

# LHL-立方体互连网络及其性质

李 勇 樊建席 王 喜 周吴军

(苏州大学计算机科学与技术学院 苏州 215006)

**摘 要** 并行计算系统一直是计算机科学中的重要研究领域,其互连网络的拓扑性质对整个网络的性能起着非常重要的作用。目前已经提出多种互连网络,其中超立方体具有对数级的直径、高连通度、对称性等很好的性质,故被用作多种并行机的处理器连接的拓扑结构。然而,超立方体并非所有性质都是最优的互连网络,且超立方体的许多变型结构具有许多比起立方体更好的性质,其中已经证明了局部扭立方体在直径、Hamilton 连通性等方面都优于超立方体。给出在超立方体与局部扭立方体的顶点间的一种连接方式——超连接,从而得到一种称为 LHL-立方体的新型网络,并对这种网络的以下性质进行了研究:顶点连通度、边连通度、Hamilton 连通性、直径。研究结果表明,一个  $n$  维 LHL-立方体是一个具有  $2^n$  个顶点和  $n2^{n-1}$  条边的  $n$ -正则图, $n$  维 LHL-立方体的顶点连通度和边连通度均为  $n$ ,且是 Hamilton 连通的,直径上界为  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3$ 。

**关键词** 超立方体,局部扭立方体,互连网络,连通度,Hamilton 性质,直径

## LHL-cube Interconnection Networks and their Properties

LI Yong FAN Jian-xi WANG Xi ZHOU Wu-jun

(College of Computer Science and Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China)

**Abstract** The parallel processing system is one of the research focuses on computer science. The properties of the network are very crucial because they determine the performance of the whole network. Many interconnection network topologies have been proposed. Hypercube topology has enjoyed popularity due to many of its attractive properties, including small diameter, strong connectivity and symmetry. But the hypercube is not the best topology on all aspects. Some variants of the hypercube have better properties than the hypercube. Among these variants the locally twisted cube has drawn a great deal of attention from the researchers. Its superior properties over the hypercube on diameter, Hamilton connectivity and some other properties have been proved. This paper gave a kind of connection—the hyper connection between the nodes of the hypercube and the nodes of the locally twisted cube. Thus, a new interconnection network called a LHL-cube was obtained by using this kind of connection. These properties were studied in this paper: vertex connectivity, link connectivity, Hamilton connectivity and diameter. The results show that the vertex connectivity and the link connectivity of the  $n$  dimension LHL-cube are all  $n$ . Then it was proved that the  $n$  dimension LHL-cube is Hamilton connectivity and the upper bound diameter is  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3$ .

**Keywords** Hypercube, Locally twisted cube, Interconnection network, Connectivity, Hamilton property, Diameter

## 1 引言

并行计算系统一直是计算机科学研究中一个重要的研究领域。多处理器互连网络(Interconnection Networks)简称互连网络,是指由若干个处理器按一定方式相互连接而构成的网络。因此多处理器之间互连所形成的网络的拓扑性质的优劣直接决定着整个网络性能的优劣,故研究互连网络拓扑结构及其性质是并行计算系统的一个重要课题。

超立方体互连网络是最流行的互连网络之一。一个具有

$n$  维超立方体结构的多处理机系统其每个处理机被指定一个唯一的由  $n$  位 0,1 串表示的地址,当且仅当两个处理机所代表的地址只有一位不同时,则将它们连接起来。 $n$  维超立方体  $Q_n$  是一个具有  $2^n$  个顶点和  $n2^{n-1}$  条边的  $n$ -正则图,具有对数级的直径、最高连通度和完全对称性<sup>[1-3]</sup>等优点;在悲观策略下的可诊断性是  $2n - 2$ <sup>[4]</sup>;在比较模型下的可诊断性为  $n$ <sup>[5]</sup>。因此已经研制出许多基于超立方体结构的并行机,如 nCUBE, CM-2, IPSC-860。但超立方体在某些方面的性质并不一定是最好的,于是提出了多种超立方体的变型结构。局

到稿日期:2009-09-21 返修日期:2009-12-17 本文受国家自然科学基金项目(编号:60873047)和江苏省自然科学基金项目(编号: BK2008154)资助。

李 勇(1985—),男,研究生,主要研究方向为互连网络等,E-mail:20084227064011@suda.edu.cn;樊建席(1965—),男,教授,主要研究方向为互连网络、算法设计、图论、自动机;王 喜(1987—),男,研究生,主要研究方向为分布式系统与网格计算等;周吴军(1986—),男,研究生,主要研究方向为分布式系统与网格计算等。

