

Ising 图模型概率推理的参数化复杂性

陈亚瑞 廖士中

(天津大学计算机科学与技术学院 天津 300072)

摘要 Ising 图模型概率推理的主要工作是通过变量求和来计算配分函数和边缘概率分布。传统计算复杂性理论证明 Ising 图模型精确概率推理是 $\#P$ 难的, 并且 Ising 图模型近似概率推理是 NP 难的。研究了 Ising 图模型精确概率推理和 Ising 均值场近似概率推理的参数化复杂性。首先证明了不同参数的 Ising 图模型概率推理的参数化复杂性定理, 指出基于变量个数或图模型树宽的参数化概率推理问题是固定参数可处理的。然后证明了 Ising 均值场的参数化复杂性定理, 指出基于自由分布树宽、迭代次数和变量个数的参数化 Ising 均值场是固定参数可处理的; 进一步, 当 Ising 图模型参数满足 Ising 均值场迭代式压缩条件时, 基于自由分布树宽和迭代次数的参数化 Ising 均值场是固定参数可处理的。

关键词 Ising 图模型, 概率推理, Ising 均值场, 参数化复杂性, 固定参数可处理
中图法分类号 TP181 **文献标识码** A

Parameterized Complexity of Probabilistic Inference in Ising Graphical Model

CHEN Ya-rui LIAO Shi-zhong

(School of Computer Science and Technology, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract Probabilistic inference of the Ising graphical model is to compute the partition function and the marginal probabilistic distribution through summing variables. Traditional computational complexity theory shows that the exact probabilistic inference of the Ising graphical model is $\#P$ -hard, and the approximate probabilistic inference is NP-hard. We analyzed the parameterized complexities of exact probabilistic inference of the Ising graphical model and the Ising mean field approximate inference. First, we proved the parameterized complexity theorems of probabilistic inference of the Ising graphical model with different parameters, which show that parameterized probabilistic inferences are fixed parameter tractable with the variable number and the graphical model treewidth as parameters respectively. Then, we proved the parameterized complexity theorems of the Ising mean field, which demonstrate that the parameterized Ising mean field is fixed parameter tractable with the combination of the free distribution treewidth, the number of iteration steps and the number of variables as parameter; furthermore, when the Ising graphical model parameters satisfy the contraction condition of the Ising mean field iteration formula, the parameterized Ising mean field is fixed parameter tractable with the combination of the free distribution treewidth and the number of iteration steps as parameter.

Keywords Ising graphical model, Probabilistic inference, Ising mean field, Parameterized complexity, Fixed parameter tractable

1 前言

Ising 图模型 (Ising graphical model) 是定义在伯努利随机向量上的马尔可夫随机场模型, 为实际系统提供了一种简洁有效的建模方法, 已广泛应用于图像处理、空间统计和社会网络等领域^[1,2]。Ising 图模型概率推理问题是通过变量求和来计算配分函数、边缘概率分布和条件概率分布。由于精确概率推理问题是难解的, 故发展了各种近似推理方法^[3]。Ising 均值场 (Ising mean field) 是 Ising 图模型上一种基本的近似推理方法, 它通过求解泛函极值进行近似概率推理, 计算出配分函数下界及边缘概率分布近似值。该方法具有简明的变

分形式、较好的近似效果, 是处理大规模复杂数据的重要工具^[3,4]。

概率推理和近似概率推理的计算复杂性是一重要的理论问题, 也是设计概率推理算法和近似概率推理算法的理论基础^[5,6]。传统计算复杂性 (traditional computational complexity) 理论指出, Ising 图模型概率推理问题是 $\#P$ 难的^[7,8], 且 Ising 图模型近似概率推理问题是 NP 难的, 即假设 $NP \not\subseteq P$, Ising 图模型上的精确概率推理至少需要指数时间, 且具有有效近似因子的近似概率推理也需要指数时间。

传统复杂性理论仅以输入规模为参数来定义计算复杂性, 但这并不能完全描述问题的难解性实质。如传统复杂性

到稿日期: 2009-11-12 返修日期: 2010-01-20 本文受国家自然科学基金 (60678049), 天津市应用基础研究计划基金 (07JCYBJC14600) 资助。
陈亚瑞 (1982-), 女, 博士生, 主要研究方向为概率推理、变分推理等, E-mail: yrchen@tju.edu.cn; 廖士中 (1964-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为人工智能、理论计算机科学等。

