

# 泛组合运算模型研究

贾澎涛<sup>1</sup> 何华灿<sup>2</sup>

(西安科技大学计算机科学与技术学院 西安 710054)<sup>1</sup>

(西北工业大学计算机科学与技术学院 西安 710072)<sup>2</sup>

**摘要** 泛逻辑学是在模糊逻辑的基础上,分析命题之间关系的连续可变性。提出了“广义相关性”和“广义自相关性”两个重要的概念,将命题连接词运算模型定义为由相关性所控制的算子簇,实现了命题连接词运算模型的柔性化。其中泛组合运算模型是为了满足连续值逻辑中综合决策的需求而提出的。目前仅有二元模型,在实际应用中迫切需要多元模型。但由于泛组合问题的复杂度随着“元”的个数增加而急剧增大,其设计有一定的难度。提出了多元泛组合运算模型和生成元加权零级泛组合运算模型,从而不仅满足了应用中多元综合决策的要求,还进一步完善了泛逻辑学中的命题连接词理论。

**关键词** 泛逻辑学,柔性化,泛组合运算模型

中图分类号 TP18 文献标识码 A

## Research of Universal Combination Operation Model

JIA Peng-tao<sup>1</sup> HE Hua-can<sup>2</sup>

(School of Computer Science and Technology, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)<sup>1</sup>

(School of Computer Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)<sup>2</sup>

**Abstract** Based on fuzzy logic, universal logics analyses continuous changeability among propositions, and puts forward two important concepts: generalized correlativity and generalized self-correlativity, and realizes flexibility of propositional connective operation models which are defined operator clusters controlled by correlativity. Universal combination operation model can satisfy the requirement of integrated decision of continuous valued logic. It is hard to be applied because it only has binary model at present. Therefore the multimember universal combination operation model is an urgent demand. But it is difficult to be constructed because the complexity of universal combination problem increases sharply with increasing the number of member. The multimember universal combination operation model and a generator weighted 0-level universal combination operation model were proposed. It not only satisfies the requirement of multimember integrated decision, but also perfects propositional conjunctions theory of universal logics.

**Keywords** Universal logics, Flexibility, Universal combination operation model

经典逻辑曾对人工智能起到很大的推动作用,但它对描述人脑思维等复杂系统来说过于刚性。模糊逻辑虽然通过对逻辑真值柔性化改变了经典逻辑中长期存在的二值观,能有效解决许多无法建立精确数学模型的问题,但是取“最大最小”过于刚性。近年来在模糊逻辑中加入参数,已成为一个重要而有意义的研究方向。国内外许多学者都提出了带参数的模糊逻辑系统,例如基于带参数的 Frank T-模的模糊逻辑系统<sup>[1]</sup>、参数 Kleene 系统<sup>[2]</sup>、 $H_0$  系统<sup>[3]</sup>、泛逻辑学<sup>[4]</sup>等。带参数模糊逻辑系统既能与传统模糊逻辑保持某种兼容性,又能通过对其中参数的合理解释以体现逻辑柔性<sup>[5]</sup>。其中何华灿教授创立的泛逻辑学不仅考虑了命题真值的柔性,还考虑了命题之间关系的连续可变性(即关系柔性)<sup>[4]</sup>,这给计算机、人工智能、逻辑学等领域带来了新的研究思路。

泛逻辑学在从产生至今的十多年当中,除了在理论上深入进行研究外,在实际应用中也取得了一些成果:文献[6]采用泛逻辑算子簇柔性化模糊推理操作,提出了一种新型变结构模糊逻辑控制器,以适应控制对象的改变;文献[7]提出了一种新型基于 $[a, b]$ 区间泛逻辑运算模型的神经元和神经网络模型;文献[8]设计了由泛逻辑生成的三值逻辑运算的实现光路,将泛逻辑学用于光计算机研究领域;文献[9]提出了一种基于泛逻辑学中零级泛组合模型的泛逻辑控制器,并用其解决线性和非线性系统的控制问题。

泛逻辑提出了 7 种具有关系柔性的运算模型:泛非、泛与、泛或、泛蕴含、泛等价、泛平均和泛组合运算模型。其中泛组合运算模型是为了满足连续值逻辑中综合决策的需求而提出的,目前仅有二元模型,在实际应用中受限,迫切需要多元

到稿日期:2009-11-13 返修日期:2010-01-26 本文受西安科技大学博士启动基金(A5030606),西北工业大学基础研究基金(W018101)资助。

贾澎涛(1977—),女,博士,副教授,CCF 会员,主要研究方向为人工智能理论及应用、泛逻辑等,E-mail: pengtao.jia@gmail.com;何华灿(1938—),男,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究方向为人工智能基础理论、泛逻辑等。

模型。但由于泛组合问题的复杂度随着“元”的个数增加而急剧增大,其设计有一定的难度。本文经过长期探索,找到了多元泛组合柔性关系,提出了多元泛组合运算模型和基于生成元的加权多元泛组合模型,完善了泛逻辑学中的命题连接词理论,满足了应用领域中多元综合决策的要求。

## 1 泛逻辑学理论基础

泛逻辑学针对模糊逻辑中存在的局限,即隶属度在概念上的广义性和它的逻辑运算符的狭义性的矛盾,基于三角范数理论,建立了一组连续可变的逻辑运算算子簇,真正实现了逻辑关系的柔性化。

