

参数曲线曲面降阶研究

石 茂¹ 康宝生² 叶正麟¹ 白鸿武¹

(西北工业大学理学院数学系 西安 710072)¹(西北大学信息科学与技术学院 西安 710069)²

摘 要 参数曲线曲面降阶是当今计算机辅助几何设计研究的热点之一,已经被广泛地应用在 CAD 系统之间的几何数据的传输、几何造型中的求根和求交的计算、数据的几何压缩、曲线曲面的光顺处理、字符的构造以及参数曲线段的提取和信号的滤波等。以参数 Bézier 曲线降阶方法为主线,其它如 B 样条、广义 Ball、广义 C-Bézier 等参数曲线曲面降阶为辅进行了综述讨论。最后给出了参数曲线曲面降阶中有待进一步解决的问题。

关键词 Bézier 曲线曲面, B 样条曲线曲面, 数据交换, 降阶

中图法分类号 TP301 **文献标识码** A

Research on Degree Reduction of Parameters Curves and Surfaces

SHI Mao¹ KANG Bao-sheng² YE Zheng-lin¹ BAI Hong-wu¹

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)¹

(College of Information Science and Technology, Northwest University, Xi'an 710069, China)²

Abstract The degree reduction of parameters curves and surfaces is one of the hottest topics in the researches of computer aided geometric design. This paper gave an overview about the methods and the problem of degree reduction for curves and surfaces in recent years. We mainly stated the degree reduction of Bézier curves and surfaces, the others curves and surfaces such as B-splines etc. were also mentioned.

Keywords Bézier curves and surfaces, B-splines, Data exchange, Degree reduction

参数曲线曲面降阶逼近问题是 Forrest^[1]于 1972 年提出来的,其目的是在允许的误差范围内用低阶参数方程逼近类型的高阶参数方程。1988 年随着国际标准化组织(ISO)的产品模型数据交换标准 STEP 的建立^[2],参数曲线曲面的降阶技术成为 CAD 的热点研究问题之一。目前主要集中在以下几个方面:CAD 系统之间的几何数据的传输^[3],几何造型中的求根、求交的计算^[4-6],数据的几何压缩^[7],曲线曲面的光顺处理,字符的构造以及参数曲线段的提取和信号的滤波等^[8-11]。

由于存在上述众多工程上的应用,到目前为止每年都有相关的研究论文发表在国内外的学术期刊或会议论文集上。总的趋势是在许多“旧”问题被研究清楚的同时又有很多新观点和新问题被提了出来。基于以上的原因,本文对参数曲线曲面降阶方法进行综述,第 1 节给出与参数曲线曲面降阶有关的定义;第 2 节论述 Bézier, B 样条、广义 Ball 以及广义 C-Bézier 等参数曲线曲面的降阶方法;第 3 节给出了有理参数曲线曲面的降阶论述;第 4 节为区间参数曲线曲面的降阶;最后给出了参数曲线曲面降阶中存在的问题以及今后的研究方向。

1 参数曲线曲面降阶问题及相关定义

参数曲线曲面降阶问题可以表述如下:

问题 1 给定一个 n 次参数曲线 $x_n(t)$ 寻找一个 $m(m < n)$ 次参数曲线 $\bar{x}_m(t)$, 使得

$$\min = \|x_n(t) - \bar{x}_m(t)\|$$

当 $x_n^{(r)}(t) = \bar{x}_m^{(r)}(t), r=0, \dots, \alpha-1; 2\alpha+1 < m, t=0, 1$ 时,降阶曲线 $\bar{x}_m(t)$ 在端点处具有 $C^{\alpha-1}$ 阶连续^[12];当 $x_n^{(r)}(v) = \bar{x}_m^{(r)}(\phi(v)), r=0, \dots, \alpha-1; 2\alpha+1 < m, t=0, 1$ 时,降阶曲线 $\bar{x}_m(t)$ 在端点处具有 $C^{\alpha-1}$ 阶连续^[13,14],其中 $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 是保持单增的微分同胚映射。

问题 2 已知一个 $m \times n$ 次的参数曲面 $x_{mn}(u, v)$ 寻找 $p < m, q < n$ 次的参数曲面 $\bar{x}_{pq}(\phi(u), \varphi(v))$, 且满足

$$\min = \|x_{mn}(u, v) - \bar{x}_{pq}(u, v)\|$$

如果要求角点处满足 $C^{\alpha+\beta-2}$ 连续的参数曲面降阶问题^[15,16], 则需加上

$$s. t. \frac{\partial^{\lambda+\eta}}{\partial u^\lambda \partial v^\eta} x_{mn}(u, v) = \frac{\partial^{\lambda+\eta}}{\partial u^\lambda \partial v^\eta} \bar{x}_{pq}(u, v)$$

$$\lambda=0, \dots, \alpha-1; \eta=0, \dots, \beta-1; u=0, 1; v=0, 1$$

对曲面的几何连续性的约束条件可参见文献[17]。参数曲面的降阶可以看成是参数曲线在三维空间的推广。

对降阶误差有如下的定义^[18]。

定义 1 对一条已知的参数曲线曲面,如果只有求出其相应的降阶曲线后,才能算出其逼近误差,称其为事后误差;否则,称其为先验误差。

到稿日期:2009-11-18 返修日期:2010-01-27 本文受国家自然科学基金(No. 60671063),陕西省自然科学基金(No. 2006A02)资助。

石 茂(1972-),男,博士生,CFP 会员,主要研究方向为计算机辅助几何设计, E-mail: Shimao@china. com. cn;康宝生(1961-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计;叶正麟(1943-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计;白鸿武(1959-),男,教授,主要研究方向为计算机辅助几何设计。

2 整形参数曲线曲面降阶的方法

2.1 基于凸组合的降阶

这种降阶方法是 Forrest^[1] 于 1972 年提出来的。随后 Eck^[12,21] 将其与 L^∞ 和 L^2 逼近相结合研究了 Bézier 曲线和张量积 Bézier 曲面的最优降阶逼近问题; Farin^[22], Piegl^[23] 等又分别将其推广到了有理 Bézier 曲线和 B 样条曲线的降阶上。凸组合降阶的主要思想为:

设未知的 $n-1$ 次 Bézier 曲线的控制顶点 $\{\bar{b}_i\}_{i=0}^{n-1}$ 和已知的 n 次 Bézier 曲线控制顶点 $\{b_i\}_{i=0}^n$ 有如下的关系^[12,19,20]

$$b_i = \frac{1}{n} (i \cdot \bar{b}_{i-1} + (n-i) \cdot \bar{b}_i) \quad (i=0, \dots, n) \quad (1)$$

由式(1)可得

$$\bar{b}_i^I = \frac{(-1)^i}{\binom{n-1}{i}} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{n}{j} b_j \quad (j=0, \dots, n-1) \quad (2)$$

$$\bar{b}_{n-1}^H = -\frac{(-1)^i}{\binom{n-1}{i}} \sum_{j=i+1}^n (-1)^j \binom{n}{j} b_j \quad (i=0, \dots, n-1) \quad (3)$$

那么 $n-1$ 次的 Bézier 曲线的控制顶点 $\bar{b}_i (i=0, \dots, n-1)$ 可由凸线性组合得出^[12,21]

$$\bar{b}_i = (1-\lambda_i) \bar{b}_i^I + \lambda_i \bar{b}_i^H \quad (\lambda_i \in [0, 1]; i=0, \dots, n-1) \quad (4)$$

随着 λ_i 的不同取值, 可以得到不同的结果。

B 样条曲线上的降阶算法为^[23]: 1) 通过节点插值将原 B 样条曲线分解成一系列的 Bézier 曲线段; 2) 应用式(4)对各 Bézier 曲线段降阶; 3) 删除多余的重节点将 Bézier 曲线转换为 B 样条曲线。

这种方法的优点是: 1) 可以通过 λ_i 直接求出 Bézier 曲线降阶控制顶点 $\bar{b}_i (i=0, \dots, n-1)$, 避免了对多项式基变换降阶方法中的变换矩阵的病态条件的讨论。降阶的结果具有明显的几何意义和误差界^[12,19,24]。缺点是: 1) 当要求保端点 $C^{\alpha-1} (\alpha > 1)$ 连续降阶时 λ_i 没有显示表达式^[12,21]; 2) 对 B 样条参数曲线曲面, 在降阶和重节点的删除过程中都会产生误差, 很难给出显式误差界。

2.2 Lagrange 函数法

已知以 n 次 Bézier 曲线 $x_n(t)$ 退化到 $m (m < n)$ 次 Bézier 曲线 $\bar{x}_m(t)$ 的充要条件为^[25] $\Delta^{m+1}(b_0 + \epsilon_0) = \Delta^{m+2}(b_0 + \epsilon_0) = \dots = \Delta^n(b_0 + \epsilon_0) = 0$, 考虑使扰动总量

$\sum_{i=0}^n \|\epsilon_i\|^2 = \min$, 得到一个含有 $n-m$ 个约束条件的 Lagrange 函数

$$L = \sum_{i=0}^n \|\epsilon_i\|^2 + \left[\sum_{i=1}^{n-m} \mu_i \Delta^{m+i}(b_0 + \epsilon_0) \right] \quad (5)$$

求出 $\{\epsilon_i\}_{i=0}^n, \{\mu_i\}_{i=1}^{n-m}$ 即可得到最佳降阶逼近曲线。如果要求端点具有 $\alpha-1$ 阶连续性, 可令 $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \dots = \epsilon_{\alpha-1} = \epsilon_{n-\alpha+1} = \dots = \epsilon_n = 0$ 。

Lagrange 函数降阶法(也称控制顶点扰动法)首先被胡事民等^[26] 应用到 Said-Ball 曲线的降阶上, 随后胡事民等^[27-29] 将其推广到 Bézier 曲线、张量积、三角域 Bézier 曲面的降阶研究上。2002 年周登文等^[30] 讨论了距离平方几何范数极小的情况, 即: $\int_0^1 \|\epsilon_i B_i^r(t)\|^2 dt = \min$, 并说明对张量积曲面降阶的计算量要比文献^[28] 的方法少约 25%。2003 年郑建民等^[31] 又将控制顶点扰动法推广到了带有权因子的条件极小

值问题 $\sum_{i=0}^n \omega_i \|\epsilon_i\|^2 = \min$, 证明了 Bézier 曲线在区间 $[0, 1]$ 两端点带 $(\alpha-1, \beta-1)$ 次插值条件的降多阶最佳 L^2 逼近问题, 等价于当权因子为

$$W_i = \begin{cases} 1 & i=0, \dots, \alpha-1; \\ & i=n-\beta+1, \dots, n \\ \frac{(i+\alpha) \cdots (i+1)(n-i+\beta) \cdots (n-i+1)}{i \cdots (i-\alpha+1)(n-i) \cdots (n-i-\beta+1)} & \alpha \leq i \leq n-\beta \end{cases} \quad (6)$$

的 Euclidean 范数来寻求其控制顶点的带约束最小扰动量。当一次性降阶次数大于 1 时, 没有显式误差公式^[18]。

2000 年以后秦开怀^[32]、雍俊海^[33]、2003 年潘日晶^[34] 等分别给出了均匀 B 样条曲线降一次的 Lagrange 函数法。文献^[32] 给出的 B 样条曲线退化条件为

$$S_j = [0, \dots, 0, (k-1)! M^k(j+k-1) [V_j + \epsilon_j, \dots, V_{j+k-1} + \epsilon_{j+k-1}]^T = 0 \quad (7)$$

式中, V_j, \dots, V_{j+k-1} 为 B 样条曲线的控制顶点。 $M^k(i)$ 为 B 样条曲线在 $t \in [t_i, t_{i+1})$ 时的 $k \times k$ 阶基矩阵。

文献^[33] 给出的退化条件为

$$S_j = \sum_{j=i-k+1}^i (-1)^{i-j} \binom{k-1}{i-j} (V_j + \epsilon_j) = 0 \quad (8)$$