理论指出概率推理问题是难解的^[9,10],但树型结构、链式结构上的概率推理是可处理的;同时理论证明 Ising 均值场多项式时间内仅给出局部最优解,但在实际应用中 Ising 均值场可给出较好的近似结果^[11]。参数化复杂性理论是计算复杂性理论的一个重要分支,它通过引入问题参数来定义参数化复杂性,可进一步揭示难解性问题的难解性实质^[12,13]。如参数化复杂性理论可说明,虽然一些问题规模较大,但若问题参数较小,该问题仍是可处理的。

本文研究 Ising 图模型精确概率推理和 Ising 均值场近似概率推理的参数化复杂性。首先证明不同参数的 Ising 图模型概率推理参数化复杂性定理,指出以图模型变量个数为参数时,概率推理问题是固定参数可处理的;进一步,以图模型树宽为参数时,概率推理问题是固定参数可处理的;然后证明 Ising 均值场参数化复杂性定理,指出以变量个数、自由分布树宽和迭代次数之和为参数,Ising 均值场是固定参数可处理的;同时当模型参数满足条件 $\forall s \in V, \frac{1}{4} \sum_{t \in N(s)} |\theta_{st}| < 1$ 时,以自由分布树宽和迭代次数之和为参数,Ising 均值场推理是固定参数可处理的。

2 背景

本节介绍 Ising 图模型、Ising 均值场推理方法、图的树宽概念和参数化复杂性。

2.1 Ising 图模型

定义 1(Ising 图模型) Ising 图模型是一 5 元组 $\mathcal{G} = (V, E, x, b, p)$

式中, V, E, x 均为有限集,且

- 1) V 表示非空顶点集。
 - 2) $E \subseteq V \times V$ 表示边集。
 - 3) $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \{0, 1\}^n$ 表示伯努利随机变量集。
 - 4) $b: V \rightarrow x$ 是顶点集到随机变量集的一一映射。
 - 5) $p(x; \theta)$ 表示随机变量 x 上的指数概率分布
- $$p(x; \theta) = \exp\left\{ \sum_{s \in V} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t - A(\theta) \right\}$$
- $$A(\theta) = \log \sum_x \left\{ \sum_{s \in V} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t \right\}$$

式中, θ_s, θ_{st} 表示模型参数, $\exp\{\theta_s x_s\}, \exp\{\theta_{st} x_s x_t\}$ 表示势函数, $A(\theta)$ 表示 Ising 图模型对数配分函数。

在 Ising 图模型 \mathcal{G} 上,概率推理的关键是通过变量求和计算对数配分函数 $A(\theta)$ 和边缘概率分布 $p(x_s)$ 。

2.2 Ising 均值场

变分推理是一种重要的确定性近似推理方法,它通过最小化自由分布 $q(x)$ 与原分布 $p(x)$ 之间的 KL 距离,把图模型概率推理问题转化为泛函极值问题,并通过求解泛函极值来计算对数配分函数及边缘概率分布^[4]。自由分布 $q(x)$ 与原分布 $p(x)$ 之间的 KL 距离为

$$KL(q(x) || p(x)) = \sum_x q(x) \log \frac{q(x)}{p(x)}$$

通过最小化 KL 距离进行变分转换,得

$$A(\theta) = \max_{q(x) \in \mathcal{M}_{\text{free}}} \left\{ \sum_x q(x) \psi(x; \theta) + H(q(x)) \right\} \quad (1)$$

式中, $\psi(x; \theta) = \sum_{s \in V} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t$, $q(x)$ 表示自由分布, $\mathcal{M}_{\text{free}}$ 表示自由概率分布的约束域,熵函数 $H(q(x)) = - \sum_x q(x) \log q(x)$ 。

由于精确求解变分式(1)的计算复杂性较高,Ising 均值场在自由分布可处理约束子集 $\mathcal{M}_{\text{tract}} \subseteq \mathcal{M}_{\text{free}}$ 上,计算 $A(\theta)$ 的下

界和边缘概率分布近似值。 $\mathcal{M}_{\text{tract}}$ 上的自由分布 $q(x)$ 是定义在不相交变量簇 $\{c_1, \dots, c_m\}$ 上的完全分解形式 $q(x) = \prod_{a=1}^m q_a(c_a)$, 即

$$\mathcal{M}_{\text{tract}} = \left\{ q(x) \mid q(x) = \prod_{a=1}^m q_a(c_a) \right\}$$