部扭立方体  $LTQ_n$ <sup>[6]</sup> 是 Yang 于 2005 年提出的一类互连网络。 $n$  维局部扭立方体具有最高连通度  $n$ <sup>[6]</sup>。文献[7-9]分别研究了一类互连网络族——对应连接(BC)图的  $t/k$  可诊断性以及条件诊断性,因为(BC)图包含局部扭立方体作为其子类,所以局部扭立方体在  $t/k$  诊断策略以及在条件诊断策略下的可诊断性也不低于超立方体。近年来,出现了许多关于局部扭立方体的研究成果<sup>[10-17]</sup>。此外,它还具有比超立方体更好的性质,如局部扭立方体是 Hamilton 连通的,而超立方体不是 Hamilton 连通的。

超立方体和局部扭立方体相比都既有优点也有缺点,我们希望一个互连网络既有超立方体的优点又有局部扭立方体的优点。基于此,本文给出了在超立方体与局部扭立方体的顶点之间的一种连接方式——超连接,从而得到一种称为 LHL-立方体的新型网络,并对这种网络的顶点度数、顶点连通度、边连通度、Hamilton 连通性和直径进行了研究。具体结果如下:

1)  $n$  维 LHL-立方体是一个具有  $2^n$  个顶点和  $n2^{n-1}$  条边的  $n$ -正则图,其顶点连通度和边连通度均为  $n$ ,因此 LHL-立方体也是具有最高连通度的。

2)  $n$  维 LHL-立方体是 Hamilton 连通的。互连网络中的 Hamilton 性质是非常重要的。在互连网络的信息传递过程中,严重阻塞的边会延迟通信时间。所以,若一个互连网络是 Hamilton 连通的,则表明在该网络中任何两个不同的通信结点间都是存在 Hamilton 路径的。该性质在虫洞多点路由算法中可以减轻传统的基于树的多点传送算法所带来的拥塞和死锁<sup>[18,19]</sup>。

3)  $n$  维 LHL-立方体的直径上界为  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3$ ,并且通过编写程序对 LHL-立方体互连网络的通信开销进行了模拟。由于在传递信息过程中每经过一个中间处理器就会有一段时间的延迟,故直径小的网络比直径大的网络更能减少处理机之间的通讯步数,从而有效地减少了信息在传输过程中的延迟,提高了传送信息的效率<sup>[20]</sup>。

## 2 预备知识

设  $G$  是一个图,用  $V(G), E(G), D(G), k(G), \lambda(G)$  和  $\delta(G)$  分别表示图  $G$  的顶点集、边集、直径、顶点连通度、边连通度和最小顶点度数。图  $G$  中顶点  $u$  的度数,记为  $d_G(u)$ 。若对所有的顶点  $u \in V(G)$ ,其度数均为  $n$ ,则称图  $G$  是  $n$ -正则的。图  $G$  中路径是边的序列  $(e_1, e_2)(e_2, e_3) \dots (e_{k-1}, e_k), e_i \in E(G)$ ,其中  $1 \leq i, j \leq k, e_i \neq e_j, i \neq j$ 。路径  $P$  的长度指路径上边的数目,记为  $|P|$ 。若图  $G$  中任意两个不同顶点之间存在一条 Hamilton 路径,则称图  $G$  是 Hamilton 连通的。若一条路径  $P$  上所有顶点都是无故障的,则称路径  $P$  是无故障的。若路径  $P$  和  $Q$  无共同顶点,则称路径  $P$  和  $Q$  是互不相交的,记为  $P \cap Q = \emptyset$ 。若图  $G$  中顶点  $u, v$  间存在一条路,则称顶点  $u$  和  $v$  是连通的。若图  $G$  中任意两个不同顶点之间都存在一条路,则称图  $G$  是连通图,否则称图  $G$  是非连通图。图  $G$  的顶点连通度(简称连通度)是指删除了顶点子集  $V'$ ,使得图  $G - V'$  不连通的最小  $|V'|$  值。图  $G$  的边连通度是指删除边子集  $E'$ ,使得图  $G - E'$  不连通的最小  $|E'|$  值。若图  $G$  的顶点连通度为  $n$ ,则称图  $G$  是  $n$ -连通的。顶点  $x$  与  $y$  之间的距离定

义为  $x$  与  $y$  之间最短路径的长度,记为  $dist(G, x, y)$ 。图  $G$  的直径是图中任意两顶点间距离的最大值。设  $G_1$  与  $G_2$  是两个图,若存在两个一一映射  $\pi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  和  $\mu: E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ ,使  $\phi_{G_1}(e) = (x, y)$  当且仅当  $\phi_{G_2}(\mu(e)) = (\pi(x), \pi(y))$ ,这样一个映射对  $(\pi, \mu)$  称为  $G_1$  与  $G_2$  之间的一个同构。若  $G_1$  与  $G_2$  同构,记为  $G_1 \cong G_2$ 。在本文中对同构的图不加区别。设  $C$  是图  $G$  的一个圈,  $x$  是圈  $C$  上的一个顶点,  $(u, v)$  是圈  $C$  上的一条边,用  $C-x$  表示删除顶点  $x$  后的路径,用  $C-(u, v)$  表示删除边  $(u, v)$  后的路径。