文献^[34] 给出的退化条件为

$$S_j = \sum_{j=i-k+1}^i a_{k-1,j}(i) (V_j + \epsilon_j) = 0, k-1 \leq i \leq n, t_i < t_{i+1} \quad (9)$$

式中, $a_{k-1,j}(s)$ 的含义可参见文献^[34]。

然后应用式(7), 式(8), 式(9) 分别构造相应的 Lagrange 函数, 求出 ϵ_i 即可得到降一阶后的 B 样条曲线。2001 年雍俊海等^[35] 又给出了非均匀 B 样条曲线上的 Lagrange 函数降阶法。文献^[32-35] 都给出了 B 样条曲线降阶的误差分析。

2006 年江平等^[36] 给出了基于 Lagrange 函数法的 WS-GB^[37] 曲线降阶。

Lagrange 函数降阶法的优点是几何意义明显, 数值分析简单; 缺点是对一条 k 阶 B 样条曲线来说, 如果其能精确地降阶为 $(k-1)$ 阶 B 样条曲线, 那么原 k 阶 B 样条曲线应该为一条整体的 $(k-2)$ 次多项式曲线, 因此在降阶过程中会产生较大的误差^[32,38], 所以文献^[32,34] 通过节点插值来克服以上的缺点。

2.3 $L_p (p=1, 2, \infty)$ 范数下的降阶方法

$L_p (p=1, 2, \infty)$ 范数下的降阶方法是利用已知的如第一、二类 Chebyshev 多项式、Legendre 多项式、Jacobi 多项式等在 L_p 下的最佳逼近性质来实现参数多项式曲线曲面的降阶逼近。此方法需要进行多项式基之间的转换^[39-42], 这就需要多项式基转换矩阵是否为病态矩阵进行讨论^[40-42]。

2.3.1 基于 L_∞ 范数的降阶方法

已知第一类 Chebyshev 多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), n=0, 1, \dots, x \in [-1, 1]$$

它与 Bernstein 基函数有如下表达式^[41]

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{2n}{2k} B_k^n(t), t \in [0, 1]$$

以及文献^[41] 中 $B_k^n(t) = \sum_{j=0}^n M_{kj}^{-1} T_j(t), t \in [0, 1], M_{kj}^{-1}$ 的含义

请参见文献[41]。

如果令^[43]

$$T_n' = E_{n-2\alpha, \alpha, \alpha} 2^{-n} T_{n-2\alpha, \alpha, \alpha}(2x-1) \quad (10)$$

可实现保端点 $2-1$ 阶连续。当 $\alpha=0, 1$ 时有显式解, 当 $\beta>1$ 时无显示解, 需要应用 Remez 算法进行求解。一般地当 $\alpha=1$ 时, 称

$$T^*(x) = T_n((2x-1)(\cos \frac{\pi}{2n}))$$

为移位的 Chebyshev 多项式。

基于第一类 Chebyshev 多项式下的 Bézier 曲线的降阶逼近问题由 Watkins 和 Worsley^[39] 于 1988 年提出。另外该文论述了如果降阶误差大于给定的误差 $\frac{\epsilon}{1-n}$ 时, 可对原曲线进行先细分后降阶的算法, 细分的次数由 $s > \frac{1}{n} \log_2 \left(\frac{\alpha_n}{\epsilon} \right)$ 决定。1988 年 Lachance^[43] 讨论了基于 L_∞ 范数下的张量积 Bézier 曲面降阶。

1992 年 Weinstein 等^[44] 和 1995 年 Bogacki 等^[45] 将 n 次 Bézier 曲线首先表示为

$$x_n(t) = b_0 B_0^n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j B_j^n(t) + b_n B_n^n(t)$$

然后将中间项 $\sum_{j=1}^{n-1} b_j B_j^n(t)$ 转化为移位的 Chebyshev 多项式的形式 $\sum_{j=2}^n d_j T_j^*$, 降阶到 $m (< n)$ 次 $\sum_{j=2}^m d_j T_j^*$ 后再转换成 Bernstein 的形式, 实现了在 L_∞ 范数下的最佳逼近和近似最佳保端点 C^1 连续的多次降阶逼近。

为了解决在 C^{r-1} , $\alpha > 1$ 的情况下的显式解的问题, Kim^[46] 和 Ahn^[47] 引入了约束 Jacobi 多项式

$$J_n^\alpha(t) = \frac{t^{\alpha+1}(t-1)^{\alpha+1} P_{n-2\alpha-2}^{(2\alpha+1, 2\alpha+1)}(2t-1)}{\binom{2n-2}{n-2\alpha-2}}, t \in [0, 1]$$

式中, $P_m^{\beta, \beta}(x)$ 为 Jacobi 多项式。但误差分析又变得比较困难。

2006 年文献[36]将最佳一致逼近应用到 WSGB 曲线降一阶的研究中。

最佳一致逼近降阶的一个优点是在一定条件下可以得到一个与参数无关的上界^[43, 48]。但是在计算保端点插值降阶时没有显示表达式。对于向量值多项式参数曲线曲面的最佳一致逼近降阶一般不等价于对整体多项式参数曲线曲面的降阶^[49]。

2.3.2 基于最小二乘 L_2 范数的降阶方法

最小二乘 L_2 范数曲线的降阶是讨论在希尔伯特空间中两条曲线距离的最小误差问题。即

$$d(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_m) = \int_0^1 \|x_n(t) - \bar{x}_m(t)\|^2 dt \quad (11)$$

式中, $(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_m)$ 为函数 $d(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_m)$ 的极小点, 由方程

$$\frac{\partial d(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_m)}{\partial \bar{b}_i} = 0, i=0, \dots, m$$

决定。

一般地, 对于 Bézier 曲线下的最小二乘方法降阶问题在求解过程中, 可以通过两类正交多项式来简化计算步骤。一类是 Legendre 多项式, 它与 Bernstein 多项式有如下的变换公式^[40, 21]

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{k}{i} B_i^k(x)$$

$$\text{以及 } B_k^r(x) = \sum_{i=0}^n \frac{2i+1}{n+i+1} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} \frac{\binom{i}{j}}{\binom{n+i}{k+j}} P_i(x),$$

