

集合代数是经典命题演算形式系统的语义解释

刘宏岚 高庆狮 杨炳儒

(北京科技大学信息工程学院 北京 100083)

摘 要 经典命题演算形式系统(CPC)中的公式只是一些形式符号,其意义是由具体的解释给出的。逻辑代数和集合代数都是布尔代数,都是 CPC 的解释。集合代数是 CPC 的集合语义,其中对联结词的解释就是集合运算;对形式公式的解释就是集合函数;对逻辑蕴涵、逻辑等价的解释就是集合包含 $\subseteq$ 和集合相等 $=$ 。标准概率逻辑是在标准概率空间上建立的逻辑体系,命题表示随机事件,随机事件是集合,概率空间中的事件域是集合代数,概率逻辑就是 CPC 集合语义的实际应用。CPC 完全适用于概率命题演算。

关键词 经典命题演算形式系统,概率命题逻辑,概率空间,集合代数,同态

中图法分类号 TP18

文献标识码 A

Set Algebra is Semantic Interpretation for Classical Formal System of Propositional Calculus

LIU Hong-lan GAO Qing-shi YANG Bing-ru

(School of Information Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

Abstract The well formed formulas(wffs) in classical formal system of propositional calculus(CPC) are only some formal symbols, whose meanings are given by a interpretation. Both logic algebra and set algebra are Boolean algebra, and are interpretations for CPC. A set algebra is a set semantics for CPC, in which set operations are the interpretation for connectives, set functions are the interpretation for wffs, the set inclusion $\subseteq$ is the interpretation for logical implication, and the set equality $=$ is the interpretation for logical equivalence. Standard probabilistic logic is based on a standard probabilistic space, a proposition describes a random event which is a set, the event domain in a probabilistic space is a set algebra, probabilistic logic is just the practical application of the set semantics for CPC. We can perform event calculus instead of probability calculus in CPC. CPC is applicable to probabilistic propositional calculus completely.

Keywords CPC, Probabilistic propositional logic, Probabilistic space, Set algebra, Homomorphism

经典命题演算形式系统(CPC)中各种符号的意义是由具体的解释给出的。如布尔代数 $\langle\{0,1\}, \vee, \wedge, \rightarrow\rangle$ 是 CPC 的真值解释,其中命题变量的取值范围是 $\{0,1\}$,对联结词的解释就是真值运算,对形式公式的解释就是真值函数,对逻辑蕴涵、逻辑等价的解释就是真值小于等于 $\leq$ 和真值相等 $=$ 。下面将证明集合代数是 CPC 的集合解释。

1 集合代数是 CPC 的语义解释

1.1 集合赋值

设 Ω 是任意一个集合,集合 Ω 的幂集 $2^\Omega = \{x | x \subseteq \Omega\}$ 是 Ω 的所有子集的集合,集合代数 $\langle 2^\Omega, \cup, \cap, \sim \rangle$ 是布尔代数。 Ω 相对于它的所有子集来说是全集,补运算 $\sim$ 是相对于全集 Ω 的补,如 $\forall A \in 2^\Omega, A \cup \sim A = \Omega, A \cap \sim A = \emptyset$ 。集合代数 $\langle 2^\Omega, \cup, \cap, \sim \rangle$ 对于 CPC 中的形式公式的解释就是给公式一个确定的集合,是由集合赋值来完成的。本文用小写字母 f, g, h 等表示命题公式,用大写字母 A, B, C 等表示集合。

定义 1 对于形式公式的集合赋值,简称赋值,由两部分组成:

1) 某集合 Ω 的幂集 2^Ω , 作为命题变量的取值范围。

2) 集合赋值: 设 S 是 CPC 中的全体公式的集合, 一个集合赋值 $\varphi: S \rightarrow 2^\Omega$ 是一个映射, 满足如下条件, 对任意的公式 $f, g \in S$,

① $\varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \cap \varphi(g)$, 把赋给公式 f, g 的集合的交集赋给合取式 $f \wedge g$ 。这里 $\varphi(f)$ 是赋给公式 f 的集合。

② $\varphi(f \vee g) = \varphi(f) \cup \varphi(g)$ 。

③ $\varphi(\neg f) = \sim \varphi(f)$, 把赋给公式 f 的集合 $\varphi(f)$ 的补集 $\sim \varphi(f)$ 赋给否定式 $\neg f$ 。