设  $\{0, 1\}^n$  表示所有长度为  $n$  的由 0 和 1 构成的二进制串的集合。对二进制串  $x = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0 \in \{0, 1\}^n$ ,  $x_{n-1}$  称为二进制串  $x$  的第一位,  $x_{n-2}$  是第二位,  $\dots$ ,  $x_0$  是第  $n$  位。对二进制串  $y = y_{n-1}y_{n-2} \dots y_0 \in \{0, 1\}^n$ ,  $y_{n-1}$  称为二进制串  $y$  的第一位,  $y_{n-2}$  是第二位,  $\dots$ ,  $y_0$  是第  $n$  位。我们定义顶点  $x, y$  之间的海明距离为二进制串  $x_{n-1}x_{n-2} \dots x_0$  和  $y_{n-1}y_{n-2} \dots y_0$  对应位置的二进制数不相同的个数。

定义 1  $n$  维  $LTQ_n$  的递归定义<sup>[6]</sup>如下:

1) 当  $n=2$  时,  $LTQ_2$  由标记为 00、01、10 和 11 的 4 个顶点以及 4 条边(00,01)、(00,10)、(01,11)和(10,11)组成。

2) 当  $n \geq 3$  时,  $LTQ_n$  是由两个  $n-1$  维的局部扭立方体  $LTQ_{n-1}^0$  和  $LTQ_{n-1}^1$  相互连接而形成的  $n$ -正则图,其中  $LTQ_{n-1}^0 \cong LTQ_{n-1}^1 \cong LTQ_{n-1}$ 。即将  $LTQ_{n-1}^0$  中的每一个顶点  $0x_{n-2}x_{n-3} \dots x_0$  和  $LTQ_{n-1}^1$  中相对应的顶点  $1(x_{n-2} + x_0)x_{n-3} \dots x_0$  相连,其中 '+' 表示模 2 加法。

三维和四维的局部扭立方体如图 1 所示。

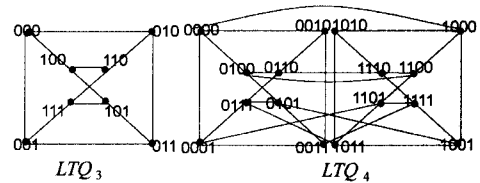


图 1 局部扭立方体  $LTQ_3$  和  $LTQ_4$

定义 2  $n$  维 LHL-立方体的递归定义如下:

1) 当  $1 \leq n \leq 3$ ,  $n$  维 LHL-立方体即是  $n$  维的超立方体。  
2) 当  $n \geq 4$ ,  $n$  维 LHL<sub>n</sub> 是由  $n-1$  维的超立方体和  $n-1$  维的局部扭立方体按下述方式相互连接而成:在  $Q_{n-1}$  的每个顶点的最高位左边加 0,并将所得到的图记为  $Q_{n-1}^0$ ;在  $LTQ_{n-1}$  的每个顶点的最高位的左边加 1,并将所得到的图记为  $LTQ_{n-1}^1$ 。对于  $Q_{n-1}^0$  和  $LTQ_{n-1}^1$  中的顶点  $x, y$ ,记  $x = 0x_{n-2} \dots x_0, y = 1y_{n-2} \dots y_0$  当且仅当  $x_{n-2}x_{n-3} \dots x_0 = y_{n-2}y_{n-3} \dots y_0, (x, y) \in E(LHL_n)$  才能成立。

三维超立方体和三维局部扭立方体如图 2 所示。

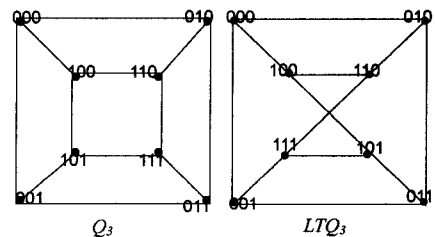


图 2 三维超立方体和局部扭立方体  $Q_3$  和  $LTQ_3$   
四维 LHL-立方体如图 3 所示。

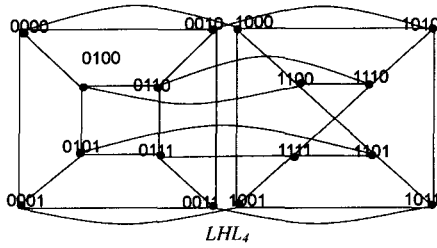


图3 四维 LHL-立方体  $LHL_4$

### 3 LHL-立方体的性质

#### 3.1 LHL-立方体的顶点度数、顶点的连通度

根据 Menger 定理<sup>[21]</sup>, 一个图的顶点连通度为  $n$  当且仅当该图的任意两个顶点之间存在至少  $n$  条顶点互不相交的路径。假设一个互连网络的连通度为  $n$ , 在该互连网络中只要故障处理器个数小于等于  $n-1$  个, 则该互连网络中任何两个无故障处理器间必定至少有一条可靠的路径。

