X^{\Box_1}$,由此可得$\forall a\in B,\bigwedge_{x\in X}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow X^c(x))\geqslant\delta$,而$\forall x\in X$,有$X^c(x)=0$。因此,$\forall a\in B,\bigwedge_{x\in X}(\tilde{I}(x,a)\rightarrow0)\geqslant\delta$,即$\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,a)\leqslant\delta^c$,也就是$\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,a)\rightarrow\delta^c=1=B(a)$。

再由 $X^{\Box_2\Box_2}$ 的定义(式(3))可知：

$$X^{\Box_2\Box_2}=\{x\in U\mid \bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes(\bigvee_{x\in X}\tilde{I}(x,a)\to\delta^c))\leqslant\delta^c\}=$$
$$\{x\in U\mid \bigvee_{a\in A}(\tilde{I}(x,a)\otimes B(a))\leqslant\delta^c\}\subseteq\{x\in U\mid \bigvee_{a\in B}(\tilde{I}(x,a)\otimes B(a))\leqslant\delta^c\}=B^{\Box_1}=X。$$

定理 11 设$(X,B)\in L_\delta(U,A,\tilde{I})$，则 B 一定是 $L(\tilde{U},A,\tilde{I})$中某一概念的内涵。

证明：由定理 3 及 $B^{\Box_3}$ 和 $\tilde{X}^{\Box_3}$ 的性质可知，$(B^{\Box_3},B^{\Box_3\Box_3})$ 一定是 $L(\tilde{U},A,\tilde{I})$中的一个概念。所以我们只要证明 $B^{\Box_3\Box_3}=B$。而已知$B^{\Box_3\Box_3}\supseteq B$，所以下面证明 $B^{\Box_3\Box_3}\subseteq B$。

因为$(X,B)\in L_\delta(U,A,\tilde{I})$，所以有 $X=B^{\Box_1}$，由此可得 $\forall x\in X,\bigvee_{a\in B}(\tilde{I}(x,a)\otimes B(a))\leqslant\delta^c$，而 $\forall a\in B$，有 $B(a)=1$。因此，$\forall x\in X,\bigvee_{a\in B}(\tilde{I}(x,a)\otimes X(x))\leqslant\delta^c$，即 $X(x)\leqslant\bigvee_{a\in B}\tilde{I}(x,a)\to\delta^c$，也就是 $X^c(x)\geqslant\bigvee_{a\in B}\tilde{I}(x,a)\otimes\delta$。

再由 $B^{\Box_3\Box_3}$ 的定义(式(4))可知：

$$B^{\Box_3\Box_3}=\{a\in A\mid \bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\to(\bigvee_{a\in B}\tilde{I}(x,a)\otimes\delta))\geqslant\delta\}$$
$$\subseteq\{a\in A\mid \bigwedge_{x\in U}(\tilde{I}(x,a)\to X^c(x))\geqslant\delta\}$$
$$\subseteq\{a\in A\mid \bigwedge_{x\in X}(\tilde{I}(x,a)\to X^c(x))\geqslant\delta\}=X^{\Box_1}=B$$

下面通过一个例子来说明我们提出的对模糊对象概念格进行约简的变精度对象概念格的方法。

例 1 表 1 是一个模糊形式背景$(U,A,\tilde{I})$，其中 $U=(1,2,3)$为对象集，$A=(a,b,c,d)$为属性集。

表 1 模糊形式背景

	a	b	c	d
1	1.0	0.3	0.7	0.1
2	0.5	0.0	0.4	0.2
3	0.7	0.1	0.2	0.2

我们取 Lukasiewicz 算子：

$$a\to b=\begin{cases}1, & a\leqslant b\\ 1-a+b, & a>b\end{cases}$$

$$a\otimes b=(a+b-1)\vee 0$$

取完备格 $L=\{0,0.1,0.2,\cdots,1\}$，此时 $\boldsymbol{L}=(L,\wedge,\vee,\otimes,\to,0,1)$是完备对合剩余格。我们在表 2－表 4 中列出 $\delta=1$时的经典-经典、经典-模糊、模糊-经典变精度对象概念，图 1 描绘出模糊形式背景取完备格 $L=\{0,0.1,0.2,\cdots,1\}$时的所有模糊对象概念。显然，变精度对象概念格中的概念数量少于模糊对象概念的数量。

表 2 $\delta=1$时的经典-经典变精度对象概念

X	B
2	b
ϕ	abcd
123	ϕ

表 3 $\delta=1$时的经典-模糊变精度对象概念

X	a	b	c	d
ϕ	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.0	0.7	0.3	0.9
2	0.5	1.0	0.6	0.8
3	0.3	0.9	0.8	0.8
23	0.3	0.9	0.6	0.8
123	0.0	0.7	0.3	0.8