④ $\varphi(f \rightarrow g) = \varphi(\neg f \vee g) = \sim \varphi(f) \cup \varphi(g)$ 。

注: 1) 集合赋值 φ 是命题逻辑系统 $\langle S, \vee, \wedge, \rightarrow \rangle$ 到集合代数 $\langle 2^\Omega, \cup, \cap, \sim \rangle$ 的同态映射, 即满足 $\forall f, g \in S, \varphi(\neg f) = \sim \varphi(f), \varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \cap \varphi(g), \varphi(f \vee g) = \varphi(f) \cup \varphi(g)$ 。

2) 集合运算 $\cup, \cap, \sim$ 等分别是逻辑运算 $\vee, \wedge, \rightarrow$ 等的语义解释。

3) 当给定 φ 后, 我们把公式 f 在映射 φ 下的象 $\varphi(f)$ 叫做 f 的赋值。

4) 命题公式的一个赋值: 指定某集合 Ω 的幂集 2^Ω 为命题变量的取值范围, 并且为公式中的每个命题变量指定 2^Ω 中的一个元素, 即 Ω 的一个子集。

到稿日期: 2009-10-13 返修日期: 2010-01-11 本文受国家自然科学基金(60873002)资助。

刘宏岚 女, 博士生, CCF 会员, 主要研究方向为模糊集合理论的研究与应用等, E-mail: honglanliu@ies.ustb.edu.cn; 高庆狮 男, 博士生导师, 中国科学院院士, 主要研究方向为自然语言理解及处理; 杨炳儒 男, 博士生导师, 主要研究方向为知识发现与智能系统。

1.2 重言式与矛盾式

定义 2 设公式 $f \in S$, 如果对每个赋值 $\varphi: S \rightarrow 2^{\Omega}$ 恒有 $\varphi(f) = \Omega$, 则称 f 为重言式, 记作 T 。如果对每个赋值 φ 恒有 $\varphi(f) = \emptyset$, 则称 f 为矛盾式, 记作 F 。这里 Ω 是全集, $\emptyset$ 是空集。

如对于任意赋值 $\varphi: S \rightarrow 2^{\Omega}$, 恒有 $\varphi(\neg f \vee f) = \sim \varphi(f) \cup \varphi(f) = \Omega$, $\varphi(\neg f \wedge f) = \sim \varphi(f) \cap \varphi(f) = \emptyset$, 所以公式 $\neg f \vee f$ 是重言式, 公式 $\neg f \wedge f$ 是矛盾式。

定义 3 任意的公式 $f, g \in S$, 如果对每个赋值 φ 恒有 $\varphi(f) = \varphi(g)$, 则称 f 与 g 重言等价, 记作 $f \equiv g$ 。

定理 1 常用的重言等价式有幂等律、结合律、分配律、摩根律、排中律、同一律、联词转换律等。

证明: 由于集合赋值 φ 是逻辑系统 $\langle S, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 到集合代数 $\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 的同态, 集合代数是布尔代数, 同时满足上述所有的定律, 因此对任意的公式 $f, g, h \in S$,

1) 分配律: 对每个赋值 φ , 由 φ 的定义且集合代数满足分配律, 有

$$\begin{aligned}\varphi(f \wedge (g \vee h)) &= \varphi(f) \cap \varphi(g \vee h) = \varphi(f) \cap (\varphi(g) \cup \varphi(h)) \\ &= (\varphi(f) \cap \varphi(g)) \cup (\varphi(f) \cap \varphi(h)) = \varphi((f \wedge g) \vee (f \wedge h))\end{aligned}$$

所以由重言等价的定义有 $f \wedge (g \vee h) \equiv (f \wedge g) \vee (f \wedge h)$ 。同理可证 $\vee$ 对 $\wedge$ 是可分配的。

2) 德·摩根律: 对任意赋值 φ , 由 φ 的定义且集合代数满足摩根律, 有

$$\begin{aligned}\varphi(\neg(f \wedge g)) &= \sim \varphi(f \wedge g) = \sim (\varphi(f) \cap \varphi(g)) = \sim \varphi(f) \cup \sim \varphi(g) \\ &= \varphi(\neg f) \cup \varphi(\neg g) = \varphi(\neg f \vee \neg g)\end{aligned}$$

所以 $\neg(f \wedge g) \equiv \neg f \vee \neg g$ 。同理可证 $\neg(f \vee g) \equiv \neg f \wedge \neg g$ 。