**定理 1** 一个  $n$  维的 LHL-立方体是一个具有  $2^n$  个顶点和  $n2^{n-1}$  条边的  $n$  正则图。

证明: 根据超立方体定义<sup>[3]</sup>、局部扭立方体定义<sup>[6]</sup>和定义 2, 易证明: 一个  $n$  维 LHL-立方体是一个具有  $2^n$  个顶点和  $n2^{n-1}$  条边的  $n$  正则图。

**定理 2** 设  $n \geq 1$ ,  $\delta(LHL_n) = n$ 。

证明: 由定理 1 知,  $n$  维 LHL-立方体是  $n$  正则的, 容易证明  $n$  维 LHL-立方体的最小顶点度数为  $n$ 。

**引理 1**<sup>[3,6]</sup> 设  $n \geq 1$ , 则  $k(Q_n) = k(LTQ_n) = n$ 。

**引理 2**<sup>[10]</sup> 设  $n \geq 3$ , 则  $LTQ_n$  是 Hamilton 连通的。

**引理 3** 超立方体中任意一条边都属于超立方体的某个 Hamilton 圈。

证明: 超立方体是 Hamilton 图, 即超立方体中必定存在 Hamilton 圈。根据超立方体的顶点对称性和边对称性, 故超立方体中任意一条边都在超立方体的某个 Hamilton 圈上。

**定理 3** 设  $n \geq 1$ , 则  $k(LHL_n) = n$ 。

证明: 当  $1 \leq n \leq 3$ , 由定义 2 知, LHL-立方体即为超立方体。由引理 1 知,  $k(LHL_n) = k(Q_n) = n$ , 定理显然成立。

当  $n \geq 4$ , 设  $V'$  为  $n$  维 LHL-立方体的故障节点集, 只需证  $\forall V' \subset V(LHL_n)$ , 且故障节点数  $|V'| \leq n-1$ ,  $LHL_n - V'$  是连通的即可。我们可以令  $V' = V_0 \cup V_1$ , 其中  $V_0, V_1$  分别在  $Q_{n-1}$  和  $LTQ_{n-1}^1$  上, 则显然  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ 。分以下几种情形来讨论:

1) 设  $V_0 = V'$ 。由定义 2 知,  $Q_{n-1} - V_0$  中的每个顶点都与  $LTQ_{n-1}^1$  中的某个顶点是连通的。由引理 2 知,  $LTQ_{n-1}^1$  是 Hamilton 连通的, 故其上的任意两个不同顶点都是连通的, 故  $LHL_n - V'$  是连通的。

2) 设  $V_1 = V'$ 。由定义 2 知,  $LTQ_{n-1}^1 - V_1$  中的每个顶点都与  $Q_{n-1}$  中的某个顶点是连通的。由引理 3 知,  $Q_{n-1}$  上必存在在一个圈  $C$ , 故  $LHL_n - V'$  是连通的。

3) 设  $V_0 \neq V'$  且  $V_1 \neq V'$ 。  $k(Q_{n-1}) = n-1 > |V_0|$ ,  $k(LTQ_{n-1}^1) = n-1 > |V_1|$ , 若一个图的连通度为  $n$ , 则去掉图中任意的小于  $n$  个顶点的时候, 该图仍是连通的。故  $Q_{n-1} - V_0$  和  $LTQ_{n-1}^1 - V_1$  都是连通的。又因  $|V(Q_{n-1})| - |(V_0 \cup V_1)| = |V(Q_{n-1})| - |V'| \geq 2^{n-1} - (n-1) > 0$ , 即  $|V(Q_{n-1})| -$

$|V_0| - |V_1| > 0$ , 故  $|V(Q_{n-1}) - V_0| > |V_1|$ 。由定义 2 知, 在  $Q_{n-1} - V_0$  中至少会存在一个顶点与  $LTQ_{n-1}^1 - V_1$  中的一个顶点是相邻的。由归纳假设知  $LHL_n - V'$  是连通的。