则 Ising 均值场变分式为

$$A(\theta) \geq \max_{q(x) \in \mathcal{M}_{\text{tract}}} \left\{ \sum_x q(x) \psi(x; \theta) + H(q(x)) \right\} \quad (2)$$

通过求解 Ising 均值场变分式(2)可计算出对数配分函数 $A(\theta)$ 的下界及边缘概率分布 $p(x_s)$ 的近似值。

2.3 图的树宽

树宽描述了图结构的复杂性,是图的重要特征之一。下面给出图的树分解及树宽概念。

定义 2(图的树分解) 令 $G = (V, E)$ 表示无向图,图 G 的树分解为 $\langle \{w_i \mid i \in I\}, T \rangle$, 其中 w_i 是顶点集 V 的子集, I 表示指示集,树 T 是以 w_i 为顶点的树。且符合以下 3 条性质:

- 1) $\bigcup_{i \in I} w_i = V$;
- 2) $\forall \{s, t\} \in E$, 存在 $i \in I, \{s, t\} \subseteq w_i$;
- 3) $\forall i, j, k \in I$, 若 w_j 在 w_i 到 w_k 的路径上, 则 $w_i \cap w_k \subseteq w_j$ 。

树分解的第三条性质又称为一致性,在动态规划中有重要作用。图的树分解形式是不唯一的,树宽是度量树分解优劣差异的重要特征。

定义 3(图的树宽) 令 $G = (V, E)$ 表示无向图, $\langle \{w_i \mid i \in I\}, T \rangle$ 表示图 G 的树分解,则树 T 的树宽为

$$tw(T) = \max\{|w_i| \mid i \in I\} - 1$$

图 G 的树宽为树宽最小的树分解树宽,即

$$tw(G) = \min\{k \mid k \text{ 表示图 } G \text{ 的树分解的树宽}\}$$

根据图的树宽定义可知:树型结构图的树宽为 1,由 n 个顶点组成的团的树宽为 $n-1$, $n \times n$ 格状图的树宽为 n 。传统复杂性理论指出判定图 G 的树宽是否为 d 是 NP 完全的,即该判定问题是难解的。

图 1(a) 表示由 8 个顶点组成的无向图 $G = (V, E)$ 。图 1(b) 表示无向图 G 的树分解 $\langle \{w_i \mid i \in I\}, T \rangle$, 其树宽为 2。同时该树分解也是具有最小树宽的树分解,故无向图 G 的树宽为 2。

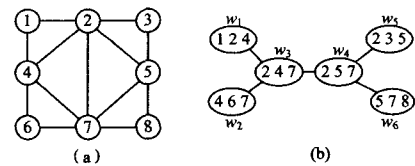


图 1 图及对应的树分解

2.4 参数化复杂性

传统复杂性理论中,算法的运行时间是关于输入字符串长度(输入规模 n) 的函数,求解 NP 完全和 NP 难等难解性问题的已知最好算法需要指数时间。参数化复杂性理论是从另一个角度研究难解性问题,它通过引入参数 k ,使算法的运行时间是关于参数 k 的函数。在实际问题中,若难解性问题的参数 k 较小,则此参数化的难解性问题是可处理的,称为固定参数可处理的(fixed parameter tractable, FPT)^[13,14]。

定义 4(参数化问题) 令 Σ 表示有限字母表,参数化问题是定义在 Σ 上的二元语言 $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ 。对于实例 $(x, k) \in L$, x 表示问题字符串描述, k 称为问题参数。

定义 5(固定参数可处理, FPT) 令 L 表示一参数化问题, (x, k) 表示一问题实例, $f(k)$ 表示仅与 k 相关的计算函数, 如果能在 $O(f(k) |x|^{O(1)})$ 时间内判定问题 $(x, k) \in L$, 则参数化问题 L 是 FPT 的。

求解图的树宽的参数问题如下所示, 同时理论证明指出该参数化问题是 FPT 的^[13,14]。

参数化树宽问题 (G, k)