表 4 $\delta=1$时的模糊-经典变精度对象概念

B	1	2	3
ϕ	0.0	0.0	0.0
b	0.3	0.0	0.1
d	0.1	0.2	0.2
bd	0.3	0.2	0.2
bcd	0.7	0.4	0.2
abcd	1.0	0.5	0.7

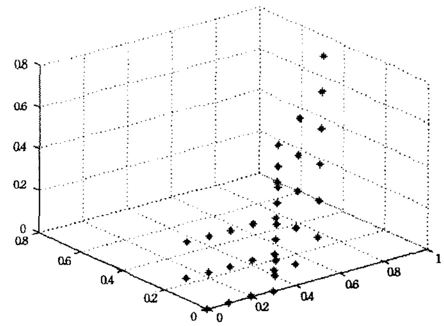

图 1 表 1 所列模糊形式背景的所有模糊对象概念

结束语 经典形式背景表示了对象和属性之间的二值关系，即某对象要么具有某个属性，要么不具有某属性。但在实际情况中，我们得到的对象和属性的关系往往是模糊不确定的，因此将二值形式背景推广到模糊环境下。然而将模糊集理论引入经典形式背景得到的模糊概念是个巨大的集合，所以有必要研究模糊概念的约简。本文讨论了模糊对象概念格的变精度概念格，定义了模糊对象概念格的三类变精度概念格形式。这些变精度对象概念格满足不同序的伽罗瓦连接，因此具有经典概念格的良好性质。三类变精度概念格分别定义在两个清晰集之间、一个清晰集和一个模糊集、一个模糊集和一个清晰集之间。定义在模糊集之间的模糊对象概念格可以产生定义在清晰集和模糊集之间的变精度对象概念格，而它们又可以分别产生定义在清晰集之间的变精度对象概念格。本文方法可以有效地减少模糊对象概念格中概念的数量。

参 考 文 献

[1] Ganter B, Wille R. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1999

[2] Pawlak Z, Skowron A. Rudiments of rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177: 3-27

[3] Pawlak Z, Skowron A. Rough sets and Boolean reasoning[J]. Information Sciences, 2007, 177: 41-73

[4] Gediga G, Düntsch I. Modal-style operators in qualitative data analysis[C]//Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Data Mining. 2002: 155-162

[5] Yao Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis[C]//Proceedings of 3rd International Conference(RSCTC'04). 2004: 59-68

[6] Burusco A, Fuentes-Gonzalez R. The study of the L-fuzzy concept lattice[J]. Mathware and Soft Computing, 1994, 1(3): 209-218

[7] Belohlavek R. Fuzzy Galois connections[J]. Mathematical Logic Quarterly, 1999, 45(4): 497-504

[8] Belohlavek R. Concept lattices and order in fuzzy logic[J]. Annals of Pure and Applied Logic, 2004, 128: 277-298

[9] Georgescu G, Popescu A. Non-dual fuzzy connections [J]. Archive Math Logic, 2004, 43(8): 1009-1039

(下转第 214 页)

表 1　不同算法在 ORL 数据库上的识别率

	2 Train	3 Train	4 Train
Baselines	66.8%(1024)	77%(1024)	81.7%(1024)
Eigenfaces	66.8%(78)	77%(119)	81.7%(159)
Fisherfaces	71.1%(22)	83.2%(39)	89.5%(39)
MFA	71.6%(37)	84.1%(39)	89.6%(39)
LPP	76.1%(39)	86.6%(39)	90.42%(39)
NMF	70.87%(97)	78.98%(81)	84.48%(95)
LNMF	71.73%(178)	81.09%(168)	86.31%(195)
LSDA	76.7%(39)	85%(39)	90.5%(39)
LSDNMF	78.7%(198)	87.9%(89)	93.5%(83)

表 2　不同算法在 Yale 数据库上的识别率

	2 Train	3 Train	4 Train
Baselines	43.4%(1024)	49.4%(1024)	56.2%(1024
Eigenfaces	43.4%(29)	49.4%(44)	56.2%(58)
Fisherfaces	47.2%(9)	64.9%(14)	72.9%(14)
MFA	47.7%(10)	65.7%(14)	74.1%(14)
LPP	46.5%(14)	69.5%(14)	74.6%(14)
NMF	44.11%(112)	49.00%(195)	52.19%(164)
LNMF	44.00%(157)	48.83%(198)	53.57%(14)
LSDA	56.5%(14)	68.5%(14)	74.4%(14)
LSDNMF	58.7%(108)	70.5%(128)	78.35%(146)