3) 矛盾律、排中律: $\neg f \wedge f \equiv F$, $\neg f \vee f \equiv T$

$\varphi(\neg f \wedge f) = \sim \varphi(f) \cap \varphi(f) = \emptyset$, 由定义 2, $\neg f \wedge f \equiv F$ 。

$\varphi(\neg f \vee f) = \sim \varphi(f) \cup \varphi(f) = \Omega$, 由定义 2, $\neg f \vee f \equiv T$ 。

4) 联词转换律: 由定义 1, $\varphi(f \rightarrow g) = \varphi(\neg f \vee g) = \sim \varphi(f) \cup \varphi(g)$, 得 $f \rightarrow g \equiv \neg f \vee g$ 。

对合律、幂等律、结合律、吸收律等证明略。

依据这些常用的命题定律和置换规则, 就可以进行命题的等价演算。

例 1 $(f \wedge g) \rightarrow h \equiv \neg(f \wedge g) \vee h \equiv \neg f \vee \neg g \vee h \equiv \neg f \vee (\neg g \vee h) \equiv \neg f \rightarrow (g \rightarrow h)$

形式上与经典二值逻辑的等值演算完全一致。可以证明, 在等价演算中, 联结词集合 $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \rightarrow\}$ 等是联结词的完备集。证明略。

定义 4 任意的公式 $f, g \in S$, 若 $f \rightarrow g$ 为重言式, 则称 f 重言蕴涵 g , 记作 $f \subseteq g$ 。

定理 2 任意的公式 $f, g, h \in S$, 下面是一些重要的重言蕴涵式, 有时也称它们为推理定律或推理规则。

1) 附加规则: $f \subseteq f \vee g$

2) 假言推理: $f \wedge (f \rightarrow g) \subseteq g$

3) 假言三段论: $(f \rightarrow g) \wedge (g \rightarrow h) \subseteq f \rightarrow h$

这些推理定律可通过等价演算法根据定义加以证明。如证明假言推理规则。

证明: $(f \wedge (f \rightarrow g)) \rightarrow g \equiv \neg(f \wedge (\neg f \vee g)) \vee g \equiv \neg((f \wedge \neg f) \vee (f \wedge g)) \vee g \equiv \neg(f \wedge g) \vee g \equiv \neg f \vee \neg g \vee g \equiv T$, 所以有 $f \wedge (f \rightarrow g) \subseteq g$ 为重言蕴涵式。其它证明略。

定理 3 任意的公式 $f, g \in S$, $f \subseteq g$ 当且仅当对每个赋值 φ 恒有 $\varphi(f) \subseteq \varphi(g)$ 。

证明: 对于集合的包含关系, $\varphi(f) \subseteq \varphi(g)$ 当且仅当 $\sim \varphi(f) \cup \varphi(g) = \Omega$, 即 $\varphi(f \rightarrow g) = \Omega$, 对任意的赋值 φ 恒有 $\varphi(f \rightarrow g) = \Omega$, 所以 $f \rightarrow g$ 为重言式, 即 $f \subseteq g$ 。

如对于任意的赋值 φ , $\varphi(f) \subseteq \varphi(f) \subseteq \varphi(g) = \varphi(f \vee g)$, 所以 $f \subseteq f \vee g$ 。

经典逻辑中所有的命题定律和推理定律仍然成立。所以说布尔代数 $\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 是 CPC 的语义解释。

1.3 布尔代数 $\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 是 CPC 的语义解释

布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 是 CPC 的真值解释, 布尔代数 $\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 是 CPC 的集合解释。两种解释的对照如表 1 所列。