实例: 无向图 $G=(V, E)$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 。

参数: 自然数 k 。

问题: 判定 $tw(G)=k?$

引理 1 令 $G=(V, E)$ 表示无向图, $n=|V|$ 表示变量个数, $d=tw(G)$ 表示无向图树宽, 则存在算法 A 最多在 $O(2^d) \cdot O(n)$ 时间内计算出图 G 的树分解, 因此参数化树宽问题 (G, k) 是 FPT 的。

3 概率推理参数化复杂性

本节分析两种不同参数下 Ising 图模型概率推理问题的参数化复杂性。

3.1 情况 1——参数 $n=|x|$

以变量个数 n 参数化 Ising 图模型概率推理问题, 并证明该参数化问题是 FPT 的。

参数化树宽问题 (\mathcal{G}, n)

实例: Ising 图模型 $\mathcal{G}=(V, E, x, b, p)$ 。

参数: 变量个数 $n=|x|$ 。

问题: 计算 Ising 图模型变量边缘概率分布。

定理 1 Ising 图模型 \mathcal{G} 上的参数化概率推理问题 (\mathcal{G}, n) 是 FPT 的。

证明: 对于 Ising 图模型 \mathcal{G} , 计算模型配分函数

$$A(\theta) = \log \sum_x \left\{ \sum_{s \in V} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t \right\}$$

其中, 伯努利变量求和过程中共涉及到 2^n 个元素, 用蛮力方法进行变量求和的计算复杂性为 2^n , 同理计算变量边缘概率分布的计算复杂性为 $O(2^n)$ 。

故 Ising 图模型 \mathcal{G} 上的参数化概率推理问题 (\mathcal{G}, n) 是 FPT 的。

参数化概率推理问题 (\mathcal{G}, n) 是平凡的, 即当模型规模 n 较小时, 概率推理问题是可处理的。下面基于图的树宽分析概率推理的参数化复杂性。

3.2 情况 2——参数 $d=tw(G)$

以图树宽 $tw(G)$ 参数化 Ising 图模型概率推理问题, 并证明该参数化问题是 FPT 的。

参数化树宽问题 (\mathcal{G}, d)

实例: Ising 图模型 $\mathcal{G}=(V, E, x, b, p)$ 。

参数: 图 $G=(V, E)$ 的树宽 $d=tw(G)$ 。

问题: 计算 Ising 图模型变量边缘概率分布。

定理 2 Ising 图模型 \mathcal{G} 上的参数化概率推理问题 (\mathcal{G}, d) 是 FPT 的。

证明: 在 Ising 图模型 $\mathcal{G}=(V, E, x, b, p)$ 上执行联合树算法(junction tree algorithm)进行精确推理, 可计算出边缘概率分布精确值。联合树算法包括两个基本步骤, 首先对图模型 \mathcal{G} 结构进行树分解 $(\{w_i | i \in I\}, T)$, 然后初始化树分解 T 的势函数, 并在树 T 上进行精确推理。下面具体分析这两个步骤的计算复杂性。

1) 对图模型 \mathcal{G} 进行树分解。

Ising 图模型 \mathcal{G} 的联合概率分布为

$$p(x; \theta) \propto \exp \left\{ \sum_{s \in V} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t \right\}$$

对于 Ising 图模型 \mathcal{G} 的图结构 $\mathcal{G}=(V, E)$, 令 d 表示图的树宽。根据引理 1 可知, 存在算法 A 最多在 $O(2^d) \cdot n$ 时间内给出图的树分解。此处不考虑求解树分解的具体算法, 图 2(a) 表示 3×3 二维 Ising 图模型结构, 图 2(b) 表示 Ising 图模型结构的树分解。

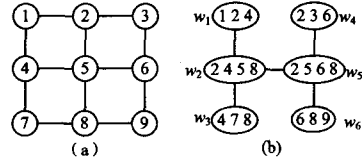


图 2 图及对应的树分解

2) 在树 T 进行精确推理计算边缘概率分布。

首先根据 Ising 图模型的联合概率分布初始化 T 的势函数, 并给出此时的联合概率分布式, 即

$$\phi_{w_i}(x_{w_i}) = \exp \left\{ \sum_{(s,t) \in w_i, (s,t) \in E} \theta_{st} x_s x_t + \sum_{s \in w_i} \theta_s x_s \right\}$$

$$p(x) \propto \prod_{i \in I} \phi_{w_i}(x_{w_i}) / \prod_{i,j \in I} (\phi_{w_i \cap w_j}(x_{w_i \cap w_j}))$$