$k=0, \dots, n$

另外一类是 Jacobi 多项式 $J_n^{(r,s)}(x)$, 它与 Bernstein 多项式的变换公式如下^[19]

$$J_n^{(r,s)}(2x-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+i} \frac{\binom{n+r}{i} \binom{n+s}{n-i}}{\binom{n}{i}} B_i^n(x)$$

1991 年 Moore^[50] 等给出了 Bézier 曲线下的最小二乘法降阶的研究, 随后 1992 年 Weinstein^[44] 等讨论了保端点 C^0 条件下的最小二乘多次降阶; 1999 年, Lutterkort 等^[51] 研究了 Bézier 曲线 L_2 范数和控制顶点的 Euclidean 范数 (l_2 范数) 之间的关系; 2002 年, 陈国栋^[15] 等将 n 次 Bézier 曲线表示为 $x_n(t) = \sum_{i=0}^r \bar{b}_i B_i^r(t) + \sum_{j=r+1}^{n-1} b_j B_j^n(t) + \sum_{i=m-s}^m \bar{b}_i B_i^m(t)$, 然后通过将 Bernstein 多项式转换成 Jacobi 多项式的形式实现了保端点 (r, s) 阶条件下的降多阶逼近。2005 年章仁江等^[61] 推广了文献[15]的结果, 给出了先验误差。2006 年陆利正等^[14] 讨论了保端点 G^2 连续的情况。

2004 年郭清伟等^[52] 给出了保角点插值的张量积 Bézier 曲面降阶。2003 年和 2005 年 Rababah^[53, 54] 基于 L^2 和 l^2 距离给出了保持切平面连续的三角域 Bézier 曲面降阶研究; 随后陆利正等^[55]、郭清伟等^[56] 和胡倩倩等^[57] 推广了文献[53]的方法, 实现了三角域 Bézier 曲面的一次降多阶, 两者都给出了误差分析。

对于 B 样条曲线降阶则多采用式(11)的方法。1998 年 Wolters^[58] 等将 B 样条曲线升阶的开花算法和最小二乘法结合起来实现了 B 样条参数曲线的降阶。2004 年张彩明等^[38] 和 2006 年张锐等^[59] 研究了保端点插值的情况。2009 年潘日晶等^[60] 给出了基于广义逆矩阵下的 B 样条曲线的降阶。为了提高降阶精度, 文献[59]给出了带约束的最佳平方逼近技术。文献[60]则采用先插值节点再降阶的步骤。

对于广义 Bézier 曲线的降阶的研究主要有 C_B_Bézier 曲线^[87, 89] 和 H-Bézier 曲线^[88] 的降阶。

L_2 范数下的参数曲线曲面的降阶有如下的一些性质: 1) L_2 范数下的降阶对向量值曲线曲面的降阶等价于对整个曲线的降阶^[49]; 2) 在 L_2 范数下的一次性多阶降阶和分步一阶多次降阶的结果是一样的^[44]; 3) L_2 范数下的降多阶逼近等价于曲线的控制顶点在 Euclidean 范数下的最佳降多阶逼近^[51, 62]; 4) 向量值 Bézier 曲线曲面的 L_2 的降阶精度要优于 L_∞ 的降阶精度^[15, 63]; 5) 可以给出 L_2 降阶的先验误差^[61, 64]; 6) L_2 的降阶与 Bézier 参数曲线曲面的参数化有关^[14] 等。

2.3.3 基于 L_1 范数下的降阶方法

已知第二类 Chebyshev 多项式为

$$U_n = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)}, x \in [-1, 1]$$

其与 Bernstein 多项式有如下的转换公式^[42]

$$U_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{\binom{2n+2}{2i+1}}{\binom{n}{i}} B_i^n(t), B_k^r(t) = \sum_{j=0}^n M_n^{-1}(j),$$

$k)U_j(t), k=0, \dots, n$

1997年 Kim^[65]应用第二类 Chebyshev 多项式的形式给出了次数 $n \leq 5$ 的 Bézier 曲线保端点插值的 L_1 范数下的降阶方法及其逼近误差。陆利正等^[42]于 2007 年把这个方法推广到多次降阶,同时说明了第二类 Chebyshev 多项式与 Bernstein 多项式之间的基转换矩阵式是良态的。最后给出了事后误差。

2.3.4 基于 L_p 范数下的降阶方法

L_p 范数下的降阶是用统一性的方法对 Bézier 参数曲线的降阶的理论上的分析,以期望找到更好的降阶方法。到现在只有 Brunnett 等^[19]和 Szafnicki^[63]等对其进行了研究。

2.4 基于离散点递归优化的降阶方法

离散点递归降阶就是在参数曲线上取一定的采样点,然后使得降阶前后的参数曲线之间满足欧几里得距离最小,即^[12,20,66,68]

$$\epsilon(t) = \min \max \|x_n(t_i) - \bar{x}_m(t_i)\|, (i=0, \dots, l)$$

1987年 Hoschek^[66]给出了基于最小二乘法下的离散点的向量值 Bézier 曲线的降阶方法。为了保证 $\epsilon(t)$ 达到在 G^{r-1} 连续条件下的最小值,该文用到了重新参数化。2002年 Pottmann 等^[67]先原曲线上取采样点,然后应用牛顿迭代法求出一条活动曲线以达到降阶的目的。但是牛顿迭代法具有局部求解性。2003年和 2004年文献^[20,68]应用遗传算法给出上面问题的解,这是一种全局的多目标优化方法。2009年 Wozny 等^[69]应用 Bézier 曲线的对偶基给出了保端点约束的离散降阶,并证明了该方法的复杂度为 $O(nm)$ 。它可能优于现存的大多数算法。

基于离散点迭代法数值计算具有原理简单、误差小等优点,但对误差没有解析表达式。

3 有理参数曲线曲面的降阶逼近

虽然有理参数曲线曲面是整形参数曲线曲面的推广,但这两类曲线曲面有着本质上的区别。在降阶研究中不仅要考虑权因子为正的条件下,还要考虑坐标系的选取问题。

定理 1^[70] 有理参数曲线曲面降阶精确降阶的充要条件是:分子分母有相同次幂的公因式或最高项次数同时为零。

现在对有理参数曲线曲面的降阶的研究大致可分为齐次坐标^[75-78]和非齐次坐标^[70-74]下的降阶逼近与保权因子为正^[70,74,75,77]和不考虑权因子^[71-73,76,78,86]为正的降阶。