### 1.1 模糊逻辑中的局限

近年来,模糊逻辑逐渐得到人们的普遍重视并被深入研究。和描述、处理具有内在同一性和外在确定性问题的刚性逻辑不同,模糊逻辑是一种具有真值柔性的逻辑体系,它可以描述和处理具有内在矛盾性和外在不确定性的问题<sup>[10]</sup>。模糊推理被应用于工业控制与家电产品的制造中,取得了极大的成功。然而与应用相比,模糊推理的理论基础并非无懈可击<sup>[5]</sup>,应明生教授指出模糊逻辑缺乏系统深入的理论研究却是不争的事实<sup>[11]</sup>。文献[5]中以 C. Elkan 的“西瓜问题”指出了模糊逻辑中“与”、“或”算子取 min 和 max 的不足,并引证了吴望名教授的论述。何华灿教授在文献[4]中也深刻地论述了“最大最小”的缺陷,指出:“应用实践一再表明,模糊命题连接词的运算模型不应该是一个固定不变的算子,而应该是一组不确定的算子簇”。

在模糊逻辑中,命题的逻辑真值通过在 $[0,1]$ 区间连续取值的隶属函数  $\mu$  来刻画,Zadeh 称这种由命题真值的连续可变性表现出来的真值柔性为模糊性<sup>[10]</sup>。但其逻辑关系却只能通过固定的模糊运算联结词  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  来实现,是刚性的<sup>[12]</sup>,无法描述现实世界中大量存在的不确定的逻辑关系。因此模糊命题连接词运算模型不应该是一个固定不变的算子。由此看来,模糊逻辑的柔性意义还不完全,是一种只具有部分柔性的逻辑学体系。突破刚性逻辑学的种种局限性,建立一种比模糊逻辑更具柔性的、更能反映真实世界的、灵活自适应的逻辑学的需求直接导致了泛逻辑的产生和发展。

### 1.2 泛逻辑学中的关系柔性

泛逻辑学不仅承认命题真值的连续可变性,而且在深入分析命题之间关系的连续可变性的基础上,提出了“广义相关性”和“广义自相关性”两个重要的概念<sup>[4]</sup>,创造性地将命题连接词运算模型定义为由命题间相关性所控制的算子簇,可以通过相关性参数的变化在推理过程中采用不同的运算模型,从而实现了包含“不确定性”的“柔性推理”。

#### 1.2.1 广义自相关性和广义相关性

命题之间关系的连续可变性被称为关系柔性。关系柔性使得命题连接词运算模型成为连续可变的算子簇,并解决了算子簇中算子的选择问题。关系柔性主要由两种不同的因素引起,分别是广义自相关性和广义相关性。

##### (1) 广义自相关性

广义自相关性(Generalized Self-correlativity)<sup>[4]</sup>是指一个命题与其非命题之间的相关性,是由命题真值的测量误差引起的,它通过影响非命题的真值计算,进而影响到所有的逻辑运算。测量误差可由最大可能的负误差到最大可能的正误差连续地变化。泛逻辑中对这种连续变化性用广义自相关系数

(Generalized Self-correlation Coefficient)  $k$  来刻画, $k \in [0, 1]$ 。 $k$  代表了模糊测度误差的大小,并且当  $k$  由  $1 \rightarrow 0$  变化时, $N(x, k)$  能够在最大可能否定和最小可能否定之间过渡,从而可以实现逻辑非运算  $N(x, k)$  的柔性化。

##### (2) 广义相关性

广义相关性(Generalized Correlativity)<sup>[4]</sup>是指命题和命题之间的相关性,可由最大相关到最小相关连续地变化。泛逻辑学对广义相关性的这种连续变化特性是用一个统一描述相关性大小的广义相关系数(Generalized Correlation Coefficient)  $h, h \in [0, 1]$  来表示的。

#### 1.2.2 零级/一级不确定性问题

定义 1 如果命题真值没有测量误差,不影响其非命题的真值计算,即  $N(x) = 1 - x$ ,则称这类可以精确得到命题真值的问题为零级不确定问题。此时, $k = 0.5$ ,非运算是单一的,即  $N(x, 0.5) = N(x) = 1 - x$ 。

但由于广义相关性的存在,与/或运算都不是单一的公式,而是一组受  $h$  控制的变化的算子簇,即零级  $T/S$  范数完整簇。

定义 2 如果由于某种原因命题真值存在测量误差, $x$  和  $N(x)$  的值仅是一个不太准确的近似值,也就是  $N(x)$  的值可能偏离  $1 - x$ ,即  $N(x) \neq 1 - x$ ;如果  $N(x)$  的值可以通过已知的近似值  $x$  来估算,则称这类问题为一级不确定问题。此时, $k \neq 0.5$ ,非运算不再单一,而是一组受  $k$  控制的变化的算子簇,即  $N$  性生成元完整簇。

同样,由于广义相关性和广义自相关性的存在,与/或运算是一组受  $k$  和  $h$  控制的变化的算子簇,即一级  $T/S$  范数完整超簇。

### 1.3 二元泛组合命题连接词运算模型

泛逻辑命题连接词运算模型是建立在“算子簇”基础上的,算子簇是建立在  $h$  和  $k$  之上的系列函数簇。最常用的命题连接词运算模型是基于  $N$  性生成元和  $T$  性生成元的非与表达及基于  $N$  性生成元和  $S$  性生成元的非或表达。在文献[4]中详细讨论了指数型  $N$  性生成元完整簇  $\Phi(x, k)$ 、零级  $T$  性生成元完整簇  $G_0(x, h)$ 、一级  $T$  性生成元完整超簇  $F(x, h, k)$ 、零级  $S$  性生成元完整簇  $G_0(x, h)$ 、一级  $S$  性生成元完整超簇  $G(x, h, k)$ ,非与和非或形式的泛逻辑运算模型,本文不再赘述。本文中重点研究泛组合命题连接词运算模型,由于非与和非或形式的泛逻辑模型存在对偶关系,因此我们仅讨论非与形式的泛组合命题连接词运算模型。

在二值逻辑中不存在组合运算,但在三值以上的多值逻辑和模糊逻辑中,组合运算不可或缺。对组合运算的客观需要可以用下面的例子来说明:设有两个独立的团体对某一候选人进行带有支持度的投票选举,一个的支持度是  $x$ ,另一个的支持度是  $y$ ,规定  $e$  是通过选举的门限值,也就是表示弃权的参数(例如  $e = 0.5$  表示过半数通过, $x = 0.5$  表示弃权)。用什么方法给出带有支持度的最后选举结果呢?