此时在树 T 上执行和积算法, 通过在节点 w_i 和 w_j 之间传播信念消息 $m_{w_i \rightarrow w_j}$, 可计算出变量边缘概率分布, 即

$$m_{w_i \rightarrow w_j}(x_{w_i \cap w_j}) \leftarrow \sum_{x_{w_i \setminus w_j}} \phi_{w_i}(x_{w_i}) \prod_{w_k \in N(w_j) \setminus w_i} m_{w_k \rightarrow w_j}$$

$$p(x_{w_i}) \propto \phi_{w_i}(x_{w_i}) \prod_{w_j \in N(w_i)} m_{w_i \rightarrow w_j}(x_{w_i \cap w_j})$$

树 T 上精确概率推理的计算复杂性为 $2^d \cdot O(n)$ 。图 2(b) 所示的树分解 T 上的消息传播如图 3 所示。

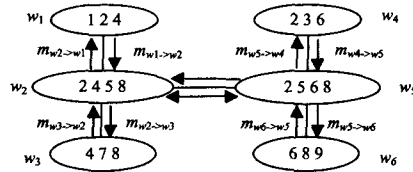


图 3 树结构 T 上的消息传播过程

综合上述分析可知, Ising 图模型 \mathcal{G} 上联合树算法的计算复杂性为 $O(2^d) \cdot O(n)$ 。故 Ising 图模型上的参数化概率推理问题 (\mathcal{G}, d) 是 FPT 的。

概率推理参数化复杂性定理 2 指出, 当图树宽 d 较小时, 大规模 Ising 图模型上的概率推理问题是易处理的, 如树型结构、链式结构图模型等, 并借此发展了隐马尔可夫模型上的前向后向算法、状态空间模型上的卡尔曼滤波等具体概率推理算法。然而, 很多实际问题的图模型树宽较大^[3], 如图像处理中 $n \times n$ 格状马尔可夫模型的树宽为 n , 生物信息学中 n 阶隐马尔可夫模型的树宽为 n , 此时精确概率推理是不可解的。故发展了近似推理方法, 如 Ising 均值场方法等。

4 Ising 均值场参数化复杂性

本节证明 Ising 均值场参数化复杂性定理。

4.1 一般情况

以自由分布结构树宽 d 、迭代次数 k 和变量个数 n 共同参数化 Ising 均值场, 并证明该参数化问题是 FPT 的。

参数化 Ising 均值场问题(IMF, $d_f + k + n$)

实例: 基于自由分布 $q(x)$ 的 Ising 均值场 IMF。

参数: 自由分布结构树宽 d_f ,

Ising 均值场迭代次数 k ,

Ising 图模型变量个数 $n=|x|$ 。

问题: Ising 均值场下边缘概率分布最优值。

定理 3 令 $\mathcal{G}=(V, E, x, b, p)$ 表示一般 Ising 图模型, Ising 图模型 \mathcal{G} 上的参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k+n) 是 FPT 的。

证明:对于 Ising 均值场方法,其中自由分布 $q(x)$ 是定义在不相交变量簇 $\{c_1, \dots, c_n\}$ 上的分解形式 $q(x) = \prod_{\alpha=1}^n q_{\alpha}(c_{\alpha})$ 。利用欧拉方程求解 Ising 均值场变分式(2),可给出 Ising 均值场变分式的 m 个迭代更新式。其中对应于自由分布 $q(c_{\alpha})$ 的迭代更新式为

$$q(c_{\alpha}) \propto \exp\{\psi(c_{\alpha})\} \prod_{s \in V(c_{\alpha})} \prod_{r \in N(s) \setminus V(c_{\alpha})} \exp\{\theta_{rs} \mu_r x_s\} \quad (3)$$

式中,

1) $\psi(c_{\alpha}) = \sum_{s \in V(c_{\alpha})} \theta_s x_s + \sum_{(s,t) \in E(c_{\alpha})} \theta_{st} x_s x_t$, $V(c_{\alpha})$ 表示对应于变量簇 c_{α} 的顶点集, $E(c_{\alpha})$ 表示变量簇 c_{α} 下的边集。