表 1 集合语义与真值语义的比较

命题逻辑中的概念	$\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \neg \rangle$ 中的语义解释	$\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 中的语义解释
命题变量 p, q, r 等表示命题	真值变量 $p, q, r \in \{0, 1\}$	集合变量 $p, q, r \in 2^{\Omega}$
$\neg$	$\neg p = 1 - p, p \in \{0, 1\}$	$\neg p = \sim p, p \in 2^{\Omega}$
联结词	$p \vee q = \max(p, q), p, q \in \{0, 1\}$	$p \vee q = p \cup q, p, q \in 2^{\Omega}$
	$p \wedge q = \min(p, q), p, q \in \{0, 1\}$	$p \wedge q = p \cap q, p, q \in 2^{\Omega}$
	$p \rightarrow q = \max(1 - p, q), p, q \in \{0, 1\}$	$p \rightarrow q = \sim p \cup q, p, q \in 2^{\Omega}$
命题公式	真值函数 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$	集合函数 $f: (2^{\Omega})^n \rightarrow 2^{\Omega}$
如 $(p \wedge q) \rightarrow r$	如 $(p \wedge q) \rightarrow r, p, q, r \in \{0, 1\}$	如 $(p \wedge q) \rightarrow r, p, q, r \in 2^{\Omega}$
重言式	1	Ω , 全集
矛盾式	0	$\emptyset$, 空集
重言蕴涵 关系	数的小于等于 $\leq, \{0, 1\}$ 上的偏序关系, 如 $0 \leq 1, \forall p, q \in \{0, 1\}, p \wedge (p \rightarrow q) \leq q$	集合包含 $\subseteq, 2^{\Omega}$ 上的偏序关系, 如 $\forall p \in 2^{\Omega}, p \subseteq \Omega, \emptyset \subseteq p, \forall p, q \in 2^{\Omega}, p \wedge (p \rightarrow q) = p \wedge q \subseteq q$
	数的相等 $=, \{0, 1\}$ 上的等价关系, 如 $\forall p, q \in \{0, 1\}, p \rightarrow q = \neg p \vee q$	集合相等 $=, 2^{\Omega}$ 上的等价关系, 如 $\forall p, q \in 2^{\Omega}, \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

如对于命题公式 $(p \wedge q) \rightarrow r$: ①二值逻辑中解释为真值函数 $(p \wedge q) \rightarrow r, p, q, r \in \{0, 1\}$, 命题公式的等值演算 $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 就是真值函数的恒等演算 $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q, r \in \{0, 1\}$ 。②布尔代数 $\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 中解释为集合函数 $(p \wedge q) \rightarrow r, p, q, r \in 2^{\Omega}$, 命题公式的等价演算 $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 就是集合函数的恒等演算 $(p \wedge q) \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q, r \in 2^{\Omega}$ 。

2 概率命题逻辑是 CPC 集合语义的实际应用

标准概率逻辑是在标准概率空间上建立的一种逻辑体系。令 p, q 表示任意命题, $v(p)$ 表示 p 的真值, 联结词表示为 $v(\neg p) = 1 - v(p)$, $v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p \wedge q)$ 等。概率逻辑中命题公式的真值不能由其子公式的真值完全确定^[1,10], 如公式 $p \vee q$ 的真值 $v(p \vee q)$ 不是只与 $v(p)$ 和 $v(q)$ 有关, 还与 $v(p \wedge q)$ 有关, 不能表示成 $v(p \vee q) = f(v(p), v(q))$ 的形式, 则不能用 $[0, 1]$ 上的函数 f 表示概率运算, 实际应用不方便计算和推理, 不能在经典命题演算系统如公理推理系统或自然推理系统内实现概率演算。

经典二值逻辑的一个特点就是命题联结词都是真值函数^[2]。这是因为二值逻辑中, 复合命题的真值只与成分命题的真值有关, 而与成分命题的内涵无关, 所以二值逻辑可以用 $\{0, 1\}$ 上的真值函数(算子)解释联结词。但在概率逻辑中, “寻找 $[0, 1]$ 上的真值函数(算子)解释联结词”这一出发点本身就是不合理的。复合命题的真值不但与成分命题的真值有关, 更与成分命题的内涵有关。真值相同的不同成分命题构造的复合

命题的真值不一定相同。无逻辑依据地用任何真值函数解释联结词,必然会导致某些经典逻辑中常用的命题定律,如 $p \vee \neg p \Rightarrow 1, p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ 等不再成立。

2.1 随机事件是命题的集合解释

本文用小写字母 p, q, r 等表示命题。

例2 “张三明年1月1日中午将在中国的某地区”是一个随机现象,样本空间 $\Omega_1 = \{\text{中国所有的城市}\}$,事件域 $X = 2^{\Omega_1} = \{\emptyset, \{\text{北京}\}, \{\text{石家庄}\}, \dots, \{\text{台北}\}, \text{河北} = \{\text{河北省城市}\}, \dots, \text{海南} = \{\text{海南省城市}\}, \text{东北} = \{\text{东北地区城市}\}, \dots, \text{沿海} = \{\text{沿海城市}\}, \dots, \text{中国} = \{\text{中国的城市}\}\}$,其中的元素是随机事件,即 Ω_1 的子集。概率空间 (Ω_1, X, Pr) 表示该随机现象, Pr 表示概率。