正确的综合方法是:如果两人都反对,结果应不大于最小值;如果两人都赞成,结果应不小于最大值;如果两人意见相反,结果应在最大值和最小值之间折中;如果一方弃权,结果应为另一方的值。

参数  $e$  可以在  $[0, 1]$  中取值,例如  $e = 0$  表示只要有人提议就通过; $e = 0.6$  表示常见的 60 分及格; $e = 2/3$  表示需要  $2/3$  多数通过; $e = 1$  表示需要一致通过等。显然, $e = 0$  时,组合运

算退化“或运算” $S(x, y)$ ;  $e=1$  时, 组合运算退化为“与运算” $T(x, y)$ 。

针对这种需求, 文献[4]提出了二元泛组合运算模型。但原有的二元泛组合运算模型不能推导出正确的突变组合算子, 因此对其修正并加以证明(详细证明过程见文献[13]), 得到完善的基于  $T$  性生成元完整簇  $F(x, h, k)$  的非与形式的泛组合运算模型如下:

$$C^e(x, y, h, k) = ite\{\min(e, F^{-1}(\max(0, F(x, h, k) + F(y, h, k) - F(e, h, k)), h, k)) | x + y < 2e \\ N(\min(1 - e, F^{-1}(\max(0, F(N(x, k), h, k) + F(N(y, k), h, k) - F(N(e, k), h, k)), h, k))) | x + y > 2e; e\} \quad (1)$$

式中,  $ite(\beta | \alpha; \gamma)$  是条件表达式。如果  $\alpha$  则  $\beta$ , 否则  $\gamma$ 。

**定义 3** 由零级  $T$  性生成元完整簇  $F_0(x, h) = x^m$  代入式(1)生成的零级  $C$  范数完整簇

$$C^e(x, y, h) = ite\{\min(e, (\max(0, x^m + y^m - e^m))^{1/m}) | x + y < 2e; \\ 1 - \min(1 - e, (\max(0, (1 - x)^m + (1 - y)^m - (1 - e)^m))^{1/m}) | x + y > 2e; e\} \quad (2)$$

实现的泛逻辑运算叫二元零级泛组合运算。其中,  $x, y, e, h \in [0, 1], m = (3 - 4h)/(4h(1 - h)), m \in R$ 。

二元零级泛组合运算模型的 4 个特殊的算子是:

上限组合 Zadeh 组合

$$C^e(x, y, 1) = ite\{\min(x, y) | x + y < 2e; \\ \max(x, y) | x + y > 2e; e\}$$

中极组合 概率组合

$$C^e(x, y, 0.75) = ite\{xy/e | x + y < 2e; \\ 1 - (1 - x)(1 - y)/(1 - e) | x + y > 2e; e\}$$

中心组合 有界组合

$$C^e(x, y, 0.5) = \min(1, \max(0, x + y - e))$$

下限组合 突变组合

$$C^e(x, y, 0) = ite\{0 | x, y < e; 1 | x, y > e; e\}$$

**定义 4** 由一级  $T$  性生成元完整超簇  $F(x, h, k) = x^{nm}$  代入式(1)生成的一级  $C$  范数完整超簇

$$C^e(x, y, h, k) = ite\{\min(e, (\max(0, x^{nm} + y^{nm} - e^{nm}))^{1/nm}) | x + y < 2e; \\ (1 - \min(1 - e^n, (\max(0, (1 - x^n)^m + (1 - y^n)^m - (1 - e^n)^m))^{1/m}))^{1/n} | x + y > 2e; e\} \quad (3)$$

实现的泛逻辑运算叫二元一级泛组合运算。其中,  $n = -1/\log_2 k, k \in [0, 1], k = 2^{-1/n}, n \in R_+, m \in R$ 。

## 2 多元泛组合运算模型

在深入研究了多元泛组合的柔性关系的基础上, 利用  $T$

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{(1 - x_1)^m \ln(1 - x) + (1 - x_2)^m \ln(1 - x_2) + \dots + (1 - x_l)^m \ln(1 - x_l) - (L - 1)(1 - e)^m \ln(1 - e)}{(1 - x_1)^m + (1 - x_2)^m + \dots + (1 - x_l)^m - (L - 1)(1 - e)^m} \quad (8)$$

设  $x_i = \max(x_1, x_2, \dots, x_l), i = 1, 2, \dots, l$ , 则  $1 - x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_l)$ , 由于  $x_1 + x_2 + \dots + x_l > le$ , 可得  $l - (x_1 + x_2 + \dots + x_l) < l - le$ , 因此  $1 - x_i < 1 - e$ 。

给式(8)分子分母同除以  $(1 - x_i)^m$ , 则式(8)的极限为  $\ln(1 - x_i)$ 。

因此, 当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l > le$  时,

性生成元完整簇构造的非与形式的多元泛组合运算模型如下:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, h, k) = ite\{\min(e, F^{-1}(\max(0, F(x_1, h, k) + F(x_2, h, k) + \dots + F(x_l, h, k) - (l - 1)F(e, h, k)), h, k)) | x_1 + x_2 + \dots + x_l < le; \\ N(\min(e', F^{-1}(\max(0, F(N(x_1, k), h, k) + F(N(x_2, k), h, k) + \dots + F(N(x_l, k), h, k) - (l - 1)F(N(e, k), h, k)), h, k)), k) | x_1 + x_2 + \dots + x_l > le; e\} \quad (4)$$