2) $N(s)$ 表示顶点 s 的邻节点。

3) μ_r 表示基于自由分布的变量期望,即

$$\mu_r = \sum_{c_{\beta}} x_r q(c_{\beta}), x_r \in c_{\beta}$$

以任意值初始化变量期望 $\{\mu_s | s=1, \dots, n\}$, 并根据迭代式(3)进行 k 次迭代,可计算出边缘概率分布近似值。此时 Ising 均值场推理的计算复杂性为 $2^{d_f} \cdot m^k$, 其中 2^{d_f} 表示迭代式(3)的计算复杂性, m^k 表示 m 个迭代式 k 次迭代下的计算复杂性。

由于 Ising 均值场变分式(2)是非凸的,故根据 Ising 均值场迭代式(3)仅可计算出局部最优解。若初始化变量期望 $\{\mu_s | s=1, \dots, n\}$ 时,取遍 2^n 个极值赋值(即 $\mu_s=0$ 或 $\mu_s=1$),可计算出所有局部收敛值,从而给出 Ising 均值场变分式(2)的最优值。此时 Ising 均值场方法的计算复杂性为 $2^{d_f} \cdot O(2^k) \cdot 2^n$ 。故参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k+n) 是 FPT 的。

对于参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k+n),参数 d_f 可通过自由分布结构选择控制。由于 Ising 均值场收敛速度较快,故迭代次数 k 不会太大,但是参数 n 与图模型规模有关,故对于大规模图模型,Ising 均值场难以在多项式时间内给出最优解。在实际应用中,或根据经验选择 Ising 均值场初始赋值,或通过领域专家给出初始赋值,并采用局部最优值为最终近似,则此时的近似值精度与初始赋值有很大关系。下面分析特殊条件下 Ising 均值场的参数化复杂性。

4.2 特殊情况

以自由分布结构树宽 d_f 和迭代次数 k 共同参数化 Ising 均值场,并证明若模型参数满足条件 $\forall s \in V, \frac{1}{4} \sum_{t \in N(s)} |\theta_{st}| < 1$ 时,该参数化概率推理问题是 FPT 的。

参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k)

实例:基于自由分布 $q(x)$ 的 Ising 均值场 IMF。

参数:自由分布结构树宽 d_f ,

Ising 均值场迭代次数 k 。

问题: Ising 均值场下边缘概率分布最优值。

定理 4 令 $\mathcal{G}=(V, E, x, b, p)$ 表示 Ising 图模型,若模型参数满足

$$\forall s \in V, \frac{1}{4} \sum_{t \in N(s)} |\theta_{st}| < 1$$

则参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k) 是 FPT 的。

证明:在完全分解自由分布 $q(x) = \prod_{s=1}^n q_s(x_s)$ 上, Ising 均值场迭代式为

$$q(x_s) \propto \exp\{\theta_s x_s\} \prod_{t \in N(s)} \exp\{\theta_{st} \mu_t\}$$

Ising 均值场下变量期望计算式为

$$\mu_s = \frac{\exp\{\theta_s + \sum_{t \in N(s)} \theta_{st} \mu_t\}}{1 + \exp\{\theta_s + \sum_{t \in N(s)} \theta_{st} \mu_t\}}$$

令 $f(x) = \exp\{x\} / (1 + \exp\{x\})$; μ_s^i, μ_s^k 表示变量 x_s 期望的下、上界,因为 $f(x)$ 是单调的,且 $f'(x) \leq 1/4$, 故

$$\mu_s^i - \mu_s^k \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{t \in N(s)} |\theta_{st} (\mu_t^i - \mu_t^k)| \right)$$

故若参数满足条件 $\forall s \in V, \frac{1}{4} \sum_{t \in N(s)} |\theta_{st}| < 1$, 则 Ising 均值场迭代式是压缩函数,存在唯一不动点。

此时以任意赋值初始化变量期望 $\{\mu_s | s=1, \dots, n\}$, 则根据 Ising 均值场迭代式(3),可在时间 $2^{d_f} \cdot m^k$ 内计算出 Ising 均值场最优解。故参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k) 是 FPT 的。

对于参数化 Ising 均值场问题(IMF, d_f+k),树宽参数 d_f 是可控制的,且迭代次数 k 较小。故由参数化复杂性定理 4 可知,对于大规模 Ising 图模型,当模型参数满足条件 $\forall s \in V, \frac{1}{4} \sum_{t \in N(s)} |\theta_{st}| < 1$ 时,执行 Ising 均值场可计算出最优值。