1986年 T. W. Sederberg^[71]在对有理参数曲线的不恰当参数化的讨论时,通过求公因式的方法实现了有理参数曲线的降阶。随后又与常庚哲合作^[72]通过寻找有理参数曲线分子分母的最佳线性公因子给出了非保端点的降阶算法。1993年陈发来^[73]通过位移的 Chebyshev 多项式给出了保端点插值的降阶方法。

2003年文献^[74]应用离散约束优化的方法实现了有理 Bézier 参数曲线保权因子为正及保端点插值的多次降阶,同时指出该方法可能会引起不恰当的参数化。同年赵前进^[75]将 Langrange 函数优化求极值法推广到了有理 Bézier 曲面的降阶。他把有理 Bézier 曲面降阶逼近问题转化为求解齐次多目标二次规划问题,对权因子也加以约束。2003年成敏等^[76]应用 NURBS 曲线的显式矩阵和 Chebyshev 多项式最佳一致逼近理论,给出了在齐次坐标系下 NURBS 曲线的多次降阶。

2006年覃廉等^[77]将二次规划应用到了 NURBS 参数曲线曲面的保权因子为正的降阶上。

2006年文献^[78]等先对 NURBS 曲线离散点采样形成一个线性方程组,然后通过求解广义逆矩阵的方式求出降阶控制顶点,该文没有讨论权因子为正的情况。同年文献^[79]基于定理 1 并利用符号计算的方法给出了 Nurbs 曲线的降阶方法。2008年文献^[80]将文献^[70,74]的方法推广到了 NURBS 曲线的降阶。

4 区间参数曲线的降阶逼近

区间曲线曲面是以区间 $\{([a_i, b_i], [c_i, d_i])\}_{i=0}^n$ 及其 Bézier、B 样条、Ball 等基函数来表示的。相对基于控制顶点的参数曲线曲面的降阶,区间参数曲线曲面的降阶问题要多加两个约束条件,即^[82]

问题 3 给定 n 次区间参数曲线 $[x]_n(t)$, 找到一个 $m(m < n)$ 次的区间参数曲线 $[\bar{x}]_m(t)$, 使 $[x]_n(t) \subset [\bar{x}]_m(t)$, 且 $[\bar{x}]_m(t)$ 的宽 $\|\bar{x}_{\max}(t) - \bar{x}_{\min}(t)\|$ 尽可能地小。

问题 4 给定 $m \times n$ 次的区间参数曲面 $[x]_{mn}(u, v)$, 找到一个 $p \times q$ 次 ($p < m, q < n$) 的区间参数曲面 $[\bar{x}]_{pq}(u, v)$, 使得 $[x]_{mn}(u, v) \subset [\bar{x}]_{pq}(u, v)$, 且 $[\bar{x}]_{pq}(u, v)$ 的宽 $\|\bar{x}_{\max}(u, v) - \bar{x}_{\min}(u, v)\|$ 尽可能地小。

区间参数曲线曲面的降阶首先是由娄文平等^[81]提出来的,在文献^[81]中他们使用 L_1 范数度量低阶区间 Bézier 曲线界定高阶区间 Bézier 曲线的问题。2000年与 2002年陈发来等^[82,83]讨论了线性规划和 L_∞ 两种方法下的区间 Bézier 曲线和区间 B 样条曲线的降阶。2002年孙红兵等^[84]把文献^[82]的方法推广到了区间分 6 量积 Bézier 曲面上,2004年陈发来^[85]等给出了圆盘 Bézier 曲线的降阶。2006年孙红兵等^[86]又将文献^[82]其推广到了其次坐标下的区间有理 Bézier 曲线的降阶上。

5 参数曲线曲面降阶中存在的问题

虽然参数曲线曲面研究已经取得了很大的进展,但是仍然有一些问题需要解决,集中体现在以下几点。

(1)新的优化算法在参数曲线曲面的应用。通过上面的论述我们看到不同的降阶方法有不同的优缺点,那么是否存在一种统一的方法能同时作用于几何设计与计算中的大多数参数曲线曲面的降阶,其既能满足我们所需要的复杂度,也能和参数曲线曲面本身的几何性质结合得非常完美。反之,这些方法经过改进后对优化论和逼近论又有什么样的促进作用?

(2)参数曲线曲面降阶中保形的研究。我们认为这也是一个非常重要的问题。例如:如果一个参数曲线曲面本身不要求光顾等,在降阶中我们该如何处理。

(3)B 样条参数曲线曲面的节点在降阶中的作用。因为在 B 样条的研究中雍俊海等、秦开怀等、潘日晶等分别给出了 3 种退化条件,这 3 种退化条件之间有什么样的内在联系?其次对 B 样条的误差分析几乎和节点有关,那么节点在降阶中的本质作用又是什么?

(4)参数曲线曲面的降阶优化可以看成是一个多目标的优化求解过程。而现在的绝大多数方法都是基于单目标的优化算法。Lachance 在文献^[43]中给出了一个实例,参数曲线

在 L_∞ 下的降阶精度没有其在转化为显函数的情况下的逼近误差高。因此比较各种算法在单目标和多目标条件下的降阶是一个很有意义的问题。

(5) 参数化对不同降阶方法的影响。 L_∞ 的降阶是与多项式参数曲线曲面的参数化无关的, 而 L_2 的降阶又与整形参数曲线曲面的参数化有关。其他降阶算法对参数化的敏感度又是怎样?