综上, 当  $n \geq 1$  时,  $n$  维 LHL-立方体的顶点连通度为  $n$ 。

#### 3.2 LHL-立方体的边连通度

**引理 4**<sup>[22]</sup> 设  $G$  是一个图, 则  $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

**定理 4** 设  $n \geq 1$ , 则  $\lambda(LHL_n) = n$ 。

证明: 对  $n \geq 1$ , 由引理 4 知,  $k(LHL_n) \leq \lambda(LHL_n) \leq \delta(LHL_n)$ 。由定理 2 和定理 3 可知,  $\delta(LHL_n) = n$  和  $k(LHL_n) = n$ 。所以  $\lambda(LHL_n) = n$  是成立的。

综上, 当  $n \geq 1$  时,  $n$  维 LHL-立方体的边连通度为  $n$ 。

#### 3.3 LHL-立方体的 Hamilton 连通性

**引理 5** 设  $u, v$  是  $LTQ_n$  中两个不同的顶点, 若  $u, v$  之间存在一条 Hamilton 路  $P$ , 则在  $P$  上必存在两个相邻顶点  $x, y$ , 且使得两顶点之间的海明距离为 1。

证明: 在  $LTQ_n$  上, 设  $P$  是顶点  $u, v$  间的一条 Hamilton 路。

令  $x = \underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ 个 } 0}$ , 则由定义 1 可知, 在  $LTQ_n$  上,  $x$  的  $n$  个邻接点分别为  $y_1 = \underbrace{1 \ 00 \dots 0}_{n-1 \text{ 个 } 0}$ ,  $y_2 = \underbrace{0 \ 1 \ 0 \dots 0}_{1 \text{ 个 } 0, n-2 \text{ 个 } 0}$ ,  $y_3 = \underbrace{00 \ 1 \ 0 \dots 0}_{2 \text{ 个 } 0, n-3 \text{ 个 } 0}$ ,  $\dots$ ,  $y_n = \underbrace{00 \dots 01}_{n-1 \text{ 个 } 0}$ 。显然在  $LTQ_n$  上, 顶点  $x$  与  $y_i$  (其中  $1 \leq i \leq n$ ) 之间的海明距离均为 1。又因  $P$  是顶点  $u, v$  之间的一条 Hamilton 路, 故顶点  $x$  必在  $P$  上。设顶点  $z$  是顶点  $x$  在  $P$  上的邻接点, 则顶点  $x, z$  之间的海明距离必为 1。

综上可知, 若  $LTQ_n$  中的两个不同顶点  $u, v$  之间存在一条 Hamilton 路  $P$ , 则在  $P$  上必存在两个相邻顶点  $x, y$ , 且两点之间的海明距离为 1。

**定理 5** 设  $n \geq 4$ , 则  $n$  维 LHL-立方体是 Hamilton 连通的。

证明: 当  $n \geq 4$  时, 对于  $LHL_n$  中任意两个不同的顶点  $u, v$  分以下情况讨论:

1)  $u \in V(Q_{n-1}), v \in V(LTQ_{n-1}^1)$

由引理 3 可知, 在  $n-1$  维超立方体中必然存在着 Hamilton 圈  $C$ , 在圈  $C$  上顶点  $u$  必然有两个相邻顶点, 分别记为  $x$  和  $x'$ , 所以我们总可以从顶点  $x$  和  $x'$  中找到一个点。不妨设为  $x$ , 其  $LTQ_{n-1}^1$  中的对应点  $y$  满足  $y \neq v$ 。由引理 2 知, 当  $n \geq 3$  时,  $LTQ_n$  是 Hamilton 连通的, 故局部扭立方体中任意两个不同顶点之间都存在一条 Hamilton 路径, 所以  $LTQ_{n-1}^1$  中顶点  $v$  和  $y$  间存在一条 Hamilton 路  $P$ 。故可得到顶点  $u$  和  $v$  之间的 Hamilton 路径为  $u, C - (u, x), (x, y), P, v$ , 如图 4 所示。

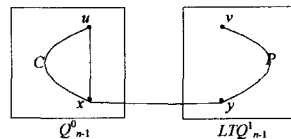


图4  $u, v$  之间的 Hamilton 路

2)  $u, v \in V(Q_{n-1})$

由引理 3 知, 在  $n-1$  维超立方体中必然存在着 Hamilton 圈  $C$ 。

情形 1  $(u, v) \in C$ 。在圈  $C$  上必然存在顶点  $v$  的一个邻

接点,不妨设为  $x$ 。我们可以取两个不同的顶点  $x'$  和  $y'$ , 其中  $x', y' \in V(LTQ_{n-1}^1)$  使得  $(x, x') \in E(LHL_n)$ ,  $(v, y') \in E(LHL_n)$ 。由引理 2 知, 当  $n \geq 3$  时,  $LTQ_n$  是 Hamilton 连通的, 所以在  $LTQ_{n-1}^1$  中顶点  $x'$  和  $y'$  之间必然存在 Hamilton 路径  $P$ 。若圈  $C$  上顶点  $u, x$  之间不过  $v$  点的路径为  $P_1$ , 则可得顶点  $u, v$  之间的 Hamilton 路径为  $u, P_1, (x, x'), P, (y', v), v$ , 如图 5 所示。