数据集

ORL 人脸库包括 40 个人的 400 幅 112×92 大小的人脸灰度图像，其中有些图像是拍摄于不同时期的，人的脸部表情和脸部细节有着不同程度的变化：比如，笑或不笑，眼睛或睁或闭，戴或不戴眼镜。人脸姿态也有相当程度的变化，深度旋转和平面旋转可达 20°，人脸的尺度也有多达 10% 的变化。Yale 人脸库中包括了 15 个人的 165 幅灰度人脸图像，每个人由 11 幅 92×112 的照片构成，这些图片涵盖了光照（包括左、中、右 3 个方向）、面部表情（包括正常、高兴、难过、困乏、惊讶以及眨眼）和遮挡（戴/不戴眼镜）等多种因素的变化。为了节省时间和内存，图像被预处理成为 32×32 维的形式，对图像的灰度不做任何处理。图 1 显示了 ORL，Yale 人脸数据库中的部分人脸样本。

图 1　顶行是 ORL 数据集，底行是 Yale 数据集

为了避免小样本问题，我们首先采用 PCA 算法对数据进行降维。对于 LPP 算法，所保留的 PCA 主分量个数为 $n-1$；而对于 LDA 和 MFA 算法，所保留的 PCA 主分量的个数为 $n-N_c$，这里 n 是训练数的个数，N_c 是类数。对于非负矩阵 NMF 和 LNMF，参数 k 为 $n\times m/(n+m)$，我们所提算法的近邻参数 $k_1=2, k_2=2$。

结束语　实验表明，与传统的线性降维方法相比，基于局部敏感判别非负矩阵分解的学习方法通常能够得到更好的识别效果。PCA，LDA，NMF，LNMF 降维仅仅考虑了线性的欧氏结构而没有考虑全局的非线性属性。LPP，MFA，SDA 算法采用保持数据的局部几何结构，能够在一定程度上刻画数据的非线性结构，因而在实验中能够得到较优的识别性能。本文所提出的 SDNMF 算法在实验中表现最好，这主要是因为 SDNMF 同时考虑了数据的局部几何结构、判别信息以及分解结果的非负性，从而得到了最优的识别性能。

参 考 文 献

[1] Lee D D, Seung H S. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization[J]. Nature, 1999, 401(6755): 788-791

[2] Li S Z, Hou X W, Zhang H J, et al. Learning spatially localized, parts-based representation[C]// Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2001, 1: 207-212

[3] Hoyer P O. Non-negative sparse coding[A]// Proc. IEEE Workshop on Neural Netw. Signal Process[C]. Martigny, Valais, Switzerland: IEEE, 2002: 557-565

[4] Liu W X, Zheng N N, Lu X F. Non-negative matrix factorization for visual coding[C]// Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 2003, 3: 293-296

[5] Wang Yuan, Jia Yunde, Hu Changbo, et al. Fisher non-negative matrix factorization for learning local features[C]// ACCV. 2004

[6] Guillamet D, Vitria J, Schiele B. Introducing a weighted non-negative matrix factorization for image classification[J]. Pattern Recognition Letters, 2003, 24(14): 2447-2454

[7] Ding C, Li T, Peng W, et al. Orthogonal nonnegative matrix t-factorizations for clustering[C]// Proceedings of the 12th ACM SIGKDD International Conference. 2006

[8] Roweis S T, Saul L K. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding[J]. Science, 2000, 290(5500): 2323-2326

[9] Cai Deng, He Xiaofei, Wu Xiaoyun, et al. Non-negative matrix factorization on manifold[C]// ICDM. 2008

[10] He Xiao-fei, Yan Shui-cheng. Face recognition using laplacianfaces[J]. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328-340

[11] Cai Deng, He Xiao-fei. Locality sensitive discriminant analysis [C]// International Joint Conference on Artificial Intelligence. 2007: 708-713

（上接第 200 页）

[10] Fan Shi-qing, Zhang Wen-xiu, Wei Xu. Fuzzy Inference based on fuzzy concept lattice[J]. Fuzzy sets and systems, 2006, 157: 3177-3187

[11] Shao M W, Liu M, Zhang W X. Set approximations in fuzzy formal concept analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158 (23): 2627-2640

[12] Belohlavek R, Vychodil V. Reducing the size of fuzzy concept lattices by hedges[C]// FUZZ-IEEE 2005, The IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Reno, Nevada, USA, 2005: 663-668

[13] Belohlavek R, Sklenar V. Formal concept analysis constrained by attribute-dependency formulas[J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2005, 3403: 176-191

[14] Zhang Wen-xiu, Ma Jian-min, Fan Shi-qing. Variable threshold concept lattice[J]. Information Sciences, 2007, 177(22): 4883-4892