(6) 对有理参数曲线曲面降阶的各个方法现在都不是很完美。为了保证权因子为正, 用到了约束优化的方法, 这很难分析降阶误差。因此对有理参数曲线曲面的降阶需要进一步的研究, 同时对 NURBS 降阶还要考虑节点的问题。

(7) C-Bézer 样条曲线降阶的研究。

结束语 本文对几类比较常见的参数曲线曲面的降阶方法给予了综合论述。分析了参数曲线曲面降阶中有待解决的几个问题, 并展望了其未来可能的发展方向。由于参数曲线曲面降阶是一个将逼近最优化理论和工程应用结合得很紧密的方向, 因此里面还存在更多的我们没有涉及到的地方, 本文不可能面面俱到, 只是希望能起到一个抛砖引玉的作用。

参 考 文 献

- [1] Forrest A R. Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials[J]. Computer Journal, 1972, 15(1): 71-79
- [2] 成敏. 曲线曲面降阶方法综述[J]. 浙江工业大学学报, 2005, 33(2), 231-235
- [3] Dannenberg L, Nowacki H. Approximation conversion of surface representation with polynomial base[J]. Computer Aided Geometric Design, 1985, 2(2): 123-131
- [4] Petersen S. A daptive contouring of three-dimensional surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 1984, 1(1): 61-72
- [5] Watkins M A, Worsey A J. Degree reduction of Bézier curves [J]. Computer Aided Design, 1988, 20(7): 398-405
- [6] Barton M, Juttler B. Computing roots of polynomials by quadratic clipping[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24(3): 125-141
- [7] Patrikalakis N M. Approximation conversion of rational splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 1989, 6(2): 155-165
- [8] Hersch R G. Font rasterization: The state of the art[M]. Tutorial paper of Lab. De Systemes Peripheriques, 1991. diwww. epfl.ch/w3lsp/publications/typography/frsa.pdf
- [9] Farin G. Degree reduction fairing of cubic B-spline curves[C]// Barnhill R E, ed. Geometry Processing for Design and Manufacturing. SIAM, Philadelphia, 1992: 87-99
- [10] Imine M, Nagahashi H. A new approach in polynomials and Bézier parametric piecewise modeling[J]. Computer Networks and ISDN Systems, 1997, 29(14): 1559-1770
- [11] Kim H O, Kim J H, Moon S Y. Degree reduction of Bézier curves and filter banks[J]. Computers and Mathematics Applications, 1996, 31(10): 23-30
- [12] Eck M. Degree reduction of Bézier curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1993, 10(4): 237-251
- [13] Degen W L F. Geometric Hermit Interpolation [J]. Computer Aided Geometric Design, 2005, 22(10): 573-592
- [14] Lu L Z, Wang G Z. Optimal multi-degree reduction of Bézier curves with G_2 -continuity[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(9): 673-683
- [15] Chen G D, Wang G J. Optimal multi-degree reduction of Bézier curves with constraints of endpoints continuity[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(6): 365-377
- [16] 郭清伟, 陶长虹. 三角 Bézier 曲面的降阶[J]. 复旦大学学报: 自然科学版, 2006, 45(2): 270-276
- [17] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001
- [18] 王国瑾, 等. Bézier 曲线约束降阶算法的分析与比较[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2007, 11(11): 1085-1089
- [19] Brunnett G, Schreiber T, Braun J. The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(8): 773-788
- [20] Shi M, Ye Z L, Kang B S. Degree Reduction of Bézier Surfaces [J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 42(25): 32-34
- [21] Eck M. Least squares degree reduction of Bézier curves [J]. Computer Aided design, 1995, 27(11): 845-851
- [22] Farin G. Algorithms for rational Bézier curves[J]. Computer Aided Design, 1983, 15(2): 73-77
- [23] Pigel L, Tiller E. Algorithm for degree reduction of B-spline curves[J]. Computer Aided Design, 1995, 27(2): 101-110
- [24] Snwoo H, Lee N. A unified matrix representation for degree reduction of Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2): 151-164
- [25] 满家巨, 等. Bézier 曲线的降阶逼近[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2000: 117-120
- [26] Hu S M, Jin T G, Sun J G. Properties of two types of generalized Ball curves[J]. Computer Aided Design, 1996, 28(2): 125-133
- [27] Hu S M, Jin T G, et al. Approximation degree reduction of Bézier curves[J]. Tsinghua Science and Technology, 1998, 3(2): 997-1000
- [28] Hu S M, et al. Approximation degree reduction of rectangular Bézier surfaces[J]. Chinese Journal of Software, 1997, 4: 353-361
- [29] Hu S M, Zuo Z, Sun J G. Approximate degree reduction of Triangular Bézier surfaces [J]. Tsinghua Science and Technology, 1998, 3(2): 1001-1004
- [30] 周登文, 刘芳, 居涛, 等. Bézier 曲面降阶逼近的新方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(6): 553-556
- [31] Zheng J M, Wang G Z. Perturbing Bézier coefficients for best constrained degree reduction in the L_2 -norm[J]. Graphical Models, 2003, 65(6): 351-368
- [32] 秦开怀, 等. B 样条曲线降阶新方法[J]. 计算机学报, 2000: 306-310
- [33] 雍俊海, 等. 均匀 B 样条曲线降阶[J]. 计算机学报, 2000: 537-540
- [34] 潘日晶, 等. B 样条曲线的降阶公式及近似降阶方法[J]. 计算机学报, 2003: 1254-1259
- [35] Yong J H, Hu S M, Sun J G. Degree reduction of B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(2): 117-127
- [36] 江平, 等. Wang_Said 型广义 Ball 曲线降阶[C]. Chinagraph, 2006
- [37] 郭弘毅. 两类新的广义 Ball 曲线[J]. 应用数学学报, 2000, 23(2): 196-205
- [38] 张彩明, 等. 扰动约束和最佳平方逼近的 B 样条曲线的降阶[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(10): 1392-1395