式中,  $e' = N(e)$ 。同二元泛组合运算模型类似, 多元泛组合运算模型也同时有“与”“或”两部分表达。

**定义 5** 由零级  $T$  性生成元完整簇  $F_0(x, h) = x^m$  代入式(4)生成的零级  $C$  范数完整簇

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, h) = ite\{\min(e, (\max(0, x_1^m + x_2^m + \dots + x_l^m - (l - 1)e^m))^{1/m}) | x_1 + x_2 + \dots + x_l < le; \\ 1 - \min(1 - e, (\max(0, (1 - x_1)^m + (1 - x_2)^m + \dots + (1 - x_l)^m - (l - 1)(1 - e)^m))^{1/m}) | x_1 + x_2 + \dots + x_l > le; e\} \quad (5)$$

实现的泛逻辑运算叫多元零级泛组合运算。其中,  $x, y, e, h \in [0, 1], m = (3 - 4h)/(4h(1 - h)), m \in R$ 。

**定理 1** 当  $h=1$  时,  $m \rightarrow -\infty$ , 多元零级泛组合运算为上限组合, 也称 Zadeh 组合:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1) = ite\{\min(x_1, x_2, \dots, x_l) | x_1 + x_2 + \dots + x_l < le; \\ \max(x_1, x_2, \dots, x_l) | x_1 + x_2 + \dots + x_l > le; e\} \quad (6)$$

证明: 分 3 段进行证明:

(1) 当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l < le$  时,

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1) = \min(e, (\max(0, x_1^m + x_2^m + \dots + x_l^m - (l - 1)e^m))^{1/m})$$

其中  $m \rightarrow -\infty$ 。

求  $\lim_{m \rightarrow -\infty} (x_1^m + x_2^m + \dots + x_l^m - (l - 1)e^m)^{1/m}$ , 对其取对数, 求极限, 得:

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{x_1^m \ln x_1 + x_2^m \ln x_2 + \dots + x_l^m \ln x_l - (l - 1)e^m \ln e}{x_1^m + x_2^m + \dots + x_l^m - (l - 1)e^m} \quad (7)$$

设  $x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_l), i = 1, 2, \dots, l$ , 由于  $x_1 + x_2 + \dots + x_l < le$ , 所以  $x_i < e$ , 给式(7)分子分母同除以  $x_i^m$ , 则式(7)的极限为  $\ln x_i$ 。

因此, 当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l < le$  时,  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1) = \min(x_1, x_2, \dots, x_l)$ 。

(2) 当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l > le$  时,

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1) = 1 - \min(1 - e, (\max(0, (1 - x_1)^m + (1 - x_2)^m + \dots + (1 - x_l)^m - (l - 1)(1 - e)^m))^{1/m})$$

其中  $m \rightarrow -\infty$ 。

求  $\lim_{m \rightarrow -\infty} ((1 - x_1)^m + (1 - x_2)^m + \dots + (1 - x_l)^m - (l - 1)(1 - e)^m)^{1/m}$ , 对其取对数, 求极限, 得:

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{(1 - x_1)^m \ln(1 - x) + (1 - x_2)^m \ln(1 - x_2) + \dots + (1 - x_l)^m \ln(1 - x_l) - (L - 1)(1 - e)^m \ln(1 - e)}{(1 - x_1)^m + (1 - x_2)^m + \dots + (1 - x_l)^m - (L - 1)(1 - e)^m} \quad (8)$$

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1) = \max(x_1, x_2, \dots, x_l)。$$

(3) 当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l = le$  时,

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1) = e$$

综上所述, 定理 1 得证。

**定理 2** 当  $h=0.75$  时,  $m \rightarrow 0$ , 多元零级泛组合运算为中极组合, 也称概率组合:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.75) = \text{ite}\{x_1 x_2 \dots x_l / e^{l-1} | x_1 + x_2 + \dots + x_l < le; \\ 1 - (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_l) / (1-e)^{l-1} | x_1 + x_2 + \dots + x_l > le; e\} \quad (9)$$

证明:同定理 1,分 3 段进行证明:

(1)当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l < le$  时,可证得:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.75) = x_1 x_2 \dots x_l / e^{l-1}$$

(2)当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l > le$  时,可证得:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.75) = 1 - (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_l) / (1-e)^{l-1}$$

(3)当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l = le$  时,

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.75) = e$$

综上所述,定理 2 得证。

定理 3 当  $h=0.5$  时,  $m=1$ ,多元零级泛组合运算为中心组合,也称有界组合:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.5) = \min(1, \max(0, x_1 + x_2 + \dots + x_l - (l-1)e)) \quad (10)$$

证明:分 3 段证明:

(1)当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l < le$  时,

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.5) = \min(e, \max(0, x_1 + x_2 + \dots + x_l - (l-1)e))$$

(2)当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l > le$  时,可证得  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.5) = \min(1, \max(e, x_1 + x_2 + \dots + x_l - (l-1)e))$

(3)当  $x_1 + x_2 + \dots + x_l = le$  时,

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.5) = e$$

合并(1),(2),(3),定理 3 得证。

定理 4 当  $h=0$  时,  $m \rightarrow +\infty$ ,多元零级泛组合运算为下限组合,也称突变组合:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = \text{ite}\{0 | x_1, x_2, \dots, x_l < e; 1 | x_1, x_2, \dots, x_l > e; e\} \quad (11)$$