结束语 本文研究了 Ising 图模型精确概率推理和 Ising 均值场近似概率推理的参数化复杂性。对于 Ising 图模型概率推理,证明基于变量个数 n 的平凡参数化概率推理问题是 FPT 的,进一步证明基于树宽 d 的参数化概率推理问题也是 FPT 的。即对于大规模 Ising 图模型,若图模型树宽较小,则 Ising 图模型精确概率推理问题是易处理的。对于 Ising 均值场方法,证明基于 d_f+k+n 的参数化 Ising 均值场是 FPT 的,进一步证明当 Ising 图模型满足条件 $\forall s \in V, \frac{1}{4} \sum_{t \in N(s)} |\theta_{st}| < 1$ 时,仅基于 d_f+k 的参数化 Ising 均值场是 FPT 的。即对于大规模 Ising 图模型,当模型参数满足一定条件时,Ising 均值场近似概率推理是易处理的。

这些参数化复杂性定理揭示了 Ising 图模型概率推理和近似概率推理的难解性实质: Ising 图模型树宽决定着精确概率推理的计算复杂性, Ising 图模型参数决定着 Ising 均值场近似推理的计算复杂性。

参考文献

- [1] Parisi G. Statistical field theory [M]. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1988: 110-153
- [2] Jordan M I. Graphical models [J]. Statistical Science, 2004, 19(1): 140-155
- [3] Wainwright M J, Jordan M I. Graphical models, exponential families, and variational inference [J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2008, 1(1/2): 1-305
- [4] Jordan M I, Ghahramani Z, Jaakkola T S, et al. An introduction to variational methods for graphical models [J]. Newblock Machine Learning, 1999, 37(2): 183-233
- [5] Jordan M I, Weiss Y. Graphical models, probabilistic inference [M] // Arbib M A, ed., The Handbook of Brain Theory and Neural Networks. Massachusetts: The MIT Press, 2002: 243-266
- [6] Chandrasekaran V, Srebro N, Harsha P. Complexity of inference in graphical models [C] // Proceedings of the 25th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Corvallis, Oregon: AUAI Press, 2009: 70-78

(下转第 245 页)

量^[10,12]。但是,用这些参数评测的结果在很多情况下都与实际情况不符^[7]。因此,试验中用峰值信噪比和主观评测相结合的方式对增强的结果进行分析。如果图像的大小为 $M \times N$ 像素,则峰值信噪比的计算方法如式(10)所示。

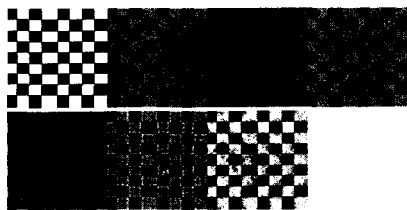


图5 左上第一幅图为人工图像,第二幅加入了随机噪声,随后的图像从上至下、从左至右依次为用 HE^[2]、LCS^[11]、Wavelet^[3]、CWGCE^[8]算法增强的结果,最后一幅是用本文的算法增强的结果。

$$PSNR=20 \times \log_{10} \left(\frac{1}{M \times N} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (g_{i,j} - \hat{g}_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

式中,“MAX”表示图像中最大灰度值(此时为 255), $g_{i,j}$ 和 $\hat{g}_{i,j}$ 分别为源图像 I 和增强结果图像的像素值。

在一般情况下,峰值信噪比越大,则说明增强的结果与源图的差别较大。因此,针对用不同的增强算法处理的结果,如果 PSNR 值相同,则视觉效果越好,说明增强算法越好;如果视觉效果相同,则 PSNR 越大,说明增强算法越好;或者说,如果 PSNR 值越大,同时又能使视觉效果更好,则增强算法越好。实验中对 20 幅不同的自然图像进行加噪后,用几种算法进行去噪增强,其平均 PSNR 值如表 1 所列。

表 1 用不同的增强算法得到的 PSNR 值的比较

增强算法	PSNR
HE ^[2]	18.608
LCS ^[11]	17.444
Wavelet ^[3]	22.416
CWGCE ^[8]	22.484
3SW	25.168