事件域 X 关于所有的集合运算封闭, X 是集合代数。所以可定义事件赋值 $\varphi: S \rightarrow X$ 。令谓词 $P(x)$ 表示“张三明年1月1日中午将在 x 地区”,客体变量 $x \in X$ 。如令 A 表示石家庄($=\{\text{石家庄市}\}$), B 表示河北($=\{\text{河北省城市}\}$),令 $\varphi(p) = A, \varphi(q) = B$,则事件 A 是命题 $p = P(A)$ 的集合解释,事件 B 是命题 $q = P(B)$ 的集合解释。

例3 “明天的离散数学课将被安排在某时间上”是一个随机现象,样本空间 $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\}$,集合元素表示第几节课。事件域 $Y = 2^{\Omega_2} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \text{上午} = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \text{下午} = \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\}\}$ 。概率空间 (Ω_2, Y, Pr) 表示该随机现象。对于集合代数 Y ,可定义事件赋值 $\varphi: S \rightarrow Y$ 。令谓词 $Q(y)$ 表示“明天的离散数学课将被安排在 y 时间上”, $y \in Y$ 。如令 C 表示第1节课($=\{1\}$), D 表示上午($=\{1, 2\}$),令 $\varphi(p) = C, \varphi(q) = D$,则事件 C 是命题 $p = Q(C)$ 的集合解释,事件 D 是命题 $q = Q(D)$ 的集合解释。

例4 继续例2、例3。令 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$,二维概率空间 $(\Omega, 2^{\Omega}, Pr)$ 表示随机现象“张三明年1月1日中午将在中国的某地区,明天的离散数学课将被安排在某时间上”。对于集合代数 $Z = 2^{\Omega}$,可定义事件赋值 $\varphi: S \rightarrow Z$ 。

若令 $\varphi(p) = B \times D = \{(\text{石家庄}, 1), (\text{石家庄}, 2), (\text{承德}, 1), (\text{承德}, 2), \dots\}$,则事件 $B \times D$ 是命题 $p = P(B) \wedge Q(D)$ 的集合解释。

令 $\varphi(q) = A \times D = \{(\text{石家庄}, 1), (\text{石家庄}, 2)\}$,则事件 $A \times D$ 是命题 $q = P(A) \wedge Q(D)$ 的集合解释。

令 $\varphi(r) = B \times C = \{(\text{石家庄}, 1), (\text{承德}, 1), \dots\}$,则事件 $B \times C$ 是命题 $r = P(B) \wedge Q(C)$ 的集合解释。

令 $\varphi(s) = A \times C = \{(\text{石家庄}, 1)\}$,则事件 $A \times C$ 是命题 $s = P(A) \wedge Q(C)$ 的集合解释。则 $\varphi(\neg s) = \sim \varphi(s) = \sim (A \times C) = \Omega - A \times C$,事件 $\sim (A \times C)$ 是命题 $\neg s$ 的集合解释。

令 $\varphi(t) = B \times \Omega_2 \times \Omega_1 \times D$,则事件 $B \times \Omega_2 \times \Omega_1 \times D$ 是命题 $t = P(B) \vee Q(D)$ 的集合解释。

令 $\varphi(u) = A \times \Omega_2$,则事件 $A \times \Omega_2$ 是命题 $u = P(A)$ 的集合解释。

说明:(1) 命题的真值是事件的概率:概率逻辑中,事件是命题的集合解释,或者说命题表示事件,一个命题表示惟一确定的事件,一个命题具有惟一确定的真值。命题是对事件的发生作出判断。命题的真值就是事件发生的可能性大小,即事件的概率,它满足概率的公理化定义,具有概率的一切性质,如非负性、正则性、可列可加性和单调性等。

本文用 $v(p)$ 表示命题 p 的真值, $Pr(A)$ 表示事件 A 的概率(probability)。有 $\forall f \in S, v(f) = Pr(\varphi(f))$,命题的真值是

赋值给命题的(或命题所表示的)事件的概率。如在例2中, Ω_1 是样本空间,也是必然事件,有真值 $v(P(\Omega_1)) = Pr(\Omega_1) = 1$ 。若张三是等概率地出现在各个城市,可计算真值 $v(p) = Pr(\varphi(p)) = Pr(A) = |A|/|\Omega_1|, v(q) = Pr(\varphi(q)) = Pr(B) = |B|/|\Omega_1|$,其中 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数。