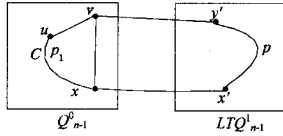


图 5  $u, v$  之间的 Hamilton 路

情形 2  $(u, v) \notin C$ 。在圈  $C$  上选两个不同顶点  $x$  和  $y$ , 使  $(u, y) \in C, (v, x) \in C$ 。我们可以取两顶点  $x'$  和  $y'$ , 其中  $x', y' \in V(LTQ_{n-1}^1)$  使得  $(x, x') \in E(LHL_n), (y, y') \in E(LHL_n)$ 。由引理 2 知, 当  $n \geq 3$  时,  $LTQ_n$  是 Hamilton 连通的, 所以在  $LTQ_{n-1}^1$  中顶点  $x'$  和  $y'$  之间存在一条 Hamilton 路径  $P$ 。若圈  $C$  上顶点  $u, x$  之间不过  $v$  点的路为  $P_1$ ,  $y$  和  $v$  之间不过  $u$  点的路  $P_2$ , 即可得到  $u, v$  之间的 Hamilton 路径为  $u, P_1, (x, x'), P, (y', y), P_2, v$ , 如图 6 所示。

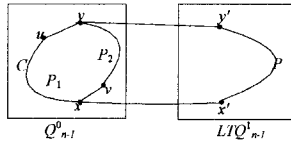


图 6  $u, v$  之间的 Hamilton 路

3)  $u, v \in V(LTQ_{n-1}^1)$

由引理 2 知, 当  $n \geq 3$  时,  $LTQ_n$  是 Hamilton 连通的, 故局部扭立方体中的任意两个不同顶点之间都存在一条 Hamilton 路径。在  $n-1$  维的局部扭立方体  $LTQ_{n-1}^1$  中, 顶点  $u, v$  之间必存在一条 Hamilton 路  $P$ , 由引理 5 可知, 在  $P$  上必然存在两个相邻顶点  $x, y$ , 且两点之间的海明距离为 1, 顶点  $x, y$  在  $Q_{n-1}^0$  中的对应顶点分别为  $x', y'$ , 且  $x', y'$  两点之间的海明距离为 1。由引理 3 知, 超立方体的每一条边属于超立方体的某一个 Hamilton 圈, 所以边  $(x', y')$  必在某个圈  $C$  上, 即可得  $u, v$  之间的一条 Hamilton 路径为  $u, (u, x), (x, x'), C, (y', y), (y, v), v$ , 如图 7 所示。

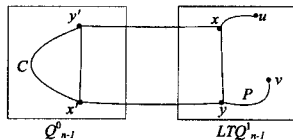


图 7  $u, v$  之间的 Hamilton 路

由以上归纳分析得出, 当  $n \geq 4$  时, LHL-立方体任意两个顶点之间都存在 Hamilton 路径, 故 LHL-立方体是 Hamilton 连通的。

### 3.4 LHL-立方体的直径

引理 6<sup>[3]</sup> 设  $n \geq 1$ , 则  $D(Q_n) = n$ 。

引理 7<sup>[6]</sup>  $D(LTQ_3) = 2, D(LTQ_4) = 3$ 。设  $n \geq 5$ ,

$$D(LTQ_n) = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil。$$

定理 6  $D(LHL_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ 。

证明: 当  $1 \leq n \leq 3$  时, 由定义 2 知,  $n$  维 LHL-立方体即是  $n$  维的超立方体。由引理 6 知,  $D(LHL_n) = n$ 。

当  $n=4$  时, 由定义 2 易知,  $D(LHL_4) = 3$ 。

当  $n=5$  时, 由定义 2 易知,  $D(LHL_5) = 4$ 。

当  $n \geq 6$  时, 分以下情形讨论:

1)  $x, y \in V(Q_{n-1}^0)$

设  $u, v \in V(LTQ_{n-1}^1)$  且  $(x, u) \in E(LHL_n), (y, v) \in E(LHL_n)$ , 则  $dist(LHL_n, x, y) \leq dist(LTQ_{n-1}^1, u, v) + 2 \leq D(LTQ_{n-1}^1) + 2$ 。