- [39] Watkin M A, Worsey A J. Degree reduction of Bézier curves[J]. Computer Aided Design, 1988, 20(7): 398-404
- [40] Farouki R T. Legendre-Bernstein basis transformations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 119 (1/2): 145-160
- [41] Rababah A. Transformation of Chebyshev-Bernstein polynomial basis[J]. Computational Methods Applied Mathematics, 2003, 3 (4): 608-622
- [42] Lu L Z, Wang G Z. Application of Chebyshev II-Bernstein basis transformations to degree reduction of Bézier curves[J]. Journal of Computation and applied Mathematics, 2008, 221(1): 52-65
- [43] Lachance M A. Chebyshev economization for parametric surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1988, 5(3): 195-208
- [44] Weinstein S E, et al. Degree reduction of Bézier curves by approximation and interpolation[J]. Approximation theory, G. A. Anastassiou; 503-512
- [45] Bogacki P, et al. Degree reduction of Bézier curves by uniform approximation with endpoint interpolation[J]. Computer Aided Design, 1995, 27(9): 651-661
- [46] Kim H J, Ahn Y J. Good degree reduction of Bézier curves using Jacobi polynomials[J]. Computer mathematic application, 2000, 40(10/11): 1205-1215
- [47] Ahn Y J. Using Jacobi polynomials for Degree reduction curves with C^k -continuity. Computer [J]. Aided Geometric Design, 2003, 20(7): 423-434
- [48] Eck M. Degree reduction of Bézier surfaces[C]// Fisher R, ed. The mathematics of surfaces V. Oxford University Press, 1994: 135-154
- [49] Lachance M A. Approximation by constrained parametric polynomials[J]. Rocky Mountain, 1991, 21(1): 473-488
- [50] Moore D, Warren J. Least approximations to Bézier curves and surfaces[M]. Graphics Gems, II, 1991: 406-411
- [51] Lutterkort D, Peters J, Reif U. Polynomials degree reduction in the L_2 -norm equals best Euclidean approximation of Bézier coefficients[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16(7): 607-612
- [52] 郭清伟, 朱功勤. 分6量积 Bézier 曲面降多阶的逼近方法[J]. 计算机辅助设计与图象学学报, 2004, 16(6): 777-782
- [53] Rababah A. Distance for degree raising and reduction of triangular Bézier surfaces[J]. Journal of Computational and Applied Mathematical, 2003, 158(2): 233-241
- [54] Rababah A. L_2 degree reduction of triangular Bézier surfaces with common tangent planes at vertices[J]. International Journal of Computational Geometry & Applications, 2005, 15(5): 477-490
- [55] 陆利正, 汪国昭. 基于 L_2 范数下的三角 Bézier 曲面降多阶[J]. 自然科学进展, 2006, 16(4): 409-414
- [56] 郭清伟, 陶长虹. 三角 Bézier 曲面的降多阶逼近[J]. 复旦学报: 自然科学版, 2006, 45(2): 270-276
- [57] Hu Q Q, Wang G J. Optimal multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces with corners continuity in the norm L^2 [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 215(1): 114-126
- [58] Wolters H J, Wu G, Farin G. Degree reduction of B-spline curves [J]. Computing Supplement, 1998, 13: 235-241
- [59] 张锐, 等. 基于最佳平方逼近的 B 样条曲线降阶[J]. 软件学报, 2006(Supp): 78-84
- [60] 潘日晶, 等. B 样条曲线最小二乘降阶方法[J]. 小型微型计算机系统, 2009(2): 295-301
- [61] Zhang R J, Wang G J. Constrained Bézier curves best multi-degree reduction in the L^2 -norm[J]. Progress in natural science, 2005, 15(9): 843-845
- [62] Ahn Y J, Lee B G, Park Y, et al. Constrained polynomials degree in the L^2 -norm equals best weighted Euclidean approximation of Bézier coefficients[J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2): 181-191
- [63] Szafnicki B. A unified approach for degree reduction of polynomials in the Bernstein basis part I: Real polynomials[J]. Journal of Computational and Applied mathematics, 2002, 14(2): 287-312
- [64] Zhou L, Wang G J. Constrained multi-degree reduction of Bézier surfaces using Jacobi polynomials[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(3): 259-270
- [65] Kim H O, Moon S Y. Degree reduction of Bézier Curves by L_1 -Approximation with Endpoint Interpolation [J]. Computer mathematical & Application, 1997, 33(5): 67-77
- [66] Hoschek J. Approximation of spline curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(1): 59-66
- [67] Pottmann H, Leopoldseder S, Hofer M. Approximation with active B-spline curves and surfaces[C]// Proceedings of the 10th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 2002: 8-25
- [68] 石茂, 等. 基于遗传算法的 Bézier 曲线降阶[J]. 计算机应用与软件, 2003(9): 13-16
- [69] Wozny P, Lewanowicz S. Multi-degree reduction of Bézier curves with constraints, using dual Bernstein basis polynomials [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009
- [70] 康宝生, 石茂, 张景乔. 有理 Bézier 曲线的降阶[J]. 软件学报, 2004, 15(10): 1522-1527
- [71] Sederberg T W. Improperly parametrized rational curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(1): 67-75
- [72] Sederberg T W, Chang G Z. Best linear common divisors for approximate degree reduction[J]. Computer Aided Design, 1993, 25(3): 163-168
- [73] 陈发来. 带约束的最佳线性公因子及有理曲线的降阶逼近[J]. 高等学校计算数学学报: 计算几何专辑, 1993: 14-21
- [74] 石茂. 参数曲线曲面降阶研究[D]. 西安: 西北大学, 2003
- [75] 赵前进. 有理 Bézier 曲面的降阶逼近[J]. 安徽理工大学学报: 自然科学版, 2003(3): 60-62
- [76] Cheng M, Wang G J. Multi-degree reduction of NURBS curves based on their explicit matrix representation and polynomial approximation theory [J]. Science China Ser. F Information Sciences, 2004, 47(1): 44-54
- [77] 覃廉, 关履泰. 有理曲线曲面的降阶逼近[J]. 中国图象图形学报, 2006: 1062-1067
- [78] Lai Y L, Wu J, Hung J P, et al. Degree reduction of NURBS curves [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2006, 27(11/12): 1124-1131
- [79] Chen X M, Riesenfeld R F, Cohen E. Degree Reduction for NURBS Symbolic Computation on curves [C]// Proceeding of the IEEE international conference shape modeling and applications, 2006: 28-28