(2) 设 (Ω, X, Pr) 为任一概率空间, Ω 是样本空间,事件是样本空间的子集,事件域 X 是事件的集合。 X 关于所有的集合运算封闭,是集合代数。所以可定义事件赋值 $\varphi: S \rightarrow X$,满足 $\forall f, g \in S, \varphi(\neg f) = \sim \varphi(f), \varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \cap \varphi(g), \varphi(f \vee g) = \varphi(f) \cup \varphi(g)$,则有

$$1) v(f \wedge g) = Pr(\varphi(f \wedge g)) = Pr(\varphi(f) \cap \varphi(g))$$

$$2) v(f \vee g) = Pr(\varphi(f \vee g)) = Pr(\varphi(f) \cup \varphi(g))$$

$$3) v(\neg f) = Pr(\varphi(\neg f)) = Pr(\sim \varphi(f)) = 1 - Pr(\varphi(f)) = 1 - v(f)$$

$$4) v(f \rightarrow g) = Pr(\sim \varphi(f) \cup \varphi(g))$$

特别地,对任意的公式 $f, g \in S$,

1) 若 f 是重言式,即对任一概率空间 (Ω, X, Pr) ,对任意赋值 $\varphi: S \rightarrow X$ 恒有 $\varphi(f) = \Omega$, Ω 是必然事件,则有 $v(f) = Pr(\varphi(f)) = Pr(\Omega) = 1$,重言式的真值恒为1。若 f 是矛盾式,即对任意赋值 φ 恒有 $\varphi(f) = \emptyset$,空集 $\emptyset$ 是不可能事件,则有 $v(f) = Pr(\varphi(f)) = Pr(\emptyset) = 0$,矛盾式的真值恒为0。概率逻辑与二值逻辑相容。

2) 若 $f \equiv g$,即对每个赋值 φ 恒有 $\varphi(f) = \varphi(g)$,则有 $v(f) = Pr(\varphi(f)) = Pr(\varphi(g)) = v(g)$ 。

3) 若 $f \subseteq g$,即对每个赋值 φ 恒有 $\varphi(f) \subseteq \varphi(g)$,根据概率的单调性,即 $\forall A, B \in X$,若 $A \subseteq B$,则 $Pr(A) \leq Pr(B)$,所以 $v(f) = Pr(\varphi(f)) \leq Pr(\varphi(g)) = v(g)$,即 $v(f) \leq v(g)$ 。

2.2 命题间的关系是事件间的关系

构造形式系统是为了研究推理,而一个有效推理的基本要求是:如果前提是真的(成立),则结论也必须是真的。即考察推理关系的时候主要考虑的是命题的关系,命题的关系同事件的关系相对,有蕴涵、等价、不相容和独立等。设 (Ω, X, Pr) 为任一概率空间,集合代数 $\langle X, \cup, \cap, \sim \rangle$ 是 CPC 的集合解释。

1) p 蕴涵 q ,记作 $p \subseteq q$ 当且仅当 $\varphi(p) \subseteq \varphi(q)$ 。根据概率的单调性得 $v(p) \leq v(q)$ 。这时有

$$v(p \wedge q) = Pr(\varphi(p) \cap \varphi(q)) = Pr(\varphi(p)) = v(p) = \min(v(p), v(q))$$

$$v(p \vee q) = Pr(\varphi(p) \cup \varphi(q)) = Pr(\varphi(q)) = v(q) = \max(v(p), v(q))$$

Łukasiewicz 算子成立。

$$v(p \rightarrow q) = Pr(\sim \varphi(p) \cup \varphi(q)) = Pr(\Omega) = 1。$$

2) p 等价 q ,记作 $p \equiv q$ 当且仅当 $\varphi(p) = \varphi(q)$ 。这时有 $v(p) = Pr(\varphi(p)) = Pr(\varphi(q)) = v(q)$,但反过来若 $v(p) = v(q)$, $\varphi(p)$ 与 $\varphi(q)$ 不一定相等。

3) p 与 q 不相容(交)当且仅当 $\varphi(p) \cap \varphi(q) = \emptyset$ 。这时有 $v(p \wedge q) = Pr(\varphi(p) \cap \varphi(q)) = 0$

$$v(p \vee q) = Pr(\varphi(p) \cup \varphi(q)) = Pr(\varphi(p)) + Pr(\varphi(q)) = v(p) + v(q)$$