2)  $x \in V(Q_{n-1}^0)$  且  $y \in V(LTQ_{n-1}^1)$

设  $u \in V(LTQ_{n-1}^1)$  且  $(x, u) \in E(LHL_n)$ , 则  $dist(LHL_n, x, y) \leq dist(LTQ_{n-1}^1, u, y) + 1 \leq D(LTQ_{n-1}^1) + 1$ 。

3)  $x, y \in V(LTQ_{n-1}^1)$

$dist(LHL_n, x, y) \leq dist(LTQ_{n-1}^1, x, y) \leq D(LTQ_{n-1}^1)$  由以上归纳分析以及引理 7, 我们可以得到以下结论:  $dist(LHL_n, x, y) \leq \left\lceil \frac{(n-1)+3}{2} \right\rceil + 2 = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil + 2$

$$D(LHL_n) = \max\{dist(LHL_n, u, v) \mid u, v \in V(LHL_n)\} \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$$

综上所述,

当  $1 \leq n \leq 2$  时,  $D(LHL_n) = D(LTQ_n) = n$ 。

当  $n=3$  时,  $D(LHL_n) - D(LTQ_n) = 1$ 。

当  $4 \leq n \leq 5$  时,  $D(LHL_n) = D(LTQ_n) < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ 。故,

当  $1 \leq n \leq 5$  时, 总有  $D(LHL_n) < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ 。

当  $n \geq 6$  时,  $D(LHL_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ 。

故  $D(LHL_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$  总成立, 所以  $n$  维 LHL-立方体的直径上界为  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$ 。

当  $1 \leq n \leq 5$  时,  $D(LHL_n) - D(LTQ_n) < 2$  显然成立。

当  $n \geq 6$  时,

$$D(LHL_n) - D(LTQ_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \leq 2, \text{ 即 } n \text{ 维 LHL-}$$

立方体的直径比局部扭立方体的直径至多大 2。

### 3.5 模拟与仿真

我们使用了 Java 语言, 通过编写程序对 LHL-立方体互连网络进行了模拟。通信开销是衡量互连网络性能的重要评价指标<sup>[21,23]</sup>, 而互连网络的直径又是衡量通信开销的重要手段。LHL-立方体直径、超立方体  $Q_n$  直径和局部扭立方体  $LTQ_n$  直径的模拟数据如图 8 所示, 其中横坐标表示各种立方体的维数, 纵坐标表示对应直径。

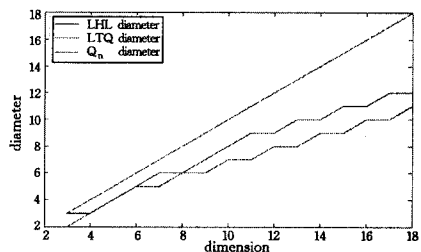


图 8 LHL-立方体、 $Q_n$  和  $LTQ_n$  的直径对比图

综上所述, 通过归纳分析和模拟仿真, 我们可知  $n$  维

LHL-立方体的直径上界为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 3$ ,比局部扭立方体的直径至多大2,故LHL-立方体可以保持局部扭立方体小直径的优点。

**结束语** 本文基于超级立方体和局部扭立方体的互连提出了LHL-立方体。通过证明得出以下结论:一个 $n$ 维LHL-立方体是一个具有 $2^n$ 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边的 $n$ 正则图,其顶点连通度和边连通度均为 $n$ ,并且具有Hamilton连通性。一个 $n$ 维LHL-立方体的直径比局部扭立方体至多大2。

$n$ 维LHL-立方体同时包含了 $n-1$ 维超立方体 $Q_{n-1}$ 和 $n-1$ 维局部扭立方体 $LTQ_{n-1}^*$ 作为子网络,因此 $n$ 维LHL-立方体既能实现低维超立方体的功能,又能实现低维局部扭立方体的功能。它同时具备低维超立方体和局部扭立方体的优点。

综上所述, $n$ 维LHL-立方体互连网络能同时实现低维超立方体和局部扭立方体的功能,从而在低维上保持了超立方体和局部扭立方体两者各自的优点;而且 $n$ 维LHL-立方体可以很好地保持局部扭立方体低直径、Hamilton连通性等优点,而超立方体是不具有Hamilton连通性的,从而克服了超立方体的不足。同时 $n$ 维LHL $_n$ 在最小顶点度数、顶点连通度、边连通度方面则保持了超立方体和局部扭立方体两者所共有的性质,故 $n$ 维LHL-立方体既可以保持局部扭立方体的优点又可以保持超立方体的优点。

### 参 考 文 献

[1] Bhuyan L N, Agrawal D P. Generalized hypercube and hyper bus structures for a computer network[J]. IEEE Transactions on Computers, 1984, 33(4): 323-333