从表 1 中的数据可以看到,3SW 算法的 PSNR 平均值最高。同时,从视觉效果上看,用 3SW 算法得到的增强效果也是最好的。

结束语 本文提出了一种基于结构自相似性的小波增强算法,针对图像的边缘模糊、对比度降低等有比较好的增强效果,而且对噪声也有很好的抑制作用。通过实验证实了 3SW 算法优于普通的图像增强算法,对基于小波的增强算法也有改进,特别是对图像中的一些细小的纹理、边缘等特征有较好的增强作用,说明了将图像结构的自相似和小波分解系数结合,能够有效地提高图像特征的提取和增强的效果。

但是,3SW 算法对噪声同样也会有放大。而且,算法本身不能够自动地选择子图像的数量和小波分解的层数,这将是下一步需要解决的问题。

参 考 文 献

- [1] Vickers V E. Plateau equalization algorithm for real time display of high quality infrared imagery[J]. Optical Engineering, 1996, 1921-1926
- [2] Kim Y T. Contrast enhancement using brightness preserving bi-histogram equalization[J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1997; 1-8
- [3] Wang Yu-ping, Wu Qiang, et al. Chromosome image enhancement using multiscale differential operators[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003; 685-693
- [4] Davis T J, Gao D. Phase-contrast imaging of weakly absorbing materials using hard x-rays[J]. Nature, 1995, 373; 595-597
- [5] Hel-Or Y, Shaked D. A discriminative approach for wavelet denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17: 443-457
- [6] Yin Hong-xia, et al. Diffraction enhanced x-ray imaging for observing guinea pig cochlea[C]// Proceedings of the 2005 IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference. 2005; 5699-5701
- [7] Wang Z, Bovik A C, Sheikh H R, et al. Image quality assessment: From error measurement to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13; 600-612
- [8] Feng Jiao, Xiong Naixue, Bi Shuoben. X-ray Image Enhancement Based on Wavelet Transform[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Asia-pacific service computing. 2008; 1568-1573
- [9] Miller M, Kingsbury N. Image denoising using derotated complex wavelet coefficients[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2008, 17; 1500-1511
- [10] Mehrseresht N, Taubman D. Spatially continuous orientation adaptive discrete packet wavelet decomposition for image compression[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing. 2006; 1593-1596
- [11] 张淑娟, 金淑英. 利用分段线性拉伸法增强图像阴影区的亮度和反差[J]. 测绘与空间地理信息, 2006, 29(3): 81-83
- [12] Heric D, Zazula D. Reconstruction of object contours using directional wavelet transform[J]. WSEAS Transaction on Computation, 2005, 4; 1305-1312
- [13] 金海燕, 焦李成, 刘芳. 基于 Curvelet 域隐马尔可夫树模型的 SAR 图像去噪[J]. 计算机学报, 2007, 30(3): 491-197
- [14] 王炳健, 刘上乾, 周慧鑫, 等. 基于平台直方图的红外图像自适应增强算法[J]. 光子学报, 2005, 34(2): 299-301
- [15] 章琳, 方志军, 等. 基于遗传算法的多小波自适应去噪方法研究[J]. 红外与毫米波学报, 2009, 28(1): 77-80

(上接第 210 页)

- [7] Jerrum M, Sinclair A. Polynomial-time approximation algorithms for the Ising model [J]. SIAM Journal on Computing, 1993, 22(5); 1087-1116
- [8] Roth D. On the hardness of approximate reasoning [J]. Artificial Intelligence, 1996, 82(1/2); 273-302
- [9] Cooper G F. The computational complexity of probabilistic inference using Bayesian belief networks [J]. Artificial Intelligence, 1990, 42(2/3); 393-405
- [10] Dagum P, Luby M. Approximating probabilistic inference in

Bayesian belief networks is NP-hard [J]. Artificial Intelligence, 1993, 60(1); 141-153

- [11] Jaakkola T S. Tutorial on variational approximation methods [M]// Opper M, Saad D, eds. Advanced Mean Field Methods: Theory and Practice. Massachusetts: The MIT Press, 2000; 129-159
- [12] Flum J, Grohe M. Parameterized Complexity Theory [M]// Brauer W, Rozenberg G, Salomaa A, et al., eds. Verlag Berlin: Springer, 2006; 357-388
- [13] Niedermeier R. Invitation to fixed-parameter algorithms [M]// Ball J, Welsh D, eds. New York: Oxford University Press, 2006; 22-29