证明:分 5 段进行证明:

(1)当  $x_1, x_2, \dots, x_l < e$  时,  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = 0$ 。

(2)当  $x_1^m, x_2^m, \dots, x_l^m$  中有的大于  $e$ ,有的小于等于  $e, x_1 + x_2 + \dots + x_l < le$  时,同定理 1,  $m \rightarrow +\infty$ ,可证得  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = e$ 。

(3)如果  $x_1 = e, x_2 = e, \dots, x_l = e$ ,得  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = e$ 。

(4)当  $x_1, x_2, \dots, x_l > e$  时,得  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = 1 - 0 = 1$ 。

(5)当  $x_1^m, x_2^m, \dots, x_l^m$  中有的大于等于  $e$ ,有的小于  $e, x_1 + x_2 + \dots + x_l > le$  时,同定理 1,  $m \rightarrow +\infty$ ,可证得  $C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = e$ 。

其中(2),(3),(5)的值一致,可以合并,再综合(1),(4),得:

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0) = \text{ite}\{0 | x_1, x_2, \dots, x_l < e; 1 | x_1, x_2, \dots, x_l > e; e\}, \text{故定理 4 得证。}$$

定义 6 由一级  $T$  性生成元完整超簇  $F(x, h, k) = x^m$  代入式(4)生成的一级  $C$  范数完整超簇

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, h, k) = \text{ite}\{\min(e, (\max(0, x_1^m + x_2^m + \dots + x_l^m - (l-1)e^m))^{1/m}) | x_1 + x_2 + \dots + x_l < le; \\ (1 - \min(1 - e^n, (\max(0, (1-x_1^m)^m + (1-x_2^m)^m + \dots + (1-x_l^m)^m - (l-e^n)^m))^{1/m}))^{1/n} | x_1 + x_2 + \dots + x_l > le; e\}$$

实现的泛逻辑运算叫多元一级泛组合运算模型。其中,  $n =$

$$-1/\log_2 k, k \in [0, 1], k = 2^{-1/n}, n \in R_+$$

由以上推导证明可以看出,多元泛组合模型满足广义相关性的需求,具有组合运算的性质,并包容了常用的逻辑组合算子,满足了应用的需求。

### 3 加权零级泛组合运算模型

泛组合运算模型是一种可以在全局上取值的逻辑运算,能够较好地解决复杂系统中各因素之间的不确定性。但以上研究的泛组合运算模型都没有考虑到因素间的不等权性。因此,这里对加权形式的零级泛组合运算模型进行分析。

#### 3.1 线性加权零级泛组合运算模型

定义 7 当  $\alpha \in [0, 1]$  时,称

$$V_1(\alpha, x) = \alpha x \quad (12)$$

为线性加权算子,其中  $\alpha$  为变量  $x$  的权值。

基于式(12),对泛组合运算模型的输入变量  $(x, y)$  线性加权,加权因子分别为  $\alpha$  和  $\beta$ ,得到:

$$(x', y') = (V_1(\alpha, x), V_1(\beta, y)) = (\alpha x, \beta y) \quad (13)$$

故,加权因子为  $\alpha$  和  $\beta(\alpha, \beta \in [0, 1]$  且  $\alpha + \beta = 1$ ) 的线性加权二元零级泛组合运算模型  $CV_1^e$  为:

$$CV_1^e(x, y, h, \alpha, \beta) = C^e(x', y', h) = C^e(\alpha x, \beta y, h) \quad (14)$$

故,加权因子为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l(\alpha_i \in [0, 1]$  且  $\sum_{i=1}^l \alpha_i = 1$ ) 的线性加权多元零级泛组合运算模型为:

$$CV_1^e(x_1, x_2, \dots, x_l, h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = C^e(x_1', x_2', \dots, x_l', h) = C^e(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_l x_l, h) \quad (15)$$

#### 3.2 指数加权零级泛组合运算模型

定义 8 设  $x \in [0, 1]$  且  $a > 0$ ,称

$$V_2(a, x) = x^a \quad (16)$$

为指数加权算子,其中  $a$  为变量  $x$  的权值,  $x^a \in [0, 1]$ 。

基于式(16),对泛组合运算模型的输入变量  $(x, y)$  进行指数加权,加权因子分别为  $\alpha$  和  $\beta$ ,得到:

$$(x', y') = (V_2(\alpha, x), V_2(\beta, y)) = (x^\alpha, y^\beta) \quad (17)$$

故,加权因子为  $\alpha$  和  $\beta(\alpha, \beta > 0$  且  $\alpha = 1/\beta$ ) 的指数加权二元零级泛组合运算模型  $CV_2^e$  为:

$$CV_2^e(x, y, h, \alpha, \beta) = C^e(x', y', h) = C^e(x^\alpha, y^\beta, h) \quad (18)$$

故,加权因子为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l(\alpha_i > 0$  且  $\prod_{i=1}^l \alpha_i = 1$ ) 的指数加权多元零级泛组合运算模型为:

$$CV_2^e(x_1, x_2, \dots, x_l, h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = C^e(x_1', x_2', \dots, x_l', h) = C^e(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_l^{\alpha_l}, h) \quad (19)$$