[2] Leighton F T. Introduction to parallel algorithms and architectures: arrays, trees, hyper cubes[M]. Morgan Kaufman Publishers, 1992

[3] Saad Y, Shultz H G. Topological properties of hypercube[J]. IEEE Transactions on Computers, 1988, 37: 867-872

[4] Kavianpour A, Kim K H. Diagnosability of hypercube under the pessimistic one-step diagnosis strategy[J]. IEEE Transactions on Computers, 1991, 40(2): 232-237

[5] Wang D J. Diagnosability of Hypercube and Enhanced Hypercube Under the Comparison Diagnosis Model[J]. IEEE Transactions on Computers, 1999, 48(12): 1369-1374

[6] Yang X F, Evans D J, Megson G M. The locally twisted cubes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2005, 82(4): 401-413

[7] Fan J X. The t/k-Diagnosability of the BC Graphs [J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2): 176-184

[8] Zhu Q. On conditional diagnosability and reliability of the BC networks[J]. Journal of Supercomputer, 2008, 45: 173-184

[9] 樊建席, 何力勤. BC互连网络及其性质[J]. 计算机学报, 2003, 26(1): 84-90

[10] Ma M J, Xu J M. Panconnectivity of locally twisted cubes[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(7): 673-677

[11] Chang Q Y, Ma M J, Xu J M. Fault-tolerant pancyclicity of locally twisted cubes [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(6): 607-610

[12] Yang X F, Megson G M, Evans D J. Locally twisted cubes are 4-pancyclic[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(8): 919-925

[13] Hsieh S Y, Tu C J. Constructing edge-disjoint spanning trees in locally twisted cubes[J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(8-10): 926-932

[14] Tang R W, Yang X F, Zhu C, et al. A Deadlock-free Routing Algorithm for Locally Twisted Cubes[J]. Journal of Chongqing University(Natural Science Edition), 2006, 29(4): 95-100

[15] Su W, Yang X F, Tang R W, et al. An Unicast Fault-tolerant Routing Algorithm on Locally Twisted Cubes[J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 2006, 29(3): 69-75

[16] Lin W, Li J L, Tang L Z, et al. A Broadcast Routing Algorithm on Locally Twisted Cubes[J]. Computer & Digital Engineering, 2008, 36(8): 45-49

[17] Sun L P, Yang X F, Hang H J. An Efficient Pessimistic Diagnosis Algorithm on Locally Twisted Cube[J]. Microelectronics and Computer, 2007, 24(10): 171-173

[18] Lin X, Ni L M. Deadlock-free Multicast Wormhole Routing in Multicomputer Networks[C]//ISCA. 1991: 116-125

[19] Lin X, McKinley P K, Ni L M. Deadlock-Free Multicast Wormhole Routing in 2-D Mesh Multicomputers[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1994, 5(8): 793-804

[20] 樊建席, 管殿柱. 超级 Möbius 立方体——一类最优容错的小直径互连网络[J]. 计算机研究与发展, 1999, 36(3): 1033-1036

[21] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications[M]. London/New York: MacMillan/Elsevier, 1976

[22] Armstrong J R, Gray F G. Fault diagnosis in a Boolean  $n$  cube array of microprocessor[J]. IEEE Transactions on Computers, 1981, C-30(8): 587-590

[23] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2004

(上接第39页)

[60] Patil V, Mei A, Mancini L. Addressing Interoperability issues in access control models [C] // Proceedings of ASIACCS' 07 (ACM). 2007

[61] Warner J, Atluri V, Mukkamala R. Using semantics for automatic enforcement of access control policies among dynamic coalitions[C]//Proceedings of SACMAT'07. 2007

[62] Gibbs M. An XML firewall and more. Network World, March 04 [EB/OL]. <http://www.networkworld.com/newsletters/web/2004/0315web2.html>

[63] Dr S P, Vineet S, Senthil K M K. Preventing Service Oriented Denial of Service (PreSODoS): A Proposed Approach[C]//Pro-

ceedings of the ICWS'06. 2006

[64] Sidharth N, Liu Ji-gang. IAPF: A Framework for Enhancing Web Services Security[C]//Proceedings of the COMPSAC'07. 2007

[65] Jensen M, Gruschka N, Herkenhoner R. SOA and Web Services: New Technologies, New Standards-New Attacks[C]//Fifth European Conference on Web Services. 2007

[66] Haidar A N, Abdallah A E. Towards a Formal Framework for Developing Secure Web Services [C] // Proceedings of the WWW'06. 2006

[67] 岳昆, 王晓玲, 周奥英. Web 服务核心支撑技术: 研究综述[J]. 软件学报, 2004, 15(3): 428-442