4) p 与 q 独立当且仅当 $\varphi(p)$ 与 $\varphi(q)$ 独立。这时有 $v(p \wedge q) = Pr(\varphi(p) \cap \varphi(q)) = Pr(\varphi(p)) \times Pr(\varphi(q)) = v(p) \times v(q)$

$$v(p \vee q) = Pr(\varphi(p) \cup \varphi(q)) = v(p) + v(q) - v(p) \times v(q)$$

概率算子成立。

命题间的关系就是赋给命题的事件间的关系。如例 2 中 $A \subseteq B, p$ 蕴涵 q, p 成立时 q 一定成立。例 4 中由于 $A \subseteq B, C \subseteq D$, 有 $A \times C \subseteq B \times C \subseteq B \times D, A \times C \subseteq A \times D \subseteq B \times D, B \times D \subseteq B \times \Omega_2 \times \Omega_1 \times D$, 因此命题 s 蕴涵 p, q, r, t 。命题 q, r 蕴涵 p , 命题 p 蕴涵 t 。

命题间的逻辑运算与命题的关系有关。命题关系不同, 逻辑运算的具体的真值计算公式便不同。所以各种模糊逻辑系统对于逻辑联结词定义了大量的算子, 而且每种算子都只是在一定范围内适用。

2.3 联结词的解析与事实相符, 与经典二值逻辑相容

如对例 4 中的复合命题, 有以下运算:

$$\varphi(q \wedge r) = \varphi(q) \cap \varphi(r) = A \times D \cap B \times C = A \times C = \varphi(s)$$

所以有 $q \wedge r \equiv s, v(q \wedge r) = Pr(A \times D \cap B \times C) = v(s)$ 。

如例 2 中, 由于 $A \subseteq B$,

$$\varphi(p \vee q) = \varphi(p) \cup \varphi(q) = B, v(p \vee q) = \max(v(p), v(q)) = v(q)$$

$$\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q) = A, v(p \wedge q) = \min(v(p), v(q)) = v(p)$$

$v(p \rightarrow q) = Pr(\sim \varphi(p) \cup \varphi(q)) = Pr(\Omega_1) = 1$, 如果命题 P (石家庄) 为真, 则 P (河北) 为真, 完全符合经典逻辑中对蕴涵联结词的定义。

令 $E = \text{四川} = \{\text{四川省城市}\}, \varphi(r) = E$, 由于 $B \cap E = \emptyset, v(q \wedge r) = Pr(\varphi(q) \cap \varphi(r)) = 0 \neq \min(v(q), v(r))$, 与事实相符, 张三不可能同时出现在河北和四川两个地区。 $P(B)$ 与 $P(E)$ 不可能同时为真。 Łukasiewicz 算子只是对具有包含关系的命题成立。

例 5 对任意的公式 $f, g \in S$, 当 $f \subseteq g$ 即对任意的赋值 $\varphi, \varphi(f) \subseteq \varphi(g)$ 时, $\varphi(f \wedge g) = \varphi(f) \cap \varphi(g) = \varphi(f)$, 由定义 3 有 $f \wedge g \equiv f; \varphi(f \vee g) = \varphi(f) \cup \varphi(g) = \varphi(g)$, 即 $f \vee g \equiv g; \varphi(f \rightarrow g) = \sim \varphi(f) \cup \varphi(g) = \Omega, v(f \rightarrow g) = Pr(\sim \varphi(f) \cup \varphi(g)) = Pr(\Omega) = 1$, 当蕴涵联结词 $\rightarrow$ 的前件成立时, 后件也成立, $v(f \rightarrow g) = 1$, 与经典二值逻辑相容。

即当 f 重言蕴涵 g 时, $f \wedge g \equiv f, f \vee g \equiv g, f \rightarrow g \equiv T$ 。

若 $f \equiv F$, 即 $\varphi(f) = \emptyset, \forall h \in S, \varphi(f \rightarrow h) = \sim \varphi(f) \cup \varphi(h) = \Omega, v(f \rightarrow h) = Pr(\Omega) = 1$, 即 $f \rightarrow h \equiv T$ 。经典逻辑中“善意的推定”, 当前件为假 ($v(f) = 0$) 时, 后件的真值无论是多少, $v(f \rightarrow h) = 1$, 与经典二值逻辑相容。