#### 3.3 生成元加权零级泛组合运算模型

定义 9  $N$  范数完整簇为  $N(x) = 1 - x$ ,零级  $T$  性生成元完整簇为  $F_0(x, h) = x^m$ ,则由

$$C^e(x, y, h, \alpha, \beta) = \text{ite}\{\min(e, F_0^{-1}(\max(0, \alpha F_0(x, h) + \beta F_0(y, h) - F_0(e, h)), h)) | \alpha x + \beta y < 2e; \\ N(\min(1 - e, F_0^{-1}(\max(0, \alpha F_0(N(x), h) + \beta F_0(N(y), h) - F_0(N(e), h))), h)) | \alpha x + \beta y > 2e; e\} \\ = \text{ite}\{\min(e, (\max(0, \alpha x^m + \beta y^m - e^m))^{1/m}) | \alpha x + \beta y < 2e; \\ 1 - \min(1 - e, (\max(0, \alpha(1-x)^m + \beta(1-y)^m - (1-e^m))^{1/m}) | \alpha x + \beta y > 2e; e\} \quad (20)$$

实现的泛逻辑运算叫二元生成元加权零级泛组合运算。其中,  $x, y, e, h \in [0, 1], \alpha \in [0, 2], \beta \in [0, 2]$ , 且  $\alpha + \beta = 2, m = (3$

$-4h)/(4h(1-h)), m \in R$ .

**定理 5** 当  $h=1$  时,  $m \rightarrow -\infty$ , 二元生成元加权零级泛组合运算模型为上限组合, 也称 Zadeh 组合:

$$C^e(x, y, 1, \alpha, \beta) = \text{ite}\{\min(x, y) | \alpha x + \beta y < 2e; \max(x, y) | \alpha x + \beta y > 2e; e\} \quad (21)$$

证明: 分 3 段进行证明:

(1) 当  $\alpha x + \beta y < 2e$  时,  $C^e(x, y, 1, \alpha, \beta) = \min(e, (\max(0, \alpha x^m + \beta y^m - e^m))^{1/m})$ , 其中  $m \rightarrow -\infty$ .

求  $\lim_{m \rightarrow -\infty} (\alpha x^m + \beta y^m - e^m)^{1/m}$ , 对其取对数, 求极限, 得:

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{\alpha x^m \ln x + \beta y^m \ln y - e^m \ln e}{\alpha x^m + \beta y^m - e^m} \quad (22)$$

设  $x \leq y$ , 由于  $\alpha x + \beta y < 2e$ , 所以  $x < e$ , 给式(22)分子分母同除以  $x^m$ , 则式(22)的极限为  $\ln x$ .

同理设  $y < x$ , 给式(22)分子分母同除以  $y^m$ , 则上式极限为  $\ln y$ .

因此, 当  $\alpha x + \beta y < 2e$  时,  $C^e(x, y, 1, \alpha, \beta) = \min(x, y)$ .

(2) 当  $\alpha x + \beta y > 2e$  时,  $C^e(x, y, 1, \alpha, \beta) = 1 - \min(1 - e, (\max(0, \alpha(1-x)^m + \beta(1-y)^m - (1-e)^m))^{1/m})$ , 其中  $m \rightarrow -\infty$ .

求  $\lim_{m \rightarrow -\infty} (\alpha(1-x)^m + \beta(1-y)^m - (1-e)^m)^{1/m}$ , 对其取对数, 求极限, 得:

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{\alpha(1-x)^m \ln(1-x) + \beta(1-y)^m \ln(1-y) - (1-e)^m \ln(1-e)}{\alpha(1-x)^m + \beta(1-y)^m - (1-e)^m} \quad (23)$$

设  $x \leq y$ , 则  $1-x > 1-y$ , 由于  $\alpha x + \beta y > 2e$ , 可得  $1-e > 1-y$ .

给式(23)分子分母同除以  $(1-y)^m$ , 则式(22)的极限为  $\ln(1-y)$ .

同理设  $x > y$ , 则式(22)的极限为  $\ln(1-x)$ .

因此, 当  $\alpha x + \beta y > 2e$  时,  $C^e(x, y, 1, \alpha, \beta) = \max(x, y)$ .

(3) 当  $\alpha x + \beta y = 2e$  时,  $C^e(x, y, 1, \alpha, \beta) = e$ .

综上所述, 定理 5 得证.

**定理 6** 当  $h=0.75$  时,  $m \rightarrow 0$ , 二元生成元加权零级泛组合运算模型为中极组合, 也称概率组合:

$$C^e(x, y, 0.75, \alpha, \beta) = \text{ite}\{x^\alpha y^\beta / e | \alpha x + \beta y < 2e; 1 - (1-x)^\alpha (1-y)^\beta / (1-e) | \alpha x + \beta y > 2e; e\} \quad (24)$$

证明: 同定理 5, 分 3 段进行证明:

(1) 当  $\alpha x + \beta y < 2e$  时, 可证得  $C^e(x, y, 0.75, \alpha, \beta) = x^\alpha y^\beta / e$ .

(2) 当  $\alpha x + \beta y > 2e$  时, 可证得  $C^e(x, y, 0.75, \alpha, \beta) = 1 - (1-x)^\alpha (1-y)^\beta / (1-e)$ .

(3) 当  $\alpha x + \beta y = 2e$  时,  $C^e(x, y, 0.75, \alpha, \beta) = e$ .

综上所述, 定理 6 得证.

**定理 7** 当  $h=0.5$  时,  $m=0$ , 二元生成元加权零级泛组合运算模型为中心组合, 也称有界组合:

$$C^e(x, y, 0.5, \alpha, \beta) = \min(1, \max(0, \alpha x + \beta y - e)) \quad (25)$$

证明: 分 3 段进行证明:

(1) 当  $\alpha x + \beta y < 2e$  时,  $C^e(x, y, 0.5, \alpha, \beta) = \min(e, \max(0, \alpha x + \beta y - e))$ .

(2) 当  $\alpha x + \beta y > 2e$  时, 可证得  $C^e(x, y, 0.5, \alpha, \beta) = \min(1, \max(e, \alpha x + \beta y - e))$ .