后硬件子任务需要的面积,硬件子任务的配置重叠度越高,FPGA的利用率就越高。以配置重叠度为测试标准,在 $P=0.5$,软/硬件子任务个数比为1:1的条件下对分组算法进行仿真。结果如图4所示,随着子任务个数增加,配置重叠度呈线性增长。

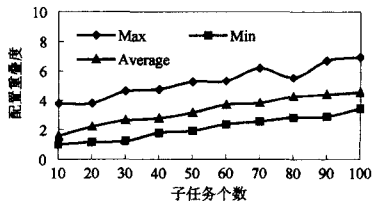


图4 硬件子任务配置重叠度

假设硬件子任务可配置,对软件子任务的调度做了仿真实验。每次实验随机产生10组任务,求出处理机利用率的最小值、最大值和平均值。分别在 $P=0.5$,软/硬件子任务个数比等于1:1和 $P=0.5$,任务个数为50的情况下测试了任务个数和硬件子任务所占的比例对算法的影响,结果如图5和图6所示。从实验结果中可看出随着任务个数的增加和硬件子任务所占的比例增加,处理机利用率略有下降。

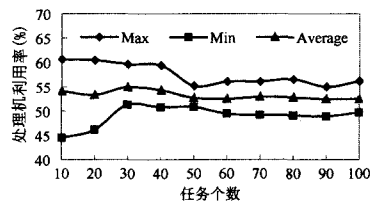


图5 任务数量对算法的影响

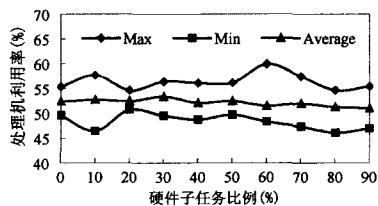


图6 硬件子任务比例对算法影响

实时多目标遗传算法^[2](Real Time Multiple goals Genetic Algorithm, RT-MGA)和动态延时蚁群系统^[4](Dynamic and Delay Ant Colony System, DDACS)是两种静态智能搜索型算法。实验随机产生一组周期任务,SHRTS算法计算出所需要的处理机个数,并求出处理机平均利用率;由于一个计划周期内的作业个数太多,RT-MGA和DDACS均无法实现,因此随机选取一组连续到达的作业进行分配,当经过100次

迭代而没有产生更优的调度结果时,算法结束。实验结果如图7所示,随着作业个数增多,RT-MGA和DDACS对处理机的利用率都有明显的下降。

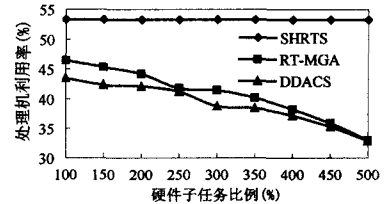


图7 SHRTS,RT-MGA和DDACS处理机利用率

在以上实验中,所有实时任务均在截止期限内完成,验证了算法的实时性。

结束语 提出了一种能够调度软/硬件混合实时任务的调度算法。算法离线判定实时任务的可调度性,降低了系统的调度开销。通过对硬件子任务分组,每组可重叠配置,有效地利用了FPGA资源。在执行前驱软件子任务的同时配置硬件子任务,降低了配置时间对实时任务执行的影响。实验结果表明该算法是有效的。

参考文献

- [1] 李仁发,刘彦,徐成.多处理器片上系统任务调度研究进展评述[J].计算机研究与发展,2008,45(9):1620-1629
- [2] OH J, WU C. Genetic-algorithm-based Real-time Task Scheduling with Multiple Goals [J]. Journal of Systems and Software, 2004,71(3):245-258
- [3] Chen R M, Lo S T, Huang Y M. Combining Competitive Scheme with Slack Neurons to Solve Real-time Job Scheduling Problem [J]. Expert Systems with Applications, 2007,33(1):75-85
- [4] Lo S T, Chen R M, Huang Y M, et al. Multiprocessor System Scheduling with Precedence and Resource Constraints Using an Enhanced ant Colony System [J]. Expert Systems with Applications, 2008,34(3):2071-2081
- [5] Steiger C, Walder H, Platzner M. Operating systems for reconfigurable embedded platforms: Online scheduling of real-time tasks [J]. IEEE Trans. on Computers, 2004,53(11):1393-1407
- [6] 齐骥,李曦,于海晨,等.一种面向动态可重构计算的调度算法[J].计算机研究与发展,2007,44(8):1439-1447
- [7] 周学功,梁樑,黄助章,等.可重构系统中的实时任务在线调度与放置算法[J].计算机学报,2007,30(11):1901-1909
- [8] 梁樑,周学功,王颖,等.采用预配置策略的可重构混合任务调度算法[J].计算机辅助设计与图形学学报,2007,19(5):635-641

(上接第238页)

- [80] 刘彬.基于遗传算法的NURBS曲线降阶[J].计算机工程,2008:194-196
- [81] Lou W P, Chen F L, Chen X Q, et al. Optimal degree reduction of interval polynomials and interval Bézier curves under L^1 norm [C]//The 6th International conference on CAD/CG. Shanghai, China, Vol. 3, Dec. 1999:1010-1015
- [82] Chen F L, et al. Degree reduction of interval Bézier curves[J]. Computer-aided design, 2000:571-582
- [83] Chen F L, Yang X F, Yang W. Degree reduction of interval B-spline curves[J]. 软件学报, 2002,14(04):490-499
- [84] 孙红兵,等.区间Bézier曲面的降阶[J].中国科学技术大学,

2002,32(2):147-154

- [85] Chen F L, et al. Degree reduction of disk Bézier curves[J]. Computer aided geometric design, 2004(21):263-280
- [86] 孙红兵,等.区间有理曲线的降阶[J].中国科学技术大学学报, 2006,36(9):968-976
- [87] 林新辉. C_B_Bézier曲线降阶逼近[D].杭州:浙江大学,2007
- [88] Huang Y, Wang G Z. Constructing a quasi-Legendre basis based on the C-Bézier basis[J]. Progress in Nature Science, 2005,15(6):559-563
- [89] Huang Y, Wang G Z. An orthogonal basis for the hyperbolic hybrid polynomial space[J]. Sci China Ser F-Inf Sci, 2007,150(1):21-28