结束语 布尔代数 $\langle \{0, 1\}, \vee, \wedge, \rightarrow \rangle$ 是经典命题演算形式系统 (CPC) 的真值解释。对联结词的解析就是真值运算, 对形式公式的解释就是真值函数, 对逻辑蕴涵、逻辑等价的解释就是真值小于等于 $\leq$ 和真值相等 $=$ 。布尔代数 $\langle 2^{\Omega}, \cup, \cap, \sim \rangle$ 是 CPC 的集合解释, 对联结词的解析就是集合运算, 对公式的解释就是集合函数, 对逻辑蕴涵、逻辑等价的解释就是集合包含 $\subseteq$ 和集合相等 $=$ 。

概率命题逻辑是 CPC 集合语义的实际应用。概率逻辑是在标准概率空间 (Ω, X, Pr) 上建立的逻辑体系, 事件域 X 是集合代数, 是 CPC 集合语义。其中事件是命题的集合解释, 命题的真值就是事件的概率, 具有概率的一切性质。二值逻辑中所有的命题定律和推理定律在概率逻辑中仍然成立。概率逻辑与经典二值逻辑完全相容。

概率逻辑不能在 CPC 内实现概率演算, 但可在 CPC 内实现事件演算。CPC 如公理推理系统或自然推理系统完全适用于概率命题演算。

参考文献

- [1] Gabbay D M, Guentner F, et al. Handbook of Philosophical Logic (2nd Edition) [M]. Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, 2001: 53
- [2] 杜国平. 经典逻辑与非经典逻辑基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 47
- [3] [美] Enderton H B. 数理逻辑 (第 2 版) [M]. 陈复兴, 陈磊, 等译. 北京: 人民邮电出版社, 2007: 14
- [4] 刘宏岚, 高庆狮, 杨炳儒. 概率命题逻辑中命题相等关系的两个层面与命题演算 [J]. 哲学研究, 2009 (10): 113
- [5] 刘宏岚, 高庆狮, 杨炳儒. 概率逻辑中的命题相关性与逻辑运算 [J]. 北京科技大学学报, 2008, 29 (9): 1079
- [6] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 4
- [7] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理 [M]. 北京: 科学出版社, 2000: 63
- [8] 耿素云, 屈婉玲. 离散数学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 3
- [9] 王万森, 何华灿. 基于泛逻辑学的逻辑关系柔性化研究 [J]. 软件学报, 2005, 16 (5): 754
- [10] 杨炳儒. 知识工程与知识发现 [M]. 北京: 冶金工业出版社, 2000: 76

(上接第 189 页)

距离聚类粒度, 从而避免了人为地设定距离聚类粒度, 为更好地实现道路网络聚类提供了参考方法, 减少了同类移动对象与中心位置数据库的数据传输, 减少了通信量, 提高了通信效率。但在训练 BP 网络时, 历史数据是个重要的影响因素, 因为具有代表性的历史数据能够客观地反映现实的道路交通情况, 能够快速收敛, 并得到训练结果; 劣质的历史数据不能够反映真实的道路交通情况, 使得训练的结果很差, 或者一直处于训练状态。

参考文献

- [1] Han J W, Kambr M. Data Mining Concepts and Techniques (2nd ed) [M]. Beijing, China Machine Press, 2001: 335-395
- [2] Yiu M L, Mamoulis N, Papadias D. Aggregate nearest neighbor queries in road networks [J]. IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering, 2005, 17 (6): 820-833
- [3] Sellis T. Research Issues in Spatio-temporal Database Systems [C] // Proceedings 6th International Symposium on Large Spatial Databases, Hong Kong, China, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1651, 1999: 5-11
- [4] Zobel J, Moffat A, Ramamohanarao K. Guidelines for Presentation and Comparison of Indexing Techniques [J]. ACM SIGMOD Record, 1996, 25 (3): 10-15
- [5] Yiu M L, Mamoulis N. Clustering objects on a spatial network [C] // Weikum G, König AC, Deßloch S, eds. Proc. of the ACM SIGMOD Int'l Conf. on Management of Data, New York: ACM Press, 2004: 443-454
- [6] 陈继东, 孟小峰, 赖彩凤. 基于道路网络的对象聚类研究 [J]. 软件学报, 2007, 8 (2): 332-344
- [7] Integrating Spatial and Temporal Databases [Z]. Seminar, Schloss Dagstuhl, Wadern, Germany, November 1998
- [8] Spatial and Temporal Databases [C] // 7th International Symposium, Redondo Beach, CA, July 2001