(3) 当  $\alpha x + \beta y = 2e$  时,  $C^e(x, y, 0.5, \alpha, \beta) = e$ .

合并(1), (2), (3), 得:

$C^e(x, y, 0.5, \alpha, \beta) = \min(1, \max(0, \alpha x + \beta y - e))$ , 故定理 7 得证.

**定理 8** 当  $h=0$  时,  $m \rightarrow +\infty$ , 二元生成元加权零级泛组合运算模型为下限组合, 也称突变组合:

$$C^e(x, y, 0, \alpha, \beta) = \text{ite}\{0 | x, y < e; 1 | x, y > e; e\} \quad (26)$$

证明: 分 5 段进行证明:

(1) 当  $x, y < e$  时,  $C^e(x, y, 0, \alpha, \beta) = \min(e, 0) = 0$ .

(2) 当  $x, y$  一个大于  $e$ , 一个小于等于  $e, \alpha x + \beta y < 2e$  时, 同定理 5, 可证得  $C^e(x, y, 0, \alpha, \beta) = e$ .

(3) 如果  $\alpha x + \beta y = 2e$ , 得  $C^e(x, y, 0) = e$ .

(4) 当  $x, y > e$  时,

$$C^e(x, y, 0, \alpha, \beta) = 1 - \min(1 - e, (\max(0, \alpha(1-x)^m + \beta(1-y)^m - (1-e)^m))^{1/m})$$

因为  $x, y > e$ , 所以  $(1-x), (1-y) < (1-e)$ , 所以  $(1-x)^m$  和  $(1-y)^m$  是  $(1-e)^m$  的高阶无穷小, 因此  $\alpha(1-x)^m + \beta(1-y)^m < (1-e)^m$ , 因此  $C^e(x, y, 0) = 1 - 0 = 1$ .

(5) 当  $x, y$  一个大于等于  $e$ , 一个小于  $e, \alpha x + \beta y > 2e$  时, 同定理 5, 可证得  $C^e(x, y, 0) = e$ .

其中(2), (3), (5)的值一致, 可以合并, 再综合(1), (4), 得  $C^e(x, y, 0, \alpha, \beta) = \text{ite}\{0 | x, y < e; 1 | x, y > e; e\}$ , 故定理 8 得证.

二元生成元加权零级泛组合运算模型推广到多元的情况为:

**定义 10**  $N$  范数完整簇为  $N(x) = 1 - x$ , 零级  $T$  性生成元完整簇为  $F_0(x, h) = x^h$ , 则由

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, h, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = \text{ite}\{\min(e, F_0^{-1}(\max(0, \alpha_1 F_0(x_1, h) + \alpha_2 F_0(x_2, h) + \dots + \alpha_l F_0(x_l, h) - (l-1)F_0(e, h))), h)) | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l < le; N(\min(1-e, F_0^{-1}(\max(0, \alpha_1 F_0(N(x_1), h) + \alpha_2 F_0(N(x_2), h) + \dots + \alpha_l F_0(N(x_l), h) - (l-1)F_0(N(e), h))), h))) | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l > le; e\} \\ = \text{ite}\{\min(e, (\max(0, \alpha_1 x_1^h + \alpha_2 x_2^h + \dots + \alpha_l x_l^h - (l-1)e^h))^{1/h}) | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l < le; 1 - \min(1-e, (\max(0, \alpha_1(1-x_1)^h + \alpha_2(1-x_2)^h + \dots + \alpha_l(1-x_l)^h - (l-1)(1-e)^h))^{1/h}) | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l > le; e\} \quad (27)$$

实现的泛逻辑运算叫多元生成元加权零级泛组合运算. 其中,  $x, y, e, h \in [0, 1], \alpha_i \in [0, l], i = 1, 2, \dots, l$ , 且  $\sum_{i=1}^l \alpha_i = l, m = (3-4h)/(4h(1-h)), m \in R$ .

多元生成元加权零级泛组合运算模型的 4 个特殊算子是:

上限组合 Zadeh 组合

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = \text{ite}\{\min(x_1, x_2, \dots, x_l) | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l < le; \max(x_1, x_2, \dots, x_l) | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l > le; e\}$$

中极组合 概率组合

$$C^e(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.75, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = \text{ite}\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_l^{\alpha_l} / e^{l-1} | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l < le; 1 - (1-x_1)^{\alpha_1} (1-x_2)^{\alpha_2} \dots (1-x_l)^{\alpha_l} / (1-e)^{l-1} | \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l > le; e\}$$

中心组合 有界组合

$$C^*(x_1, x_2, \dots, x_l, 0.5, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \\ = \min(1, \max(0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l - (l-1)e))$$

下限组合 突变组合

$$C^*(x_1, x_2, \dots, x_l, 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \\ = ite\{0 | x_1, x_2, \dots, x_l < e; 1 | x_1, x_2, \dots, x_l > e; e\}$$

文献[14, 15]中都讨论了二元加权零级泛组合运算模型,但现有的二元加权泛组合运算模型是针对命题真值的线性加权或指数加权,虽然都能满足工程应用的需要,但线性加权不能满足泛组合运算应该在全局上取值的要求,指数加权不仅计算复杂且只能用于 $[0, 1]$ 标准区间<sup>[13]</sup>,因此本文提出了生成元加权零级泛组合运算模型,能满足泛组合运算在全局上取值的要求,且易于扩展到任意区间,扩大了适用范围。在实际组合决策应用时,可根据情况选择所使用的加权方式。

**结束语** 由于复杂系统中存在各种不确定性及相互关系,经典的二值逻辑对它来说显得太刚性,因此有研究者转而寻求“非标准逻辑”或“柔性逻辑”。模糊逻辑通过承认命题真值的连续可变性,打破了人们长期以来的“二值观”。而泛逻辑学则更进一步,它在承认命题真值连续可变性的基础上,分析命题之间关系的连续可变性,提出了“广义相关性”和“广义自相关性”两个重要的概念,将命题连接词运算模型定义为由相关性所控制的算子簇,实现了连接词运算模型的柔性化。其中泛组合命题连接词运算模型是为了满足连续值逻辑中综合决策的需求而提出的,仅有二元模型,在实际应用中受限,迫切需要多元模型。本文在原有的等权二元泛组合运算模型的基础上,修正了二元泛组合运算模型,提出了多元泛组合模型及生成元加权零级泛组合运算模型,并严密推导证明了它们的特殊算子。这些工作不仅完善了原有的泛逻辑命题连接词理论,而且为泛组合的应用提供了丰富的模型选择。

### 参考文献

[1] Klement E P, Navara M. Propositional fuzzy logics based on

Frank T-norms: A comparison[M]//Dubois D, Klement E P, Prade H, eds. Fuzzy Sets, Logics and Reasoning about Logics. Applied Logic Series 15. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1999: 17-38

- [2] 吴望名. 参数 Kleene 系统中的广义重言式[J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(1): 1-7
- [3] 王国俊, 兰蓉. 系统  $H_\alpha$  中的广义重言式理论[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 2003, 31(2): 1-11
- [4] He H C, Wang H, Liu Y H, et al. Principle of Universal Logics [M]. Beijing: Science Press, 2005
- [5] 张小红. 基于 T-模与伪 T-模的逻辑系统及其代数分析[D]. 西安: 西北工业大学, 2005
- [6] 鲁斌, 何华灿. 泛模糊逻辑控制器研究[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(16): 13-16
- [7] Mao M Y, Chen Z C, He H C. A New Uniform Neuron Model of Generalized Logic Operators Based on  $[a, b]$ [J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2006, 20(2): 159-171
- [8] Jin Y, He H C, Lü Y T. Ternary Optical Computer Principle [J]. Science in China, Ser F, 2003, 46(2): 145-150
- [9] 刘丽, 何华灿, 贾澎涛. 泛逻辑控制模型研究[J]. 计算机工程, 2007, 33(19): 7-9
- [10] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353
- [11] 应明生. 模糊逻辑的紧致性[J]. 科学通报, 1998, 43(4): 379-383
- [12] 王万森, 何华灿. 基于泛逻辑学的逻辑关系柔性化研究[J]. 软件学报, 2005, 16(5): 754-760
- [13] 贾澎涛. 基于柔性逻辑的时间序列数据挖掘研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2008
- [14] 刘丽. 基于柔性逻辑的智能控制研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2007
- [15] 付利华. 复杂系统的柔性逻辑控制理论及应用研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2005

(上接第 168 页)

将导致永远分不到正确的类别, 错误控制方法达到了预期的效果。

**结束语** 本文针对平面分类在类别庞大的情况下会出现分类器巨大、训练时间过长等问题, 说明了层次分类的必要性, 阐述了平面分类和层次分类的异同点, 给出了平面分类和层次分类在分类性能上的比较, 并提出了用分层特征权重计算和错误控制的方法对分类方法进行优化。实验证明层次分类方法比平面分类方法的分类效果要好, 同时分层特征权重计算和错误控制对层次分类效果有显著的提高。

本文提出的层次分类方法是对现有的平面分类的一个改进。为了更好地提高层次分类效果, 在特征重新计算和错误控制方面还需要进一步改进。

### 参考文献

[1] Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory[M]. New York: Springer, 2000: 1-300

[2] Svmlight J T. An implementation of Support Vector Machines (SVMs) in C[EB/OL]. <http://svmlight.joachims.org/>

[3] Sun Aixin, Lim Ee-Peng. Hierarchical text classification and evaluation[C]//Proceedings of the 2001 International Conference on Data Mining. 2000: 521-528

[4] Ruiz M E, Srinivasan P. Hierarchical neural networks for text

categorization[C]//Proceedings of the 22nd International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval (SIGIR'99). 1999: 281-282

- [5] Dumais S, Chen H. Hierarchical classification of Web content [C]//Proceedings of the 23rd ACM Int. Conf. on Research and Development in Information Retrieval. 2000: 256-263
- [6] Dekel O, Keshet J, Singer Y. Large margin hierarchical classification[C]//Proceedings of the 21st ICML. 2004: 27-34
- [7] Cai Lijuan. Hierarchical Document Categorization with Support Vector Machines[C]// CIKM04. 2004: 78-86
- [8] Cesa-Bianchi N. Hierarchical Classification: Combining Bayes with SVM[C]//Proceedings of the 23rd ICML. 2006: 177-184
- [9] Cheng C, Tang J, Fu A Wai-chee, et al. Hierarchical Classification of Documents with Error Control[C]//PAKDD. 2001: 433-443
- [10] Susan G. Training a Hierarchical Classifier Using Interdocument Relationships[J]. Journal of the American Society for Information Science and Technology, 2009, 60(1): 47-58
- [11] Koller D, Sahami M. Hierarchically classifying documents using very few words[C]//Proceedings of the Fourteenth International Conference on Machine Learning. 1997: 170-178
- [12] Mladenic D, Grobelnik M. Feature Selection for classification based on text hierarchy[C]//Proceedings of the Workshop on Learning from Text and the Web. 1998
- [13] 樊绮娜. 中文新闻领域的关键词抽取方法研究与实现[D]. 北京: 清华大学, 2006